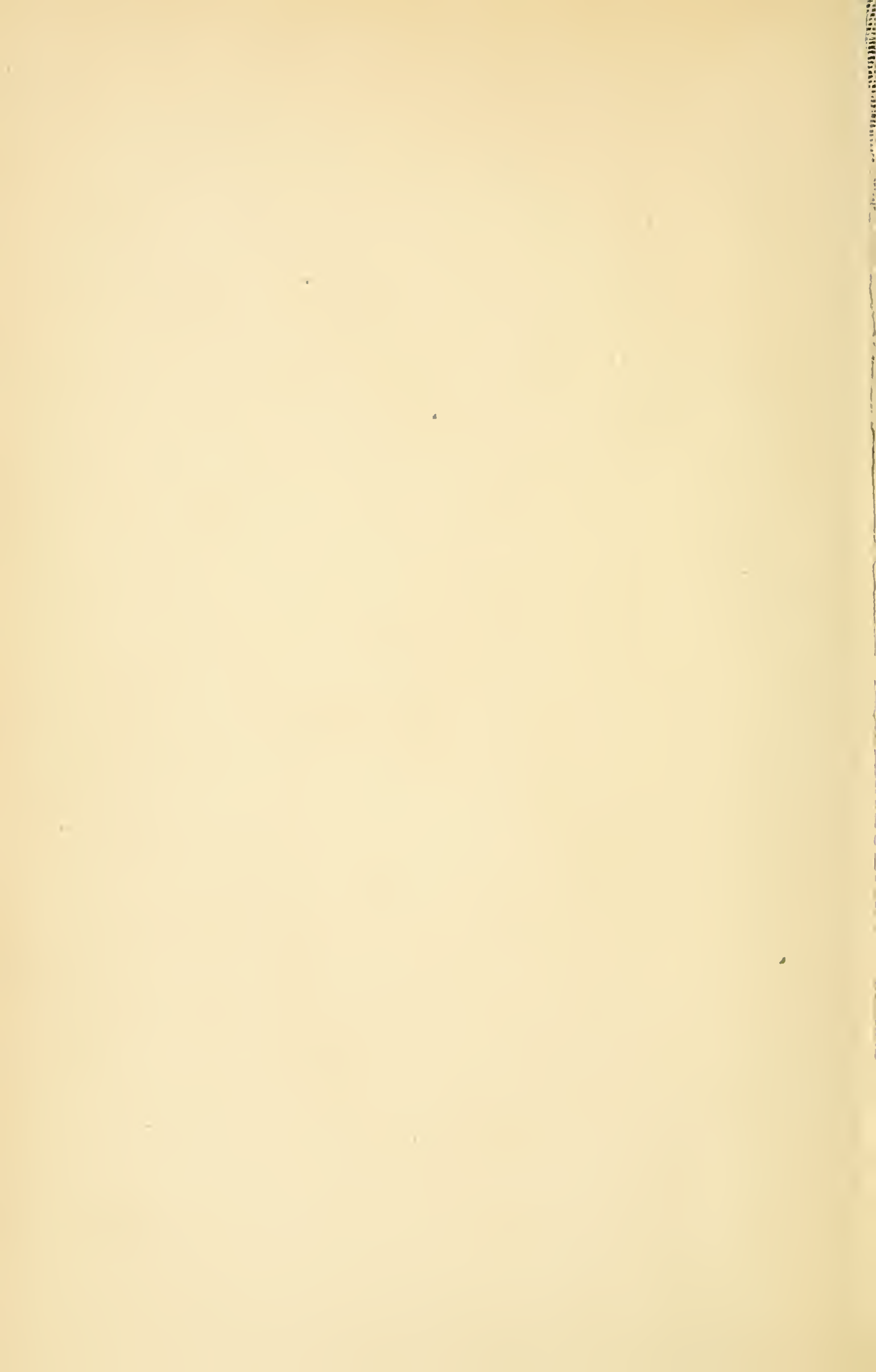

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00477811 4

















Lehrbuch

der

Arithmetik

zum

Gebrauch an höhern Lehranstalten

und beim

Selbststudium

von

B. E. Richard Schurig.

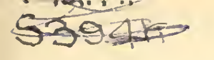
In drei Teilen.

1. Teil: **Spezielle Zahlenlehre** (Zifferrechnen).
2. Teil: **Allgemeine Zahlenlehre** (Buchstabenrechnung).
3. Teil: **Algebra nebst Anwendung auf die Analysis.**

Leipzig.

Verlag von Friedrich Brandstetter.

1884.



Lehrbuch

der

Arithmetik

zum

Gebrauch an höhern Lehranstalten

und beim

Selbststudium

von

B. E. Richard Schurig.

Zweiter Teil:

Allgemeine Zahlenlehre.

(Buchstabenrechnung.)

Leipzig.

Verlag von Friedrich Brandstetter.

1884.

Vorwort.

Mit wenig Worten möchte ich im Vorworte auf einige Punkte des vorliegenden 2. Teils aufmerksam machen, die bisher eine abweichende Behandlung erfahren haben.

Die Addition mit Buchstaben ist, um sie vollständig geben zu können, auf gebrochene Coefficienten ausgedehnt worden, da sie ohnehin nicht blofs auf die Sätze der Addition beschränkt werden kann. Bei manchen Sätzen einen Unterschied zwischen commensurabeln und incommensurabeln Gröfsen zu machen, halte ich für unmathematisch, da es gleichgültig sein mufs, wie grofs das gemeinsame Mafs der Zahlen ist. Bei Behandlung des §. 68 habe ich weniger den Mathematiker, als vielmehr den ungeübten Lernenden vor Augen gehabt. Dies schien mir um so mehr gerechtfertigt, als die Lehrbücher manche dieser Sätze in recht unverständlicher Weise vortragen. Notwendig war es, auf irgend eine Art der Verwirrung hinsichtlich des Begriffes: Binomialcoefficient ein Ende zu machen (s. §. 62, 1, 2. Anmerkung). Eine Bereicherung des bisher bekannten mathematischen Stoffes habe ich an verschiedenen Stellen versucht, mache jedoch hier nur auf die nachstehenden aufmerksam: §. 52, 14, I, Anm. (in Verbindung mit §. 66, 1, 3. Beisp.) — §. 61, 5 — §. 62, 7 (Beweis!) — §. 62, 8 — §. 64, 1, V — §. 66 (in verschiedenen Punkten) — §. 68, 15 — §. 69, 26 — §. 69, 28, II bis V — §. 70, 1, 5. Zus. — §. 71, 1, g — §. 71, 1, 4. Zus. — §. 72. 2 — §. 73, 6, 5. Zusatz (Tabelle, mit Rücksicht auf §. 73, 14, 3. Zusatz) — §. 73, 26, III — §. 73, 37 (Tafeln).

Der vorliegende 2. Teil wird sicherlich auch Angriffen von solchen Kritikern ausgesetzt sein, die den 1. Teil recensierten, nachdem sie einen Paragraph (z. B. §. 18) und aufserdem die Überschriften einiger anderen Paragraphen gelesen hatten, die unter „Lehrgang" nur die titulare Anordnung des Stoffes, nicht auch die Art der Darstellung und Beweisführung verstehen und die den Standpunkt, welchen sie in der Wissenschaft einnehmen, als den allein mustergültigen ansehen. So sagt z. B. „H." im „Archiv der Mathematik", dafs der 1. Teil „sich nicht einmal durch eigenartigen Lehrgang von den gewöhnlichen Lehrbüchern wesentlich unterscheidet". Dem H. scheint es also sehr gleichgültig zu sein, in

welcher Weise die Sätze entwickelt werden (s. z. B. die §§. 2 u. 3, §. 7, 9 u. s. w.), er scheint auch nicht bemerkt zu haben, dafs das Werk fast in jedem Paragraph (abgesehen von §. 18) sehr viel Neues im Sinne des wesentlichsten Fortschrittes hat. Weiter sagt H.: „Der natürlichen Entstehung der Operationen mit successiver Erweiterung des Zahlenbegriffs entspricht implicite der Vortrag, doch macht er nicht darauf aufmerksam, verhüllt eher die Beziehung.“ Das Unsinnige dieses Ausspruches wird wohl jedem klar werden, wenn er die Schlufsbemerkungen der §§. 17 u. 18 gelesen und die Entwickelung der 7 Species studiert hat. Neugierig bin ich, welchem Werke in dieser Beziehung H. den Vorzug geben will. Die Sätze des §. 18 erklärt H. durchgängig für falsch, scheint also nicht zu wissen, dafs dieselben (abgesehen von der Definition für 0) in der höhern Mathematik vollkommen gleich lauten, dafs z. B. dy und dx im endlichen Verhältnis stehen. Die Definition für ∞ (keine Zahl?) hätte H. wohl ganz anders ausgesprochen, nie aber richtig, wenn er den Gesetzen der Logik zufolge alle mit „unendlichgrofs“ synonymen Begriffe vermeiden will. Ich bleibe dabei, dafs es nur eine Null geben darf, die der höhern und niedern Mathematik zugleich genügt, dafs jedoch dem Anfänger zunächst 0 als „absolutes Nichts“ zu geben ist (s. das Vorwort zum 1. Teil und §. 9, 6). In dieser Beziehung sei noch auf die 6 letzten Zeilen des §. 18 und die ersten Zeilen von §. 18, 13 aufmerksam gemacht. Auch scheint es mir selbstverständlich, dafs 0 Meter nicht $=$ 0 Liter, -0 nicht $= +0$ sein darf, dafs $\frac{1}{0}$ für 0 als absolutes Nichts nicht die entfernteste Ähnlichkeit mit ∞ hat, dafs man überhaupt nie in Zweifel sein darf, ob eine vorliegende 0 absolutes Nichts oder aber $\frac{1}{\infty}$ ist. Ein wiener Kritiker sagt ferner: „Wäre Null eine Zahl, dann wäre a^0 nicht $= 1$, $\frac{0}{0}$ nicht der Ausdruck der Unbestimmtheit, und das Rechnen mit nullmachenden Faktoren hätte nicht Widersprüche zu seinem Ergebnisse“. Diese Ansicht ist jedoch der Wahrheit genau entgegengesetzt, denn nur mit 0 als „unendlich klein“ ist bekanntlich $\frac{0}{0}$ unbestimmt und nur mit 0 als unendlich klein nebst Ausschlufs von 0 als absolutes Nichts lassen sich gewisse Fehler vermeiden.

Leipzig, Mai 1884.

Der Verfasser.

Inhalt.

NB. Vor dem Gebrauche dieses Werks wolle man die auf Seite 431 dieses II. Teiles angezeigten

Druckfehler

gef. berichtigen.

Ungeachtet der auf einen korrekten Druck dieses Buches verwendeten Sorgfalt ist übrigens die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dafs bei dem äufserst schwierigen Satze aufser den dort angezeigten doch hie und da ein Druckfehler unberichtigt geblieben ist. Die Verlagshandlung würde es daher mit grofsem Danke anerkennen, von den verehrlichen Interessenten des Werkes gegebenenfalls auf solche Fehler aufmerksam gemacht zu werden!

§. 52. Einleitung in die allgemeine Zahlenlehre. Gebrauch der allgemeinen Zahlen. Glied.

1. Das mathematische Denken entwickelt sich aus dem Begriffe „Gröfse" und „Einheit", führt daher unmittelbar zu den speciellen Zahlen, von welchen die allgemeinen (s. §. 1, 19) erst abstrahiert werden. Der Gegenstand unserer bisherigen Betrachtungen (1. Teil) sollte daher diesem Entwickelungsgange gemäfs zunächst nur das Rechnen mit speciellen Zahlen sein, dennoch konnten wir der allgemeinen Zahl nicht ganz entbehren, wenn die Gesetze und Regeln für das specielle Rechnen als allgemeingültige, als vollkommen evidente hingestellt werden sollten. Dem Anfänger wird die allgemeine Zahl (der Buchstabe) kein Hindernis hinsichtlich des Verständnisses der mathematischen Sätze gewesen sein, vielmehr umgekehrt zur gröfseren Klarheit derselben geführt haben, da sie einerseits nur in den allereinfachsten Formen und nur mit Rücksicht auf die leicht zugänglichen ersten vier Species, andererseits nur mit Gegenstellung der speciellen Zahl auftrat.

Eine Vervollständigung der gegebenen Lehren, ein tieferes Eindringen in das Wesen der allgemeinen Zahl und in das Rechnen mit derselben, namentllich in Bezug auf die noch fehlenden höheren Species, ist um so nötiger, als dann allein die Lösung von mathematischen Aufgaben möglich wird, bei denen uns die specielle Zahl entweder gänzlich im Stiche läfst, oder nur in sehr unvollkommener und zeitraubender Weise zum Ziele führt.

2. Die allgemeine Zahlenlehre (Buchstabenrechnung) ist die Lehre von den allgemeine Zahlen enthaltenden Gleichungen (s. §. 5).

3. Das Rechnen mit Buchstaben stellt sich der nur mit dem Zifferrechnen vertraute Anfänger oft als ein sehr unbeholfenes vor, da er sich z. B. die Summe $a + b$ nicht anders als in derselben Form denken soll, während die Summe 3 und 4 zur einfachen Zahl 7 wird. Bei näherer Bekanntschaft mit dem Buchstaben-Rechnen wird sich jedoch diese Unbeholfenheit nur als eine

scheinbare herausstellen. Zunächst mag durch ein Beispiel gezeigt werden, dafs die Buchstabenrechnung neben anderen, sogar noch hervorragenderen Vorteilen, das Zifferrechnen in den meisten Fällen bedeutend vereinfacht.

N soll mit den 2 gegebenen Zahlen 987 und 789 in folgender Weise operieren: Die Summe beider Zahlen $(987 + 789 = 1776)$ soll er zuerst mit ihrer Differenz $(987 - 789 = 198)$ multiplicieren $(= 1776 \cdot 198 = 351648)$, hierauf soll er die kleinere Zahl mit sich selbst multiplicieren $(789 \cdot 789 = 622521)$, das erhaltene Produkt zu jenem ersten addieren $(351648 + 622521 = 974169)$ und die Summe endlich durch das Doppelte der gröfseren Zahl (also durch $2 \cdot 987 = 1974$) dividieren.

Er würde $974169 : 1974 = 493\frac{987}{1974} = 493\frac{1}{2}$ erhalten.

Diese anstrengende Rechnung wird nun durch die Buchstabenrechnung in folgender Weise abgekürzt:

Man nennt die gröfsere Zahl a, die kleinere b. Folglich ist zunächst das Produkt $(a+b)(a-b)$ zu berechnen und um das Produkt bb zu vermehren. Man erhält $(a+b)(a-b)+bb$. Endlich ist diese Summe durch das Doppelte der gröfsern Zahl a zu dividieren. Es ergiebt sich:

$$\frac{(a+b)(a-b)+bb}{2 \cdot a}. \text{ Dies aber ist}$$

$$= \frac{(aa+ab-ab-bb)+bb}{2a} \quad \text{(s. §. 11, 9, 1. Zus.)}$$

$$= \frac{aa+ab-ab-bb+bb}{2a} \quad \text{(s. §. 7, 4)}$$

$$= \frac{aa}{2a} \quad \text{(s. §. 9, 7)}$$

$$= \frac{a}{2} \quad \text{(s. §, 13, 14).}$$

Anstatt also die Rechnung mit 987 und 789 auszuführen, geschieht dies einfacher und weit sicherer mit a und b, und man erfährt, dafs das Resultat stets die Hälfte der gröfseren Zahl, in Bezug auf das specielle Beispiel also $987 : 2 = 493\frac{1}{2}$ sein mufs. Hätte *N*, wie es bei Berechnung von Tabellen vorkommt, jene Rechnung zuerst mit 987 und 789, dann mit 3459 und 67, hierauf mit 257 und 189 u. s. w., im ganzen mit 1000 solchen Zahlenpaaren auszuführen, wie viel Zeit würde er alsdann nötig haben, wenn er bei jeder einzelnen Aufgabe die zusammengesetzte Rechnung vornehmen müfste, wie sie zuerst 987 und 789 zeigten! Hier würde sich der eminente Vorteil der Buchstabenrechnung im hellsten Lichte zeigen. Denn er führte die Rechnung nur einmal mit a und b aus und fände dann die Lösung sämtlicher 1000 Auf-

gaben einfach dadurch, dafs er bei jeder einzelnen die gröfsere Zahl durch 2 dividierte.

Anmerkung. Einen solchen Ausdruck (wie hier $\frac{a}{2}$), der eine Aufgabe allgemein und damit alle speciellen Aufgaben derselben Form löst, nennt man eine Formel.

4. Als allgemeine Zahlen benutzt man am häufigsten die kleinen lateinischen Buchstaben, zuweilen aber auch grofse lateinische Buchstaben (A, B, ..., X, Y, ..., z. B. für zusammengesetztere Ausdrücke), griechische Buchstaben (siehe nachstehende Tabelle), selbst besondere Zeichen (z. B. ℧ + ℧ + ℧ = 3 ℧). Mit Rücksicht auf solche Zeichen sind daher auch die Ausdrücke „Buchstabe und Buchstabenrechnung" unpassende.

Kommen in derselben Rechnung (resp. Aufgabe) grofse und kleine Buchstaben vor, so hat man diese beim Aussprechen zu unterscheiden. $A^2 b^3 + a^3 B^2$ gelesen: „Grofs A Quadrat mal klein b zur dritten plus klein a zur dritten mal grofs B Quadrat."

Die griechischen Buchstaben:

α Alpha,	ι Jota,	ϱ Rho,
β Beta,	$\varkappa$ Kappa,	σ, ς Sigma,
γ Gamma,	λ Lambda,	τ Tau,
δ Delta,	μ My,	υ Ypsīlon,
ε Epsilon,	ν Ny,	φ Phi,
ζ Zeta,	ξ Xi,	χ Chi,
η Eta,	o Omikron,	ψ Psi,
ϑ Theta,	π Pi,	ω Omega.

5. Gegebene (bekannte) Gröfsen drückt man durch die ersten Buchstaben des Alphabets (a, b, c, d, ...) aus, zu suchende (unbekannte) durch die letzten Buchstaben und zwar durch x, y, z, u, v, w, ... Werden z. B. in einer Aufgabe 4 unbekannte Zahlen gesucht, so benutzt man als erste x, als zweite y, als dritte z, als vierte u.

Der Anfänger stellt sich unter a, b, ... nicht bekannte, sondern unbekannte Zahlen vor, da er die Gröfse derselben augenblicklich nicht kennt. Ein Beispiel mag diesen Irrtum beseitigen.

Aufgabe. Welche Zahl ist von 99 zu subtrahieren, wenn der Rest 34 sein soll?

Auflösung. Setzt man die unbekannte Zahl $= x$, so ist den Bedingungen der Aufgabe gemäfs

$$99 - x = 34.$$

Da nun nach §. 9, 3 der Rest mit dem Subtrahend vertauscht werden kann, so erhält man:

$$x = 99 - 34.$$

Wären nun nicht die Zahlen 99 und 34, sondern z. B. 901 und 138 gegeben, so würde die Art der Auflösung dieselbe ge-

blieben sein. Man könnte daher auch folgende allgemeine Aufgabe in gleicher Weise behandeln:

Um welche Zahl ist a zu vermindern, damit man den Rest b erhält?

Auflösung. Die unbekannte Zahl sei x, folglich mufs a um x vermindert die Zahl b geben, oder es ist:

$$a - x = b.$$

Nach §. 9, 3 findet man $x = a - b$.

Hier sind also a und b nicht unbekannte, sondern bekannte Zahlen.

6. Die Symbole $a, b, c, \ldots . x, y, z$ können jede specielle (positive und negative) Zahl vorstellen. Es kann also a oder x ebensowohl 0 oder 1, wie $567\frac{8}{9}$ oder $-\frac{2}{7}$, ebensowohl $\sqrt{3}$ wie $+\infty$ oder $-\infty$ vorstellen. Soll die allgemeine Zahl nur eine ganze Zahl vorstellen, so wählt man einen der mittleren Buchstaben des Alphabets, namentlich n (= *numerus*), $m, k, h, p, r, \ldots$

Beispiel. Im 4 Eck sind $\frac{4(4-3)}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$,

„ 5 „ „ $\frac{5(5-3)}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$,

„ 6 „ „ $\frac{6(6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$,

allgemein: Im n-Eck sind $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen möglich.

Da die Anzahl der Ecken einer solchen Figur nicht gebrochen (z. B. $4\frac{2}{3}$), sondern nur eine ganze Zahl sein kann, die Anzahl der Ecken auch nicht erst berechnet werden, sondern sogleich mit jener Formel gegeben sein soll, so kann es nicht heifsen: Im a-Eck oder x-Eck.

Ist nun $n = 13$, will man also die Anzahl der Diagonalen eines 13 Ecks kennen lernen, so geht $\frac{n(n-3)}{2}$ über in

$$\frac{13(13-3)}{2} = \frac{13 \cdot 10}{2} = 65 \text{ Diagonalen.}$$

Die Bedeutung von n u. s. w. richtet sich jedoch ganz nach der Aufgabe, so dafs man $n, m, p, \ldots .$ auch für unbekannte Zahlen benutzt, die dann wie $x, y, \ldots .$ jede nur mögliche Zahl vorstellen können.

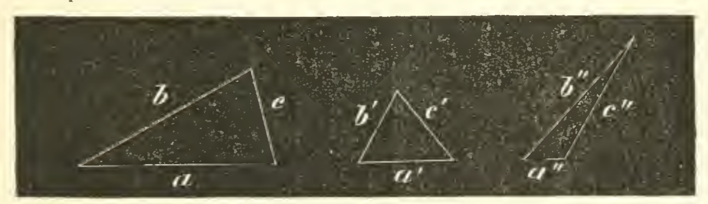
7. Oft wählt man solche Buchstaben und Zeichen, die leicht an den Begriff erinnern, mit dem die Gröfse verbunden ist. Die

Summe von Zahlen bezeichnet man z. B. mit s, die Differenz mit d, das Kapital mit k oder c, die Procente mit p, den Exponent (bei geometrischen Reihen) mit e, die Höhe einer Figur mit h, den Radius des Kreises mit r, die (durch Grad, Minuten und Sekunden ausgedrückte) Länge des aufsteigenden Knotens mit ☊.

Bei gewissen Begriffen bezieht sich die gewählte Bezeichnung auf das lateinische Wort. Z. B. Geschwindigkeit (*celeritas*) $= c$, Raum (*spatium*) $= s$, Zeit (*tempus* — vorzüglich Zeit in Sekunden) $= t$, Neigung (*inclinatio*) $= i$. Der Grund liegt darin, dafs früher die wissenschaftlichen Werke in lateinischer Sprache geschrieben wurden und diese Ausdrücke so häufig vorkamen, dafs ihre Abkürzung eine stehende wurde.

8. Mit Vorteil bedient man sich auch der gestrichenen und bezifferten Buchstaben. a', a'', a''', a^{IV}, ... $a^{(n)}$ wird gelesen: „a Strich, a zwei Strich, a drei Strich, a vier Strich, a n Strich".

Beispiel.



Führte nun eine Aufgabe in Bezug auf diese 3 Dreiecke auf die Lösung:

$$x = \frac{bc + b'c' + b''c''}{a + a' + a''},$$

so würde man dieselbe beim ersten Anblick in folgender Weise durch Worte wiedergeben können:

> Die gesuchte Linie ist gleich der Summe der Produkte der Scheitelseiten, dividiert durch die Summe der Grundlinien.

Hätte man die Seiten der Dreiecke a, b, c — d, e, f — g, h, i genannt, so würde man bei $x = \frac{bc + ef + hi}{a + d + g}$ das Gesetz nicht sofort ablesen können.

a''^5 liest man: „a zwei Strich zur fünften". A'^3: „grofs A Strich zur dritten".

Eine 1., 2., 3., 4. .... Zahl bezeichnet man auch durch die einem bestimmten Buchstaben rechts unten angehängten Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., die man Zeiger, Indices (Einheit: Index), Suffixe nennt.

In $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots . t_n$, gelesen: „$t$ eins, t zwei, t drei, t vier

bis tn", bedeutet t_1 die erste Zahl, t_2 die zweite Zahl dieser Zahlenreihe u. s. w.

t_3 ist nicht mit t^3 oder $t \cdot 3$ u. s. w. zu verwechseln, vielmehr bedeutet t_3 eine einzige Zahl, wie z. B. a, ferner hat man sich t_3 und t_4, wie auch a' und a'' dem Werte nach eben so verschieden wie a und b oder x und y vorzustellen.

a_3^4 lies: „a drei zur vierten", B_2^3: „grofs B zwei zur dritten".

9. Für gewisse specielle Zahlen hat man Buchstaben eingeführt. So bezeichnet man in der Kreislehre die Zahl 3,1415926536 mit π, in der Lehre von den Logarithmen die Zahl 2,718281828459 mit e.

10. Glied ist entweder eine einfache Zahl, z. B. a oder 7,36, oder ein nur durch höhere Rechnungsarten als Addition und Subtraktion entstandener Ausdruck, z. B. a^2, $\frac{bc}{3}$. Die Glieder sind mithin unter sich durch $+$ und $-$ getrennt.

a, bc, $\frac{4\,d^3}{5\,ef^2}$ sind eingliederige, einteilige Ausdrücke oder Monomien (Einheit: Monom). $3\frac{1}{2} \cdot \frac{7\,a}{5} \cdot \frac{b}{6}$ ist auch ein Monom, denn $\frac{7}{2} \cdot \frac{7\,a}{5} \cdot \frac{b}{6} = \frac{49\,ab}{60}$.

$a + b$, $a^3 - \frac{bc^2}{3} + 1$ sind vielgliederige, vielteilige Ausdrücke oder Polynomien.

$a - b$ ist ein 2gliederiger Ausdruck oder Binom,
$2a + bc - 3e^2$ „ „ 3 „ „ „ Trinom,
$8a - 7b - 6c^2 + \frac{1}{x}$ „ „ 4 „ „ „ Quadrinom.

11. Entstehung des zusammengesetzten Gliedes.

I. $a + a + a + a = 4 \cdot a = 4\,a$
$a + a + a = 3\,a$
$a + a = 2\,a$
$a = 1\,a$, siehe §. 10, 1 und §. 11, 2.

$$\underbrace{a}_{1} + \underbrace{a}_{2} + \underbrace{a}_{3} + \ldots + \underbrace{a}_{n} = na;$$
$$ab + ab = 2 \cdot ab = 2\,ab;$$
$$d^4 + d^4 + d^4 = 3\,d^4;$$
$$-a - a = -(a + a) \text{ (s. §. 9, 17)} = -2\,a;$$
$$-a - a - a = -(a + a + a) = -3\,a.$$

Dasselbe erhält man nach §. 51:

$$-7-7-7=3\cdot(-7)=-3\cdot 7, \text{ daher:}$$
$$-a-a-a=-3a.$$
$$-8=-1\cdot 8, \text{ allgemein } -a=-1a.$$

II. Die specielle Zahl, welche mit der allgemeinen multipliciert ist, nennt man Coëfficient (= Anzahl), die allgemeine Zahl: Hauptgröfse (allgemeine Einheit).

In $3a$ ist der Coeff. 3, die Hauptgröfse a,
„ $-2ab$ „ „ „ -2, „ „ ab.

Da $a=1a$, so hat man sich während der Rechnung als Coefficient, wenn ein solcher fehlt, 1 zu denken.

Beispiel. $a+3a=1a+3a$.

Glieder mit gleichen Hauptgröfsen nennt man gleichartige, z. B. $3a$ und $4a$. Ungleichartige Glieder sind z. B. $3a$ und $4ab$ oder $3a$ und $4a^2$ ($=4aa$).

III. Umgekehrt ist $3a=a+a+a$
$2ab=ab+ab$
$1a=a$ (siehe §. 10, 2 und 3).

Beim Resultat läfst man den Coefficient 1 weg, denn man wird nicht $x=1\cdot 8$, sondern $x=8$ schreiben. Daher:

nicht $x=1ab^2$, sondern $x=ab^2$,
„ $x=\frac{1\cdot c}{d}$, „ $x=\frac{c}{d}$,
„ $x=-1\cdot(a+b)$, „ $x=-(a+b)$,

wofür auch $x=-a-b$ stehen kann (s. §. 9, 17).

12. Für die Addition und Subtraktion mit allgemeinen Zahlen ist es unbedingt nötig, in jedem Gliede den Coefficient von der Hauptgröfse unterscheiden zu können.

In $\frac{4d}{5}\left(=\frac{4}{5}\cdot d \text{ oder } \frac{4}{5}d \text{ nach §. 13, 18) ist } \frac{4}{5} \text{ (oder} +\frac{4}{5}\right)$ der Coefficient, d die Hauptgröfse. Denn der Coefficient ist die specielle Zahl (hier $\frac{4}{5}$), welche mit der Hauptgröfse (d) multipliciert das gegebene Glied giebt. Da nun $\frac{4}{5}$ mit d multipliciert $=\frac{4}{5}d=\frac{4d}{5}$ (s. §. 13, 19) = dem gegebenen Gliede, so sind hier Coefficient und Hauptgröfse richtig bestimmt.

Anmerkung. Besser als $\frac{4}{5}d$ schreibt man $\frac{4d}{5}$, denn $\frac{4\,.\,2}{15}$ liegt dem Resultat $\frac{8}{15}$ näher als $\frac{4}{15}\,.\,2$.

$7ab$; Coeff.: $+7$, Hauptgröfse: ab.

$-\frac{x}{5}$; „ $-\frac{1}{5}$, „ x, denn $-\frac{1}{5}\cdot x = -\frac{1\cdot x}{5}$

$= -\frac{x}{5}$ (s. 11, III).

a^3; „ 1, „ a^3, denn $1\cdot a^3 = a^3$.

$-b^4$; „ -1, „ b^4, „ $-1\cdot b^4 = -b^4$.

$-mn^2p^3$; „ -1, „ mn^2p^3.

Anmerkung. Die hier auftretenden speciellen Zahlen 2 und 3 erinnern nicht etwa an den Begriff Coefficient, da das gegebene Glied durch diese Zahlen zu $-m\,nn\,ppp$ wird (s. §. 14).

$\frac{14x}{3y}$; Coeff.: $+\frac{14}{3}$ (oder $4\frac{2}{3}$), Hauptgr. $\frac{x}{y}$, denn

$\frac{14}{3}\cdot\frac{x}{y} = \frac{14x}{3y}$ (s. §. 13, 26).

Weniger praktisch schreibt man $\frac{14}{3}\cdot\frac{x}{y}$ oder $4\frac{2}{3}\frac{x}{y}$.

$-\frac{13}{m}$; Coeff.: -13, Hauptgr. $\frac{1}{m}$, denn $-13\cdot\frac{1}{m} = -\frac{13\cdot 1}{m}$

$= -\frac{13}{m}$.

$-\frac{5}{6ab}$; „ $-\frac{5}{6}$, „ $\frac{1}{ab}$.

$\frac{17}{5x}$; „ $\frac{17}{5}$ (oder $3\frac{2}{5}$), Hauptgr. $\frac{1}{x}$. Hier würde $5\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$ offenbar unpraktisch sein. $5\frac{2}{3x}$ aber hätte die Bedeutung $5\cdot\frac{2}{3x}$, da das Nebeneinanderstellen der Zahlen ihre Multiplication anzeigt (s. §. 31, 3).

$-5\frac{4}{9}$; „ $-5\frac{4}{9}$, Hauptgr. 1.

$\frac{0{,}8\,a}{0{,}13}$? Da durch $\frac{0{,}8}{0{,}13}$ der Wert des Coeff. in einer Form erscheint, die in der Praxis nicht benutzt werden kann, so hat man $\frac{0{,}8}{0{,}13}a$ zunächst in $6{,}154\,a$ zu verwandeln. Daher ist der Coeff. $=6{,}154$, die Hauptgr. $=a$.

$= \frac{1}{2{,}09\,xy}$? Man denke sich

$$-\frac{1}{2{,}09}\cdot\frac{1}{xy} = -0{,}4785\cdot\frac{1}{xy} = -\frac{0{,}4785}{xy};$$

daher der Coeff. $= -0{,}4785$; die Hauptgr. $= \frac{1}{xy}$.

13. Die Zahlen eines zusammengesetzten Monom ordnet man stets so an, dafs

das Einfache dem Zusammengesetzten,
„ Specielle „ Allgemeinen,
„ Bekannte „ Unbekannten,
„ Rationale „ Irrationalen

vorausgeht. Die Buchstaben sind aufserdem (im allgemeinen) alphabetisch anzuordnen.

Daher: nicht $xa2$, sondern $2ax$:
„ cbx, „ bcx;
„ $2x(a+b)$, „ $2(a+b)x$;
„ $(a+2)3x$, „ $3(a+2)x$;
„ $(b-5)b$, „ $b(b-5)$;
„ $r^2\pi$, „ πr^2, wenn π die specielle Zahl 3,1416 bedeutet;
„ $\sqrt{3}\cdot 5$, „ $5\sqrt{3}$;
„ $\sqrt{a}\cdot b$, „ $b\sqrt{a}$;
„ na, „ an, wenn n jede nur mögliche Zahl vorstellt;
„ an. „ na, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, denn $2a$, $3a$, $4a$, allgemein na.

Soll $\sqrt{2}$ mit x multipliciert werden, so ist nicht $\sqrt{2}x$ zu setzen, weil dies leicht mit $\sqrt{2x}$ verwechselt werden könnte. Man schreibt entweder $\sqrt{2}\cdot x$ oder $x\sqrt{2}$.

$\frac{a-2b-3c+4d}{m}$ trennt man in folgender Weise: $\frac{a-2b}{m}$: $\overline{: -3c+4d}$

14. Anordnung der Glieder eines Polynom.

I. Während der Rechnung ordnet man die Glieder streng lexicographisch (wie die Wörter eines Wörterbuches) und nach ununterbrochen ab- oder aufsteigenden Potenzen der Hauptgröfse. Daher ist nicht $c+a-b$, sondern $a-b+c$ zu schreiben; nicht $b-a$, sondern $-a+b$; nicht $2ab-3b^2-5a^2$, sondern

$$-5a^2+2ab-3b^2 \text{ (denn } -5aa+2ab-3bb);$$

nicht $-7a^2 - \frac{a^4}{4} + \frac{5a}{3} + a^3$ (nach §. 15, 3 ist $\frac{5a}{3} = \frac{5a^1}{3}!$), sondern entweder:

$$-\frac{a^4}{4} + a^3 - 7a^2 + \frac{5a}{3}, \text{ oder: } \frac{5a}{3} - 7a^2 + a^3 - \frac{a^4}{4}.$$

Kommen in derselben Aufgabe (resp. Rechnung) mehrere Polynomien vor, so sind sie sämtlich nach einerlei Princip anzuordnen. Sind z. B. $a^2 - 3a^3 - 4a + 9a^4$ und $a^2 - 4a^3 + 2a$ gegeben, so sind entweder beide absteigend:

$$9a^4 - 3a^3 + a^2 - 4a \text{ und } -4a^3 + a^2 + 2a,$$

oder beide aufsteigend:

$$-4a + a^2 - 3a^3 + 9a^4 \text{ und } 2a + a^2 - 4a^3$$

anzuordnen.

Anmerkung. Da diese Regeln in einzelnen Fällen unzureichend sind, oder sogar eine falsche Anordnung herbeiführen, so giebt der Verfasser nachstehend ein auf die figurierten Zahlen (§. 95) gegründetes Verfahren, welches die Glieder eines Polynom stets absolut richtig anordnet.

Man setze die speciellen Zahlen (Coeff.) $= 0$, den 1. Buchstaben (dem Alphabete nach) $= 1$, den 2. Buchstaben $= 2$, den 3. $= 3$ u. s. w., und bilde in jedem Gliede aus der Multiplication der gegebenen speciellen und allgemeinen Zahlen eine Addition,
aus der Division eine Subtraktion,
„ dem Potenzieren „ Multiplication,
„ „ Radicieren „ Division
jener Zahlenwerte. Die Glieder des Polynom sind alsdann entweder ununterbrochen absteigend oder aufsteigend nach den gefundenen Gliederwerten anzuordnen.

Es sei z. B. $3\frac{1}{3} - \frac{ae}{4c} - \frac{2c^4}{5a^2e^3} + \frac{3e^3}{a^2c^4}$

anzuordnen. Diese Glieder haben die Werte:

$$0 \quad 2 \quad -3 \quad -1;$$

denn das 1. Glied hat als spec. Zahl den Wert 0;

das 2. Glied $(a \cdot e : 4 : c) = 1 + 3 - 0 - 2 = 2$;

„ 3. „ $\left(\frac{2}{5} \cdot c^4 : a^2 : e^3\right) = 0 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = -3$;

„ 4. „ $(3 \cdot e^3 : a^2 : c^4) = 0 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -1$.

Nach absteigenden Gliederwerten:

$$2 \quad 0 \quad -1 \quad -3 \text{ geordnet:}$$

$$-\frac{ae}{4c} + 3\frac{1}{3} + \frac{3e^3}{a^2c^4} - \frac{2c^4}{5a^2e^3}$$

oder nach aufsteigenden Werten:

$$-\frac{2c^4}{5a^2e^3}+\frac{3e^3}{a^2c^4}+3\tfrac{1}{3}-\frac{ae}{4c}.$$

Erhalten hierbei einige Glieder gleiche Werte, so sind diese für sich allein zu ordnen, indem man statt jener Zahlen

0, 1, 2, 3, 4, ...

die Zahlen 0, 1, 3, 6, 10, ... nimmt, und wenn auch hier gleiche Werte erscheinen:

0, 1, 4, 10, 20, ...,

hierauf 0, 1, 5, 15, 35, ... u. s. w.

Beispiel. Es sei $2a-\frac{d}{3a}+\frac{7bd}{2a^3}-\frac{b}{6ad}+\frac{5ab^2}{d}$ streng zu ordnen.

Mit $a=1$, $b=2$, $d=3$ erhält man:

$1,\ 3-1,\ 2+3-3\cdot1,\ 2-1-3,\ 1+2\cdot2-3$

oder $1,\quad 2,\quad 2,\quad -2,\quad 2.$

Das 2., 3. und letzte Glied des Polynom (mit den gleichen Gliederwerten 2) sind nun für sich mit $a=1$, $b=3$, $d=6$ anzuordnen:

$$\underset{5}{6-1},\ \underset{6}{3+6-3\cdot1},\qquad \underset{1}{1+2\cdot3-6}$$

Das gegebene Polynom absteigend nach den Gliederwerten

$$\underset{(6)}{2},\quad \underset{(5)}{2},\quad \underset{(1)}{2},\quad 1,\quad -2$$

geordnet:

$$\frac{7bd}{2a^3}-\frac{d}{3a}+\frac{5ab^2}{d}+2a-\frac{b}{6ad}.$$

II. Das Resultat einer Aufgabe ist nicht nach vorstehenden Regeln anzuordnen, sondern so, dafs es sich am leichtesten berechnen läfst.

So ist nicht $x=-a+b$, sondern $=b-a$;

„ $x=ac+ad+bc+bd$, sondern $=(a+b)(c+d)$;

„ $x=a^2+2ab+b^2$, sondern $=(a+b)^2$;

„ $x=\frac{a^2+b}{a}$, sondern $\left(=\frac{a^2}{a}+\frac{b}{a}=\frac{aa}{a}+\frac{b}{a}\right)$ $=a+\frac{b}{a}$ zu setzen; denn wäre hier $a=7{,}6589$, $b=4{,}9368$, so würde $\frac{7{,}6589\cdot7{,}6589+4{,}9368}{7{,}6589}$ weit mehr Arbeit erfordern, als

$$7{,}6589+\frac{4{,}9368}{7{,}6589}.$$

15. Die allgemein (mit allgemeinen Zahlen) berechneten Aufgaben enthalten jeden speciellen Fall derselben Gattung (s. oben das Beispiel im 2. Satz). Es ist daher das Substituieren specieller Zahlen an Stelle der allgemeinen von gröfster Wichtigkeit. Einige Beispiele mögen diese Substitution veranschaulichen.

I. Ist das mit $p\,\%$ in a Jahren angewachsene Kapital $=k$, so ist das ausgeliehene Kapital $c=\frac{100\,k}{100+ap}$.

Ist nun das in $4\frac{2}{3}$ Jahren zu $3\frac{3}{4}\,\%$ angewachsene Kapital $=3400$ *M.*, so hätte man in jener Formel $k=3400$, $a=4\frac{2}{3}$, $p=3\frac{3}{4}$ zu setzen und das ausgeliehene Kapital ist:

$$=\frac{100\cdot 3400}{100+\frac{14}{3}\cdot\frac{15}{4}}=\frac{100\cdot 3400}{100+\frac{35}{2}}\text{ (mit 2 erweitert)}$$

$$=\frac{100\cdot 3400\cdot 2}{200+35}=\frac{(100\cdot 3400\cdot 2):5}{(200+35):5}$$

$$=\frac{100\cdot 680\cdot 2}{40+7}=\frac{136000}{47}=2893{,}6\text{ M.}$$

II. Wie grofs ist $a-b-c+d+e$ für $a=-8$, $b=-13$, $c=+28$, $d=-5$ und $e=12$ (d. i. $+12$)?

Antwort: $(-8)-(-13)-(+28)+(-5)+(+12)$
$=-8+13-28-5+12=-16$.

III. Wie grofs ist $\frac{a-5}{a+5}$ für $a=-5$?

Antwort: $\frac{(-5)-5}{(-5)+5}=\frac{-5-5}{-5+5}=\frac{-10}{0}=-\frac{10}{0}$
$=-\infty$ (s. §. 18, 12, I).

IV.

M — A′ — B′ — N

A und B gehen gleichzeitig aus den Orten A' und B' fort. in der Richtung nach N. Die Entfernung der beiden Orte A' und B' beträgt a Meter. A legt in je b Min. c Meter, B in je d Min. e Meter zurück. Nach wie viel Minuten treffen sie sich?

Antwort: Nach $\frac{abd}{cd-be}$ Minuten.

1. specieller Fall. A geht von A', gleichzeitig B von B' fort, in der Richtung nach N. Die Entfernung beider Orte beträgt 110 Meter. A legt in je $3\frac{1}{2}$ Min. 235 Meter, B in je $2\frac{2}{3}$ Min. 161 Meter zurück. Nach wie viel Min. treffen sie sich?

Auflösung. Setzt man in jener Formel $a=110$, $b=3\frac{1}{2}$, $c=235$, $d=2\frac{2}{3}$, $e=161$, so findet man, dafs A den B nach

$$\frac{110 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3}}{235 \cdot 2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{2} \cdot 161} \text{ Min.}$$

trifft, d. i. (mit $2 \cdot 3$ erweitert):

$$= \frac{110 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\frac{2}{3} \cdot 3}{(235 \cdot 2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{2} \cdot 161) \cdot 6} = \frac{110 \cdot 7 \cdot 8}{235 \cdot 2\frac{2}{3} \cdot 6 - 3\frac{1}{2} \cdot 161 \cdot 6}$$

$$= \frac{110 \cdot 7 \cdot 8}{235 \cdot 16 - 21 \cdot 161} = \frac{110 \cdot 7 \cdot 8}{3760 - 3381}$$

$$= \frac{110 \cdot 7 \cdot 8}{379} = \frac{6160}{379} = 16{,}25 \text{ Min.}$$

2. specieller Fall. A bewege sich von A' aus nach N hin, B aber von B' aus nach M, also entgegengesetzt, folglich sind auch die e Meter negativ zu nehmen, denn ist die Bewegung des B von B' nach N hin positiv, so mufs sie (s. §. 51) von B' nach M hin negativ sein. A sei jetzt von B 273 Meter entfernt. Ferner bewege sich A in je $1\frac{3}{5}$ Min. $40\frac{1}{6}$ Meter, B in je $4\frac{1}{4}$ Min. 193 Meter. Nach wie viel Minuten treffen sie sich?

Hier ist $a = 273$, $b = 1\frac{3}{5}$, $c = 40\frac{1}{6}$, $d = 4\frac{1}{4}$, $e = -193$.

Sie treffen sich mithin (in einem zwischen A' und B' gelegenen Punkte) jener Formel zufolge nach

$$\frac{273 \cdot 1\frac{3}{5} \cdot 4\frac{1}{4}}{40\frac{1}{6} \cdot 4\frac{1}{4} - 1\frac{3}{5}(-193)} = \frac{273 \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{17}{4}}{\frac{241}{6} \cdot \frac{17}{4} + \frac{8}{5} \cdot 193}$$

(mit $5 \cdot 4 \cdot 6$ erweitert:)

$$= \frac{273 \cdot \frac{8}{5} \cdot 5 \cdot \frac{17}{4} \cdot 4 \cdot 6}{\frac{241}{6} \cdot \frac{17}{4} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 + \frac{8}{5} \cdot 193 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$= \frac{273 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 6}{241 \cdot 17 \cdot 5 + 8 \cdot 193 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{273 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 6}{20485 + 37056}$$

$$= \frac{222768}{57541} = 3{,}87147 \text{ Min.}$$

3. specieller Fall. A und B sind schon seit etlichen Stunden in Bewegung und zwar in der Richtung nach N. In diesem Augenblicke (Mittags 12 Uhr) befinden sie sich in A' und B', welche Orte $833\frac{1}{3}$ Meter von einander entfernt sind. A gehe in je $7\frac{1}{2}$ Min. $486\frac{2}{3}$ Meter, B in je $3\frac{1}{5}$ Min. 224 Meter. Nach wie viel Minuten treffen sie sich?

Hier ist $a = 833\frac{1}{3}$, $b = 7\frac{1}{2}$, $c = 486\frac{2}{3}$, $d = 3\frac{1}{5}$, $e = 224$.

Folglich treffen sie sich nach

$$\frac{833\frac{1}{3}\cdot 7\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{5}}{486\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{5}-7\frac{1}{2}\cdot 224}=\frac{833\frac{1}{3}\cdot 7\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{5}\cdot 3\cdot 2\cdot 5}{486\frac{2}{3}\cdot 3\frac{1}{5}\cdot 3\cdot 2\cdot 5-7\frac{1}{2}\cdot 224\cdot 3\cdot 2\cdot 5}$$

$$=\frac{2500\cdot 15\cdot 16}{1460\cdot 16\cdot 2-15\cdot 224\cdot 3\cdot 5}\text{ (durch } 5\cdot 16\cdot 2 \text{ gekürzt:)}$$

$$=\frac{1250\cdot 3}{292-15\cdot 7\cdot 3}=\frac{3750}{292-315}=\frac{3750}{-23}=-\frac{3750}{23}$$

$$=-163\tfrac{1}{23}\text{ Min.}$$

In §. 51, 1, i wurde gezeigt, dafs $-163\frac{1}{23}$ Min. nach 12 Uhr so viel ist als $163\frac{1}{23}$ Min. vor 12 Uhr. Folglich trafen sie sich 9 Uhr $16\frac{22}{23}$ Min. Vormittags.

§. 53. Addition mit allgemeinen Zahlen.

1. Formelle Addition.

a um b vermehrt $=a+b$.

a um $-c$ vermehrt $=a+(-c)=a-c$.

Hieraus folgt, dafs die Glieder ganz wie in der Addition mit entgegengesetzten Zahlen (s. §. 51) mit ihren Zeichen neben einander gestellt werden.

Um daher $-a, b, -c, -d$ zu addieren, kann man sogleich $-a+b-c-d=b-a-c-d$ (s. §. 52, 14, II) setzen.

m um $-p+(n-q)$ vermehrt $=m-p+(n-q)$
$=m-p+n-q$ (s. §. 9, 10, A) $=m+n-p-q$.

$a+b+(-c-d)=a+b-c-d$; denn der gegebene Ausdruck hat die Bedeutung $a+b$ vermehrt um $-c-d$ und dies ist nach §. 51 jenes Resultat.

$-x$ um $-u+y-v$ vermehrt $=-x-u+y-v$. Man schreibt also nicht erst $-x+(-u+y-v)$.

Aufgabe. A besitzt x Mark, B: $\frac{a}{2}$ *M.* mehr, C: $-\frac{b}{3}-\frac{x}{4}$ *M.* mehr als B. Wie viel besitzen alle drei zusammen?

Auflösung. B besitzt $x+\frac{a}{2}$ *M.*, folglich C: $x+\frac{a}{2}-\frac{b}{3}$ $-\frac{x}{4}$ *M.* Daher alle drei zusammen:

$$x+x+\frac{a}{2}+x+\frac{a}{2}-\frac{b}{3}-\frac{x}{4}\text{ M.}$$

2. Materielle Addition. (Bestimmung der von der Praxis verlangten Summe.)

I. $4a+3a=a+a+a+a+a+a+a$ (s. §. 10, 2) $=7a$ (s. §. 10, 1). Man könnte auch rechnen: $4a+3a=(4+3)a$

(s. §. 11, 6) $= 7\,a$. Um also gleichartige Glieder zu addieren, addiert man ihre Coefficienten und multipliciert die erhaltene Summe mit der Hauptgröfse.

Man sagt auch: $4\,a + 3\,a$ ist in ein Glied $(7\,a)$ „zusammengezogen“ worden.

$xy + 7\,xy + 9\,xy + 11\,xy$? Man denke sich: $1 \cdot xy + 7\,xy \ldots\ldots$ (s. §. 11, 2). Da nun die Summe der Coeff. $= 1 + 7 + 9 + 11 = 28$, die Hauptgröfse $= xy$, so ist das gesuchte Resultat

$$= 28 \cdot xy = 28\,xy.$$

II. $a - b$ stellt man sich im allgemeinen als Differenz vor (a vermindert um b), man kann dieses Binom aber auch, wie im 1. Satze gezeigt wurde, als Summe von a und $-b$ auffassen.

Eben so kann $7\,a - 3\,a$ als Summe von $7\,a$ und $-3\,a$ gelten und man findet übereinstimmend mit I:

$$7\,a - 3\,a = (7 - 3)\,a \text{ [s. §. 11, 7] } = 4\,a.$$

Die in I gegebene Regel, dafs man

gleichartige Glieder addiert, indem man die Summe der Coefficienten mit der Hauptgröfse multipliciert,

gilt mithin ganz allgemein für positive und negative Coefficienten.

Dasselbe Resultat würde man auch in folgender Weise erhalten:

$$a + a + a + a + a + a + a - (a + a + a)$$
$$= a + a + a + a + a + a + a - a - a - a$$

(und weil sich nach §. 9, 7 : $a - a$ hebt) $= a + a + a + a = 4\,a$.

Anmerkung. Es kann nicht auffällig erscheinen, dafs hier in der Addition schon Subtraktionssätze in Anwendung kommen, da sogar Multiplicationssätze (§. 10, 2 und §. 10, 1) unentbehrlich sind.

2. Beispiel. $3\,a - 5\,a$? Die Summe der Coeff. $3 - 5 = -2$ mit der Hauptgröfse a multipliciert giebt die verlangte Summe

$$= -2 \cdot a = -2\,a. \quad \text{Oder:}$$

$$a + a + a - (a + a + a + a + a)$$
$$= a + a + a - a - a - a - a - a = -a - a$$

und dies ist entweder nach §. 9, 17: $= -(a + a) = -2\,a$, oder nach §. 51: $= (-a) + (-a) = 2 \cdot (-a) = -2\,a$.

3. Beispiel. $-a + a$? Entweder unmittelbar nach §. 9, 6, II und §. 18, 8, II : $+a - a = a - a = 0$, oder als

$$-1 \cdot a + 1 \cdot a = (-1 + 1)\,a = 0 \cdot a = 0 \text{ (§. 18, 6).}$$

4. Beispiel. $4\,ab^2 - 11\,ab^2 - ab^2$? Die Summe der Coeff. $4 - 11 - 1 = -8$ mit der Hauptgröfse ab^2 (d. i. abb) multipliciert giebt das verlangte Resultat: $-8\,a\,b^2$.

5. Beispiel. $6\,x - 9\,x - 28\,x + 37\,x - x + 5\,x$? Die Summe der Coeff. $6 - 9 - 28 + 37 - 1 + 5 = 10$ mit der Hauptgr. x multipliciert $= 10\,x$.

6. Beispiel. $\frac{5\,ab}{3} - 4\,ab$? Die Summe der Coeff.

$$\frac{5}{3} - 4 = -2\tfrac{1}{3} = -\frac{7}{3} \text{ mit } ab \text{ multipliciert}$$

$$= -\frac{7}{3} \cdot ab = -\frac{7\,ab}{3}.$$

7. Beispiel. $\frac{2}{mn} - \frac{1}{3\,mn} - \frac{11}{4\,mn}$? Die Summe der Coeff.

$$2 - \frac{1}{3} - \frac{11}{4} = -\frac{13}{12} \text{ mit der Hauptgr. } \frac{1}{mn}$$

multipliciert $= -\frac{13}{12} \cdot \frac{1}{mn} = -\frac{13}{12\,mn}$.

8. Beispiel. $\frac{a}{3\,b} - \frac{5\,a}{b} + \frac{19\,a}{2\,b}$? Hier ist

$\frac{1}{3} - 5 + \frac{19}{2} = \frac{29}{6}$ mit $\frac{a}{b}$ zu multiplicieren, daher $= \frac{29\,a}{6\,b}$.

9. Beispiel.

$\frac{7}{x} - \frac{11}{x} = -\frac{4}{x}$; denn $7 - 11$ mit $\frac{1}{x}$ multipliciert.

10. Beispiel. $y^2 - \frac{y^2}{4}$? Man denke sich $1 \cdot y^2 - \frac{1}{4} \cdot y^2$.

Daher $1 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ mit y^2 multipliciert $= -\frac{3\,y^2}{4}$.

11. Beispiel. $3\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$? Wie bei $3\,a - 7\,a = -4\,a$ erhält man hier $-4\sqrt{2}$.

12. Beispiel. $\sqrt{x-a} - \frac{\sqrt{x-a}}{2}$? Wie in $w - \frac{w}{2}$ ist auch hier die Summe der Coeff. $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und die Hauptgr. $\sqrt{x-a}$, folglich erhält man:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x-a} = \frac{1\sqrt{x-a}}{2} = \frac{\sqrt{x-a}}{2}.$$

13. Beispiel. $\frac{5}{6\sqrt{3}} - \frac{7}{8\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$? Als

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

hat man $\frac{5}{6} - \frac{7}{8} - 1$ mit $\frac{1}{\sqrt{3}}$ zu multiplicieren, daher

$$= -\frac{25}{24} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{25}{24\sqrt{3}}.$$

14. Beispiel. $7(a+3b) - 8(a+3b)$? Man gewöhne sich, zusammengesetzte Ausdrücke wie Monomien aufzufassen, daher erhält man hier (wie bei $7m - 8m = -1 \cdot m = -m$):

$$-1 \cdot (a+3b) = -(a+3b) = -a - 3b \text{ (s. §. 9, 16).}$$

15. Beispiel. $9a + 13b - 10(9a + 13b)$
$= 1 \cdot (9a + 13b) - 10(9a + 13b) = -9(9a + 13b)$.

III. Sind die zu addierenden Glieder ungleichartig, so können sie selbstverständlich nicht in ein Glied zusammengezogen werden und es kann dann nur Satz 1 in Anwendung kommen.

Die nachstehenden 5 Ausdrücke z. B. müssen unverändert stehen bleiben:

$a + b$.

$3abc + 2abd$; denn $abc + abc + abc + abd + abd$ ist weder $5abc$ noch $5abd$.

$2a + 3a^2$; denn $2a + 3aa = a + a + aa + aa + aa$ ist weder $5a$ noch $5aa$.

$4a + \frac{3}{a}$; denn $4 \cdot a + 3 \cdot \frac{1}{a} = a + a + a + a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$ ist weder $7 \cdot a$ noch $7 \cdot \frac{1}{a} \left(= \frac{7}{a}\right)$.

$4 + 3x$; denn $1 + 1 + 1 + 1 + x + x + x$! Nicht zu verwechseln mit $(4+3)x = 7x$ oder mit $4x + 3x = 7x$.

Enthält daher ein Ausdruck verschiedenartige Glieder, so können nur die unter denselben vorkommenden gleichartigen für sich vereinigt werden.

1. Beispiel.

$$7a - 13b + 3a + 12b = 7a + 3a - 13b + 12b = 10a - b.$$

2. Beispiel. $\frac{11a}{2} - \frac{9}{ab} + \frac{c^3}{4} - \frac{15}{2ab} - \frac{a}{3} - c^3$?

Stellt man die gleichartigen Glieder zusammen, so erhält man:

$$\frac{11a}{2} - \frac{a}{3} - \frac{9}{ab} - \frac{15}{2ab} + \frac{c^3}{4} - c^3.$$

Für die Hauptgröfse a: $\frac{11}{2} - \frac{1}{3} = \frac{31}{6}$, daher das gesuchte Glied $\frac{31a}{6}$;

für $\frac{1}{ab}$: $-9-\frac{15}{2}=-\frac{33}{2}$, daher das gesuchte Glied

$$=-\frac{33}{2}\cdot\frac{1}{ab}=-\frac{33}{2ab};$$

für c^3: $\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$, das gesuchte Glied

$$=-\frac{3}{4}c^3=-\frac{3c^3}{4}.$$

Folglich ist die gesuchte Summe $=\frac{31a}{6}-\frac{33}{2ab}-\frac{3c^3}{4}$.

3. Beispiel.

$$\frac{5}{2x}-x^2-3x+\frac{7x^2}{5}-\frac{1}{x^2}-\frac{11}{8x}+\frac{19x}{4}-\frac{3x^2}{7}?$$

Für $\frac{1}{x}$: $\frac{5}{2}-\frac{11}{8}=\frac{9}{8}$, daher das Glied $\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{x}=\frac{9}{8x}$;

für x^2: $-1+\frac{7}{5}-\frac{3}{7}=-\frac{1}{35}$, daher $-\frac{1}{35}\cdot x^2$

$$=-\frac{1\cdot x^2}{35}=-\frac{x^2}{35};$$

für x: $-3+\frac{19}{4}=\frac{7}{4}$; daher $\frac{7}{4}x=\frac{7x}{4}$.

Das Glied $-\frac{1}{x^2}$ ist ungleichartig mit den übrigen.

Daher die Summe $\frac{9}{8x}-\frac{x^2}{35}+\frac{7x}{4}-\frac{1}{x^2}$.

4. Beispiel. N besitzt $\frac{a}{2b}+\frac{4}{3ab}-1\frac{1}{3}$, bekommt von

$$A: \frac{a}{b}-2\tfrac{1}{2}-\frac{1}{ab}, \text{ von } B: -\frac{1}{4ab}+5-\frac{11a}{6b}.$$

Es besitzt nun N: $\frac{a}{2b}+\frac{4}{3ab}-1\frac{1}{3}+\frac{a}{b}-2\frac{1}{2}-\frac{1}{ab}$

$$-\frac{1}{4ab}+5-\frac{11a}{6b} \text{ (s. 1. Satz).}$$

Für $\frac{a}{b}$ hat man $\frac{1}{2}+1-\frac{11}{6}=-\frac{1}{3}$, daher

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{b}=-\frac{a}{3b};$$

für $\frac{1}{ab}$: $\frac{4}{3} - 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, daher $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{ab} = \frac{1}{12ab}$.

für 1 (Glieder ohne allgemeine Zahlen): $-1\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2} + 5 = 1\frac{1}{6}$.

Die gesuchte Summe ist daher $= -\frac{a}{3b} + \frac{1}{12ab} + 1\frac{1}{6}$

$$= \frac{1}{12ab} + 1\frac{1}{6} - \frac{a}{3b}.$$

IV. Zuweilen addiert man unter einander stehende Ausdrücke, indem man die Summe unmittelbar unter dieselben setzt, anstatt jene Ausdrücke zuvor neben einander zu stellen. Hierbei addiert man immer zuerst die senkrecht unter einander stehenden Glieder.

1. Beispiel.
$$\begin{array}{r} a + 4c \\ b - 7c \\ \hline \text{Summe} = a + b - 3c. \end{array}$$

2. Beispiel.
$$\begin{array}{r} 1 + x \\ -a + 3x \\ \hline \text{Summe} = 1 - a + 4x. \end{array}$$

Von Vorteil ist diese Addition, wenn schon im gegebenen Ausdrucke gleichartige Glieder unter einander stehen.

3. Beispiel.
$$\begin{array}{rrrrr} a + 3b & -4c & & -d \\ -7a + b & +5c & & +9d \\ 11a - 5b & & -c^2 & -6d \\ \hline = 5a - b & + c & - c^2 & + 2d. \end{array}$$

c und c^2 konnten als ungleichartige Glieder nicht vereinigt werden.

Um diese Form bequemer benutzen zu können, sind oft erst die gleichartigen Glieder zusammenzustellen. Das 1. Beispiel in III ist alsdann zu rechnen:

$$\begin{array}{rrr} \frac{a}{2b} & + \frac{4}{3ab} & - 1\frac{1}{3} \\ + \frac{a}{b} & - \frac{1}{ab} & - 2\frac{1}{2} \\ - \frac{11a}{6b} & - \frac{1}{4ab} & + 5 \\ \hline = - \frac{a}{3b} & + \frac{1}{12ab} & + 1\frac{1}{6}. \end{array}$$

§. 54. Subtraktion mit allgemeinen Zahlen.

1. Die Subtraktion tritt wie bei den entgegengesetzten Gröfsen (§. 51) nur mit dem Subtraktionszeichen auf, so dafs die Glieder des Subtrahend ihre besondern Vorzeichen haben. In der Regel ist daher der Subtrahend ein Polynom, welches in Parenthese zu stellen ist,

die man nach den bekannten Regeln (§. 9, 16 u. 18; §. 51, 3) auflöst, um aus der Aufgabe eine Additionsaufgabe zu bilden.

1. Beispiel. a um $b - 2c$ vermindert $= a - (b - 2c)$
$= a - b + 2c$.

2. Beispiel. $3a - 11b - 7$ von $2a - 7b$ subtrahiert
$= 2a - 7b - (3a - 11b - 7) = 2a - 7b - 3a + 11b + 7$
$= 7 - a + 4b$.

3. Beispiel. -1 vermindert um $-x - y$
$= -1 - (-x - y) = -1 + x + y = x + y - 1$.

4. Beispiel. Von $5a$ soll $3b$ abgezogen werden.

Man setzt unmittelbar $5a - 3b$ (d. i. $5a$ vermindert um $3b$), also nicht erst „$5a$ vermindert um $+3b$"
$= 5a - (+3b) = 5a - 3b$.

5. Beispiel: $5a$ um $-3b$ vermindert
$= 5a - (-3b) = 5a + 3b$.

6. Beispiel. $8(7a - 19b)$ vermindert um $9(7a - 19b)$?

Man denke sich $7a - 19b$ als Monom, die Aufgabe also eben so wie $8m - 9m$. Folglich erhält man:
$8(7a - 19b) - 9(7a - 19b) = -1(7a - 19b) = -(7a - 19b)$
$= -7a + 19b = 19b - 7a$ (Vergl. §. 53, II, 14. u. 15. Beisp.)

7. Beispiel. $11(x + y)$ um $-5(x + y)$ vermindert
$= 11(x + y) - [-5(x + y)] = 11(x + y) + 5(x + y)$
$= 16(x + y)$.

8. Beispiel. $a + 2b$ soll zuerst um $3a + 4b$, dann um $5a - b$ vermindert werden.

Wie man 13 um 5 und um 2 vermindern kann, indem man entweder die Subtrahenden einzeln abzieht
$[13 - 5 - 2 = (13 - 5) - 2 = 8 - 2]$
oder die abzuziehenden Zahlen zunächst addiert, um alsdann die Summe vom Minuend abzuziehen $[13 - 5 - 2 = 13 - (5 + 2)]$, so kann man auch hier in zweierlei Weise verfahren:

α. $a + 2b - (3a + 4b) - (5a - b)$
$= a + 2b - 3a - 4b - 5a + b = -7a - b$, wofür auch $-(7a + b)$ geschrieben werden kann (s. §. 9, 7).

β. Zunächst $3a + 4b$ und $5a - b$ addiert
$= 3a + 4b + 5a - b = 8a + 3b$
und diese Summe von $a + 2b$ subtrahiert
$= a + 2b - (8a + 3b) = a + 2b - 8a - 3b$
$= -7a - b$ (wie in α).

Das 1. Verfahren ist in der Regel vorzuziehen.

9. Beispiel. A besitzt $2a - \frac{x}{3} - \frac{1}{5x}$ *M.*, bekommt von N $-3a + x - \frac{3}{x}$ *M.* und giebt alsdann dem P:

$$6a - \frac{7x}{8} + \frac{7}{15x} \text{ M.}$$

Wie viel hat nun A?

Da die Summe des N zu addieren, die des P zu subtrahieren ist, so erhält man:

$$2a - \frac{x}{3} - \frac{1}{5x} - 3a + x - \frac{3}{x} - \left(6a - \frac{7x}{8} + \frac{7}{15x}\right)$$

$$= 2a - \frac{x}{3} - \frac{1}{5x} - 3a + x - \frac{3}{x} - 6a + \frac{7x}{8} - \frac{7}{15x}$$

$$= -7a + \frac{37x}{24} - \frac{11}{3x}.$$ (Denn für x: $-\frac{1}{3} + 1 + \frac{7}{8} = \frac{37}{24}$, für $\frac{1}{x}$: $-\frac{1}{5} - 3 - \frac{7}{15} = -3\frac{2}{3}$.)

10. Beispiel. S besitzt $2 - \frac{3b}{2} + \frac{bc}{4}$, giebt zuerst dem D $3\frac{1}{3} - b + 2bc$, dann dem E $-4 + \frac{b}{3} - \frac{1}{bc}$.

S hat nun

$$2 - \frac{3b}{2} + \frac{bc}{4} - (3\tfrac{1}{3} - b + 2bc) - \left(-4 + \frac{b}{3} - \frac{1}{bc}\right)$$

$$= 2 - \frac{3b}{2} + \frac{bc}{4} - 3\tfrac{1}{3} + b - 2bc + 4 - \frac{b}{3} + \frac{1}{bc}$$

$$= 2\tfrac{2}{3} - \frac{5b}{6} - \frac{7bc}{4} + \frac{1}{bc}.$$

11. Beispiel. Es sei $1 - a - 9b$ zuerst um $5a - 3b - 4$, dann um $-7a - 2b + 3 - (2a - 5b - 14)$ zu vermindern.

Da hier der ganze Ausdruck „$-7a \ldots\ldots -14)$" zu subtrahieren ist, so hat man denselben auch für sich allein in Parenthese zu stellen. Man wählt hierzu die eckige (oder Haken-) Parenthese, um den Umfang der verschiedenen Parenthesen besser kenntlich zu machen. Daher:

$$1 - a - 9b - (5a - 3b - 4) - [-7a - 2b + 3 - (2a - 5b - 14)].$$

Im allgemeinen ist es praktischer, die Parenthesen von innen heraus aufzulösen:

$$= 1 - a - 9b - 5a + 3b + 4 - [-7a - 2b + 3 - 2a + 5b + 14]$$
$$= 1 - a - 9b - 5a + 3b + 4 + 7a + 2b - 3 + 2a - 5b - 14$$
$$= 3a - 9b - 12.$$

2. Die vielgliedrigen Minuenden und Subtrahenden stehen zuweilen unter einander (vergl. §. 53, IV).

Alsdann hat man die Glieder des Subtrahend (der untern Zeile) in die entgegengesetzten zu verwandeln und beide Polynomien zu addieren.

1. Beispiel.
$$\left.\begin{array}{r} a+2b-3c \\ +4a+6b-8c \end{array}\right\}\text{Subtr.}$$

Man denke sich:
$$\left.\begin{array}{r} a+2b-3c \\ -4a-6b+8c \end{array}\right\}\text{Addit.}$$
$$=-3a-4b+5c.$$

Beweis. Es soll hier $a+2b-3c$ um $+4a+6b-8c$ vermindert werden. Folglich:

$a+2b-3c-(+4a+6b-8c)=a+2b-3c-4a-6b+8c$

Anstatt also $+4a$ und $-8c$ zu subtrahieren, addiert man $-4a$ und $+8c$. (Vergl. §. 51, 3, b, 1. Zus.)

2. Beispiel.
$$\left.\begin{array}{l} \frac{5a}{2}-\frac{3}{5a}+\frac{2b}{15}-\frac{1}{4c}+\frac{3d}{2} \\ -a+\frac{1}{2a}-b+\frac{2}{3c^2}-\frac{1}{d} \end{array}\right\}\text{Subtr.}$$

Schreibe sogleich:
$$=\frac{7a}{2}-\frac{11}{10a}+\frac{17b}{15}-\frac{1}{4c}-\frac{2}{3c^2}+\frac{3d}{2}+\frac{1}{d},$$

ohne erst die Zeichen des Subtrahend zu ändern.

Die Addition
$$\begin{array}{l} \frac{5a}{2}-\frac{3}{5a}+\frac{2b}{15}-\frac{1}{4c}+\frac{3d}{2} \\ +a-\frac{1}{2a}+b-\frac{2}{3c^2}+\frac{1}{d} \end{array}$$

hat man sich also nur zu denken!

Multiplication, Division und Potenzieren mit Monomien (§. 55—57).

§. 55. Multiplication eines Monom mit einem Monom.

1. 1. Beispiel. Um das Monom $3a$ mit dem Monom 4 zu multiplicieren, kann man nach §. 11, 8 entweder

$$(3a)\cdot 4=3\cdot a\cdot 4=3\cdot 4\cdot a=12a$$

rechnen, oder, da $3a$ ein mit 4 zu multiplicierendes Produkt ist,

einen der Faktoren (hier natürlich 3) mit 4 multiplicieren und man erhält direkt dasselbe Resultat $12a$.

2. Beispiel. Das Monom $2a$ mit dem Monom $5b$ multipliciert $= 2a \cdot 5b = 2 \cdot a \cdot 5 \cdot b = 2 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 10ab$.

3. Beispiel. Soll $7a$ mit $-4ab$, d. i. $+7a \cdot -4ab$ multipliciert werden, so berechnet man zuerst das Zeichen: $+ \cdot - = -$, und verbindet dieses Minuszeichen mit dem Produkte $7a \cdot 4ab = 28aab$. (Vergl. $+7 \cdot -4 = -28$).

Das gesuchte Produkt ist also $= -28aab = -28a^2b$.

4. Beispiel. $-3ab \cdot -8bc = +3ab \cdot 8bc = +24abbc$
$= 24ab^2c$.

5. Beispiel. $-5x \cdot +20 = -5x \cdot 20 = -100x$.

6. Beispiel. $2(a-b) \cdot -5(b+c)$? Man denke sich $a-b$ und $b+c$ als Monomien, die Aufgabe also wie

$$2m \cdot -5n = -10mn.$$

Folglich erhält man $-10(a-b)(b+c)$.

7. Beispiel. $a+b$ mit $c-d$ und mit -7 multipliciert
$= (a+b) \cdot (c-d) \cdot (-7) = -7(a+b)(c-d)$.

8. Beispiel. $-a$ soll um das 3fache von $-2a$, d. i. $-a$ um $3 \cdot (-2a)$ vermindert werden. Man erhält:

$$-a - [3 \cdot (-2a)] = -a - (-6a) = -a + 6a = 5a.$$

Zusatz. Bezeichnet
n eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... (s. §. 52, 6), so ist
$2n$ „ „ „ 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., daher
$2n+1$ „ „ „ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

Mithin bezeichnet $2n$ (oder $2n+2$, $2n+4$, ..., $2n-2$, $2n-4$, ...) eine gerade, $2n+1$ ($2n+3$, $2n-1$, $2n-3$) eine ungerade Zahl. (Vergl. §. 23, 2 und 3).

2. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$, $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$ (s. §. 13, 19).

$$\frac{2a}{3b} \cdot 5bc = \frac{2a \cdot 5bc}{3b} = \frac{2a \cdot 5c}{3} \text{ (s. §. 13, 14)} = \frac{10ac}{3}.$$

$$\frac{3}{8} \cdot -12x = -\frac{3}{8} \cdot 12x \text{ (s. 1. Satz, 3. Beisp.)} = -\frac{3 \cdot 12x}{8}$$

$$= -\frac{3 \cdot 3x}{2} = -\frac{9x}{2}.$$

$$-15ab \cdot 1\tfrac{1}{10} = -15ab \cdot \frac{11}{10} = -\frac{15ab \cdot 11}{10} = -\frac{3ab \cdot 11}{2}$$

$$= -\frac{33ab}{2}.$$

$$-a \cdot -\frac{2}{ab} = +a \cdot \frac{2}{ab} = \frac{a \cdot 2}{ab} = \frac{2}{b}.$$

$$\frac{1-a}{2-3b} \cdot 5 = \frac{(1-a) \cdot 5}{2-3b} \text{ (s. §. 10, 3, IV)}$$

$$= \frac{5(1-a)}{2-3b} \text{ (s. §. 52, 13).}$$

$$\frac{2}{3}(a-b) = \frac{2(a-b)}{3}.$$

$$\frac{1}{8}(x+y-z) = \frac{1 \cdot (x+y-z)}{8} = \frac{x+y-z}{8}.$$

Mithin kann man auch umgekehrt

statt $\frac{x+y-z}{8}$: $\frac{1}{8}(x+y-z)$,

" $\frac{a-b}{n}$: $\frac{1}{n}(a-b)$ schreiben.

Zusatz. $\frac{a}{b} \cdot b = a$, $a \cdot \frac{b}{a} = b$ (s. §. 13, 10).

$$\frac{x-y}{x+z} \cdot (x+z) = x-y.$$

$$-(a-b) \cdot \frac{m+n}{a-b} = -(a-b) \cdot \frac{(m+n)}{(a-b)} = -(m+n)$$

$$= -m-n.$$

(Vergl. §. 13, 6, 2. Beisp. und §. 13, 10, letztes Beisp. und 1. Anm.)

$$-\frac{a-b}{a+b} \cdot (a+b) = -(a-b) = -a+b = b-a.$$

$$-\frac{a+1}{b-2} \cdot -(b-2) = +\frac{a+1}{b-2} \cdot (b-2) = a+1.$$

$$\frac{3-a}{2} \cdot (-2) = -2 \cdot \frac{3-a}{2} = -(3-a) = -3+a = a-3.$$

$$a-b \cdot \frac{c+d}{b} = a-(c+d) = a-c-d.$$

$$2a-3b-4c-\frac{5a-4b+c}{x+y} \cdot (x+y)$$

$$= 2a-3b-4c-(5a-4b+c)$$

$$= 2a-3b-4c-5a+4b-c = b-3a-5c.$$

$$\frac{3(5x-4)}{7(2x+3)} \text{ mult. mit } 2x+3 = \frac{3(5x-4)(2x+3)}{7(2x+3)}$$

$$= \frac{3(5x-4)}{7}.$$

$4 \cdot \frac{a-b}{7}$ mit 7 multipl. $= 4(a-b)$ (s. §. 11, 8!).

$\frac{a-b}{3} \cdot \frac{c-d}{3}$ mit 3 multipl. entweder $= (a-b) \cdot \frac{c-d}{3}$

oder $= \frac{a-b}{3} \cdot (c-d)$.

Folglich in beiden Fällen $= \frac{(a-b)(c-d)}{3}$.

$3 \cdot \frac{5a}{6} \cdot \frac{7b}{8}$ mit 48 multipl. $= 3 \cdot \frac{5a}{6} \cdot 6 \cdot \frac{7b}{8} \cdot 8 = 3 \cdot 5a \cdot 7b$

$= 105\,ab$.

$3\frac{1}{3} \cdot \frac{4x}{5}$ mit 30 multipl. $= 3\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{4x}{5} \cdot 5 = 20 \cdot 4x = 80\,x$.

3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (s. §. 13, 26).

$\frac{5x}{6} \cdot \frac{9}{8ax} = \frac{5x \cdot 9}{6 \cdot 8ax}$ (9 mit 6, x mit x gekürzt) $= \frac{15}{16a}$.
(Siehe §. 13, 14).

$-\frac{2}{9ax} \cdot \frac{3a}{4x} = -\frac{2 \cdot 3a}{9ax \cdot 4x}$ (2 mit 4, 3 mit 9, a mit a gekürzt)

$= -\frac{1}{3x \cdot 2x} = -\frac{1}{6x^2}$.

$-\frac{4}{15x} \cdot -4\frac{1}{6} = +\frac{4}{15x} \cdot \frac{25}{6} = \frac{4 \cdot 25}{15x \cdot 6} = \frac{2 \cdot 5}{3x \cdot 3} = \frac{10}{9x}$.

$1\frac{1}{3} \cdot \frac{a-b}{c+d} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a-b}{c+d} = \frac{4(a-b)}{3(c+d)}$.

Das $\frac{2}{3n}$ fache von $\frac{(a-b)n}{10}$ ist $\frac{2}{3n} \cdot \frac{(a-b)n}{10}$ [2 mit 10 und n mit n gekürzt] $= \frac{1}{3} \cdot \frac{a-b}{5} = \frac{1(a-b)}{15} = \frac{a-b}{15}$.

Aufgabe. A hat $\frac{x}{3}$, B $1\frac{1}{5}$ mal so viel als A, C $1\frac{3}{4}$ mal so viel als B, D $4\frac{1}{2} - x$ mehr als C. Wie viel hat D?

Auflösung. B hat $\frac{x}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{2x}{5}$; C hat $\frac{2x}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7x}{10}$; D hat $\frac{7x}{10} + 4\frac{1}{2} - x = 4\frac{1}{2} - \frac{3x}{10}$.

§. 56. Division eines Monom durch ein Monom.

1. $a : b = \frac{a}{b}$. (Siehe §. 12. 3, Anmerk.)

$3x$ durch $4x$ dividiert $= \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$.

$4ab : 6ac = \frac{4ab}{6ac}$ (durch 2 und a gekürzt) $= \frac{2b}{3c}$.

$5x : -10ax$? Zuerst $+ : - = -$, dann $5x : 10ax = \frac{5x}{10ax}$,

daher $= -\frac{5x}{10ax} = -\frac{1}{2a}$.

$a : (b - c) = \frac{a}{b - c}$.

$-a : (x + y)$? Zuerst $- : +$, dann $a : (x + y)$,

daher $= -\frac{a}{x + y}$.

$1 : -(x - y) = -\frac{1}{x - y}$.

$6(a + d) : 12b = \frac{6(a + d)}{12b} = \frac{a + d}{2b}$.

$(x + 1) : -3xy = -\frac{x + 1}{3xy}$.

$3(a + b) : 6a(a + b) = \frac{3(a + b)}{6a(a + b)} = \frac{1}{2a}$.

1. Zusatz. $a : a = 1$ (s. §. 13, 8).

$(x - y) : (x - y) = \frac{x - y}{x - y} = 1$.

$(a + 2b) : -(a + 2b) = -\frac{a + 2b}{a + 2b} = -1$.

2. Zusatz.

Die reciproke Zahl von a ist $1 : a = \frac{1}{a}$.

Daher die „ „ „ $-2ab = 1 : -2ab = -\frac{1}{2ab}$.

„ „ „ „ „ $3a - 4b = 1 : (3a - 4b) = \frac{1}{3a - 4b}$.

2. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$ (s. §. 13, 24).

$$\frac{5x}{6} : 40x = \frac{5x}{6 \cdot 40x} = \frac{1}{6 \cdot 8} = \frac{1}{48}.$$

$$-4\tfrac{4}{5} : -20ab = +\frac{24}{5} : 20ab = \frac{24}{5 \cdot 20ab} = \frac{6}{5 \cdot 5ab}$$
$$= \frac{6}{25ab}.$$

$$\frac{18a}{5} : 6(b-c) = \frac{18a}{5 \cdot 6(b-c)} = \frac{3a}{5(b-c)}.$$

$$-\frac{9}{x} : 6x = -\frac{9}{x \cdot 6x} = -\frac{3}{2x^2}.$$

3. $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$ (s. §. 13, 28, III, 1. Zus.).

$\frac{3a}{14} : \frac{9a}{8b} = \frac{3a}{14} \cdot \frac{8b}{9a}$ (3 mit 9, 8 mit 14, a mit a gekürzt)
$$= \frac{4b}{21}.$$

$1 : -\frac{x}{5} = -1 : \frac{x}{5}$ (stets das Zeichen zuerst berechnet!)
$$= -1 \cdot \frac{5}{x} = -\frac{5}{x}.$$

$$-5\tfrac{5}{6} : -\frac{2x}{15a} = +\frac{35}{6} \cdot \frac{15a}{2x} = \frac{175a}{4x}.$$

$$-a : \frac{a}{10} = -a \cdot \frac{10}{a} = -10.$$

Wie grofs ist der $4\frac{1}{2}$te Teil von $\frac{15x}{16}$?

$$= \frac{15x}{16} : 4\tfrac{1}{2} = \frac{15x}{16} \cdot \frac{2}{9} = \frac{5x}{24}.$$

$\frac{5ab}{2}$ um seinen $\frac{a}{b}$ten Teil vermindert, d. i. $\frac{5ab}{2}$ vermindert um $\frac{5ab}{2} : \frac{a}{b} = \frac{5ab}{2} - \frac{5ab}{2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{5ab}{2} - \frac{5b^2}{2}$.

Wie grofs ist der $n$te Teil von $\left(\frac{a}{b}\right)^x$?

$= \left(\frac{a}{b}\right)^x : n$. Um nun den Doppelbruch $\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{n}$ zu vermeiden, so ist hier zu rechnen:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x : \frac{n}{1} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

Daher auch $\frac{a-b}{c-d} - \frac{e}{f}$ durch a dividiert

$$= \left(\frac{a-b}{c-d} - \frac{e}{f}\right) : \frac{a}{1} = \frac{1}{a}\left(\frac{a-b}{c-d} - \frac{e}{f}\right).$$

$$\frac{a-b}{c} = (a-b) : c = (a-b) : \frac{c}{1} = \frac{1}{c}\,(a-b).$$

Anstatt $\frac{a-b}{4}$ kann man also auch $\frac{1}{4}\,(a-b)$,

statt $\frac{x}{5} : \frac{1}{5}\,x$ schreiben.

Ist $x : y = -\frac{2\,a}{5\,z}$, so mufs auch der reciproke Wert von $x : y$ (d. i. von $\frac{x}{y}$) = dem recipr. Wert von $-\frac{2\,a}{5\,z}$ sein, folglich ist $\frac{y}{x} = 1 : -\frac{2\,a}{5\,z}$ (s. 1. Satz, 2. Zus.), oder $\frac{y}{x} = -\frac{5\,z}{2\,a}$.

Zusatz. Wächst eine in einem Zahlenausdrucke enthaltene Zahl ununterbrochen, bis sie den gröfsten Wert der Zahlen, nämlich ∞, erreicht, oder nimmt jene Zahl ununterbrochen ab, bis sie den kleinsten Wert der Zahlen, nämlich 0, erreicht, so bezeichnet man den Wert, in welchen der gegebene Ausdruck hierbei übergeht, als Grenzwert (*limes*) dieses Ausdrucks. Man giebt alsdann zunächst an, in welchen Grenzwert jene in dem gegebenen Ausdrucke enthaltene Zahl übergehen soll und setzt daneben den Grenzwert, in welchen der gegebene Ausdruck hierbei übergeht.

1. Beispiel. Wächst in $\frac{a}{b}$, wo a und b ursprünglich endliche Zahlen bedeuten, der Nenner b ununterbrochen, erreicht er mithin zuletzt den Grenzwert ∞, so geht $\frac{a}{b}$ alsdann über in

$$\frac{a}{\infty} = 0 \text{ (s. §. 18, 4).}$$

Man schreibt dies $b = \infty$, $lim\,\frac{a}{b} = 0$.

2. Beispiel. Nimmt in $\frac{a}{b}$ der Nenner b fortwährend ab, bis er den Grenzwert 0 erreicht, so geht $\frac{a}{b}$ über in

$$\frac{a}{0} = \infty \text{ (s. §. 18, 12, 1).}$$

Folglich $b = 0$, $lim\,\frac{a}{b} = \infty$.

Ist der Grenzwert jener in dem Ausdrucke enthaltenen Zahl nicht angegeben, so ist der zu substituierende Grenzwert: 0.

Anstatt $b = 0$, $lim \frac{1}{b} = \infty$ schreibt man daher nur:

$$lim \frac{1}{b} = \infty$$

(d. h. geht b in 0 über, so wird $\frac{1}{b} = \frac{1}{0} = \infty$).

§. 57. Potenzlehre.

(Potenzen von Monomien.)

1. Einleitung.

Der in den §§. 14 und 15 gelehrten Entwickelung der Potenz und den mit derselben verbundenen Ausdrücken und einfachsten Sätzen ist hier nur Weniges hinzuzufügen.

Wie aus ab^3 in der Bedeutung $abbb$ (s. §. 14, 3) hervorgeht, bezieht sich der Exponent nur auf die Basis, mit welcher er unmittelbar verbunden ist. $3\,a^2$ hat daher den Sinn $3\,aa$. Soll dagegen $3\,a$ quadriert (auf die 2. Potenz erhoben) werden, so müfste $(3\,a)^2$ mit der Bedeutung $3\,a \cdot 3\,a = 9\,a^2$ geschrieben werden. Der Exponent erstreckt sich sogar nicht auf das Vorzeichen. So bedeutet -5^2 so viel als $-5 \cdot 5$ oder -25. Soll dagegen -5 quadriert werden, so ist $(-5)^2$ zu schreiben und es ist alsdann

$$(-5)^2 = (-5)(-5) = +25.$$

2. Bestimmung der Werte einiger Potenzen von Zahlen.

I. 10 Zehner = 1 Hunderter (s. §. 19), d. i. $10 \cdot 10 = 100$ oder $10^2 = 100$.

10 Hunderte = 1 Tausender, d. i. $10 \cdot 100 = 1000$ oder $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ oder $10^3 = 1000$.

Eben so $10^4 = 10000$ u. s. w.

Es ist also 10^n eine Zahl, die aus 1 mit darauf folgenden n Nullen besteht.

II. Jede Potenz von 0 ist = 0.

Beweis. $0^n = \underbrace{0}_{1} \cdot \underbrace{0}_{2} \cdot \underbrace{0}_{3} \ldots\ldots \underbrace{0}_{n} = 0$, denn nach §. 18, 6 ist ein Produkt = 0, wenn einer der Faktoren = 0 ist.

III. Da $5 = 5$, so mufs $5 + 5 > 5$ sein (s. §. 1, 6), d. i.

$$2 \cdot 5 > 5.$$

Eben so ist $3 \cdot 5 > 5$ u. s. w., folglich $5 \cdot 5 > 5$ oder

$$5^2 > 5.$$

Nun ist wieder $5^2 = 5^2$, folglich $5^2 + 5^2 > 5^2$, d. i.

$$2 \cdot 5^2 > 5^2.$$

Eben so $3 \cdot 5^2 > 5^2$ u. s. w., folglich $5 \cdot 5^2 > 5^2$ oder

$$5^3 > 5^2,$$

und da wieder $5^2 > 5$, so ist auch $5^3 > 5$.

So liefse sich allgemein zeigen, dafs $a^n > a^r$ und $a^n > a$, wenn $a > 1$ und $n > r > 1$ ist. Dafs dies auch gilt, wenn a nur wenig gröfser als 1 ist, folgt aus dem Beweise des nachstehenden Satzes.

Zusatz. Insbesondere ist $a^n > 1$, weil $a^n > a$ und $a > 1$.

IV. $2^\infty = \infty$, $3^\infty = \infty$, $10^\infty = \infty$; allgemein $a^\infty = \infty$, wenn $a > 1$ ist.

Beweis. Dafs $2^\infty = \overset{1}{2} \cdot \overset{2}{2} \cdot \overset{3}{2} \ldots\ldots \overset{\infty}{2} = \infty$ wird, desto mehr $3^\infty = \infty$ u. s. w., ist leicht einzusehen. Da aber $1\frac{1}{100} \cdot 1\frac{1}{100}$ noch immer wenig > 1, so mag hier gezeigt werden, dafs auch

$$(1\tfrac{1}{100})^\infty = \infty \text{ ist.}$$

Es ist

$$(1\tfrac{1}{100})^2 = \left(1 + \frac{1}{100}\right)\left(1 + \frac{1}{100}\right) = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000}$$

(s. §. 11, 9). Folglich ist $(1\frac{1}{100})^2 > 1 + \frac{2}{100}$.

Nun ist $(1\frac{1}{100})^3 = (1\frac{1}{100})^2 \cdot 1\frac{1}{100}$, also mindestens

$$= \left(1 + \frac{2}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right) = 1 + \frac{2}{100} + \frac{1}{100} + \frac{2}{10000}.$$

Folglich ist $(1\frac{1}{100})^3 > 1 + \frac{3}{100}$.

So findet man, dafs

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^1 > 1 + \frac{4}{100},\ \left(1 + \frac{1}{100}\right)^5 > 1 + \frac{5}{100}, \text{ zuletzt}$$

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^\infty > 1 + \frac{\infty}{100}, \text{ d. i. (s. §. 18, 11, I)}$$

$$\left(1\ \frac{1}{100}\right)^\infty > 1 + \infty, \text{ folglich (s. §. 18, 2)}$$

$$\left(1\ \frac{1}{100}\right)^\infty > \infty.$$

V. Der Satz, dafs jede Potenz von $1 = 1$ ist (s. §. 15, 5), ist nur dann richtig, wenn der Exponent nicht unendlich grofs ist.

Es ist 1^{∞} eine **unbestimmte** Zahl (s. §. 18, 9—12), die nicht blofs 1, sondern jede endliche Zahl bedeuten kann.

Beweis. Zunächst mag gezeigt werden, dafs $1^{\infty} = 8$ sein kann. Es ist

$$(1 + 1)^3 = 2^3 = 8,$$
$$(1 + 0{,}6818)^4 = 1{,}6818 \cdot 1{,}6818 \cdot 1{,}6818 \cdot 1{,}6818 = 8,$$

Eben so
$$(1 + 0{,}3459)^7 = 8,$$
$$1{,}2311^{10} = 8,$$
$$1{,}1096^{20} = 8,$$
$$(1 + 0{,}021)^{100} = 8,$$
$$(1 + 0{,}0021)^{1000} = 8.$$

Nimmt der 2. Summand der Basis bis 0 ab, so nimmt der Exponent bis ∞ zu und es ist dann

$$(1 + 0)^{\infty} = 8, \text{ d. i. } 1^{\infty} = 8.$$

In gleicher Weise kann man zeigen, dafs $1^{\infty} = 500$ sein kann. Denn es ist

$$(1 + 499)^1 = 500,$$
$$(1 + 21{,}36)^2 = 500,$$
$$(1 + 0{,}8616)^{10} = 500,$$
$$(1 + 0{,}0641)^{100} = 500,$$
$$(1 + 0{,}0062)^{1000} = 500.$$

Die Grenze für das Abnehmen des 2. Summand ist 0, die Grenze für das Zunehmen des Exponent: ∞. Daher:

$$(1 + 0)^{\infty} = 500, \text{ d. i. } 1^{\infty} = 500.$$

A. Die Basen gleich und positiv.

3. $a^n \cdot a^r = a^{n+r}$.

Potenzen mit gleicher Basis multipliciert man, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Beweis. I. $a^3 \cdot a^4 = \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \cdot \overset{3}{a} \cdot \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \cdot \overset{3}{a} \cdot \overset{4}{a} = ?$ Die Anzahl der Faktoren ist $3 + 4$, die Basis a, folglich die Potenz $= a^{3+4} (= a^7)$.

II. $a^n \cdot a^r = \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \ldots \overset{n}{a} \cdot \overset{1}{a} \cdot \overset{2}{a} \ldots \overset{r}{a} = ?$ Die Anzahl der Faktoren ist $n + r$, die Basis a, folglich die Potenz $= a^{n+r}$.

Beispiele. $a^2 \cdot a^7 = a^{2+7} = a^9$.
$x \cdot x^4 = x^1 \cdot x^4$ (s. §. 15, 3) $= x^{1+4} = x^5$.

$2^7 \cdot 2^{-13} \cdot 2 = 2^7 \cdot 2^{-13} \cdot 2^1 = 2^{7-13+1} = 2^{-5}$.

$(a+b)^4 (a+b)^5 (a+b)^6 = (a+b)^{4+5+6} = (a+b)^{15}$.

$a^n \cdot a = a^n \cdot a^1 = a^{n+1}$.

$x \cdot x^{n-3} \cdot x^2 = x^{1+n-3+2} = x^n$.

$n^{2x-3} \cdot n \cdot n^{4-5x} \cdot n^{5+3x} = n^{2x-3+1+4-5x+5+3x} = ?$

Im Exponent heben sich die Glieder mit der Hauptgröfse x, ihre Summe ist also $= 0$. Die Summe der speciellen Zahlen aber ist $= 7$. Anstatt n^{0+7} schreibt man selbstverständlich n^7.

Bei $n^{x-4} \cdot n^{-3x+5} \cdot n^{2x-1}$ erhält man jedoch für die Glieder mit x die Zahl 0, dasselbe aber auch für die speciellen Zahlen, folglich ist das Resultat $n^{0+0} = n^0$. Dafür darf nun nicht n geschrieben werden, weil nur $n^1 = n$, mithin mufs der Exponent 0 vorläufig stehen bleiben, bis wir erfahren, welche Bedeutung n^0 hat.

$$5 \cdot 5^{\frac{x}{2} - 3\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{5}{6} + 2x} \cdot 5^{2\frac{5}{12} - \frac{5x}{2}} = 5^{1 + \frac{x}{2} - 3\frac{1}{4} + \frac{5}{6} + 2x + 2\frac{5}{12} - \frac{5x}{2}}$$
$$= 5^1 = 5.$$

$2^{7-4n} \cdot 2^{3n-11} \cdot 2^{13} \cdot 2^n = 2^{7-4n+3n-11+13+n} = 2^9 = 512$.

$$(x+y-z)(x+y-z)^{-2} = (x+y-z)^1 \cdot (x+y-z)^{-2}$$
$$= (x+y-z)^{-1}.$$

$5a^3 \cdot -4a^4 = -20a^3a^4 = -20a^7$.

$8a^3b^4 \cdot -2a^5b^2 = -16a^3a^5b^4b^2 = -16a^8b^6$.

$-3xy^4 \cdot -6ax^3y^7 = +18axx^3y^4y^7 = 18ax^4y^{11}$.

$$\frac{5x^4y}{2} : -\frac{15}{4x^2y} = -\frac{5x^4y}{2} \cdot \frac{4x^2y}{15} = -\frac{2x^4x^2y^1y^1}{3}$$
$$= -\frac{2x^6y^2}{3}.$$

4. Umkehrung: $a^{n+r} = a^n \cdot a^r$.

Anstatt eine Zahl mit einer Summe zu potenzieren, kann man die Zahl mit jedem Summand potenzieren und die entstehenden Potenzen multiplicieren.

Beispiele. $a^{x+1} = a^x \cdot a^1 = a^x \cdot a = a \cdot a^x$.

$n^{x+y+z} = n^x \cdot n^y \cdot n^z$.

$2^{5+x} = 2^5 \cdot 2^x = 32 \cdot 2^x$.

$10^{n+3} = 10^n \cdot 10^3 = 10^n \cdot 1000 = 1000 \cdot 10^n$.

$3^{4+x+y} = 3^4 \cdot 3^{x+y} = 81 \cdot 3^{x+y}$.

$(2a - b)^{x+3} = (2a - b)^3 (2a - b)^x$.

$(3a - 7c)^5 = (3a - 7c)^{4+1} = (3a - 7c)^4 \cdot (3a - 7c)^1$
$= (3a - 7c)^4 (3a - 7c)$.

5. $\frac{a^n}{a^r} = a^{n-r}$, oder $a^n : a^r = a^{n-r}$.

Um 2 Potenzen mit gleichen Basen durch einander zu dividieren, potenziert man die gemeinschaftliche Basis mit der Differenz aus dem Exponent des Dividend und dem Exponent des Divisor.

Beweis. Quot. $\times$ Dsr. $= a^{n-r} \cdot a^r = a^{n-r+r}$ (s. 3. Satz)
$= a^n =$ Dd.

Anmerkung. Da der Satz ein Divisionssatz ist, so ist er auch unbedingt als solcher und nicht durch Zerlegen in Faktoren zu beweisen.

Beispiele. $\frac{a^8}{a^3} = a^{8-3} = a^5$.

$\frac{2^7}{2} = \frac{2^7}{2^1} = 2^{7-1} = 2^6 = 64$.

$\frac{9}{9^4} = \frac{9^1}{9^4} = 9^{1-4} = 9^{-3}$.

$\frac{n^{-3}}{n^{-4}}$? Hier ist also der Exponent -3 um -4 zu vermindern $= n^{-3-(-4)} = n^{-3+4} = n^1 = n$.

$\frac{x^{-5}}{x^{-2}} = x^{-5-(-2)} = x^{-3}$.

$\frac{10^{-3}}{10^2} = 10^{-3-2} = 10^{-5}$.

$\frac{a^x}{a} = \frac{a^x}{a^1} = a^{x-1}$.

$\frac{3}{3^n} = \frac{3^1}{3^n} = 3^{1-n}$.

$\frac{(a-b)^7}{(a-b)^4} = (a-b)^{7-4} = (a-b)^3$.

$\frac{(x+y)^2}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{(x+y)^1} = (x+y)^{2-1} = (x+y)^1 = x+y$.

$$(4\tfrac{3}{5})^9 : (4\tfrac{3}{5})^3 = (4\tfrac{3}{5})^{9-3} = (4\tfrac{3}{5})^6.$$

$$\left(\frac{a+b}{c-d}\right)^5 : \left(\frac{a+b}{c-d}\right)^4 = \left(\frac{a+b}{c-d}\right)^{5-4} = \left(\frac{a+b}{c-d}\right)^1 = \frac{a+b}{c-d}.$$

$$\frac{a^m}{a^{n-p} \cdot a^{q-r}} = \frac{a^m}{a^{n-p+q-r}} = a^{m-(n-p+q-r)}$$
$$= a^{m-n+p-q+r}.$$

Dieses Resultat hätte man direkt aus der Aufgabe ableiten können. Denn um die Exponenten des Divisor vom Exponent des Dividend zu subtrahieren, addiert man sie (nach §. 51 u. 54) mit entgegengesetztem Zeichen zum Exponent des Dividend. Anstatt hier m um $n-p$ und $q-r$ zu vermindern, konnte man mithin sogleich m um $-n+p$ und $-q+r$ vermehren.

$$\frac{3^{x+3} \cdot 3^{x-2y}}{3 \cdot 3^{4y-x} \cdot 3^{-2x-3y+2} \cdot 3^{-3y}}$$
$$= 3^{x+3+x-2y-1-4y+x+2x+3y-2+3y} = 3^{5x}.$$

$$-15x^3 : -20x^{11} = + \frac{15x^3}{20x^{11}} = \frac{3x^{-8}}{4}.$$

$$4x : -8x^3 = -\frac{4x}{8x^3} = -\frac{x^{1-3}}{2} = -\frac{x^{-2}}{2}.$$

Zusatz. $\frac{a^3 b^5}{a^7 b^2}$? Als $\frac{a^3}{a^7} \cdot \frac{b^5}{b^2}$ erhielte man nach vorstehendem 5. Satze $a^{-4} b^3$. Da man jedoch negative Exponenten nicht unmittelbar benutzen kann und sie daher im Resultat vermeidet, so sind Brüche, wie der hier gegebene, durch die Potenz mit dem kleinern Exponent zu kürzen.

Daher $\frac{a^3 b^5}{a^7 b^2}$ durch a^3 gekürzt $= \frac{\frac{a^3 b^5}{a^3}}{\frac{a^7 b^2}{a^3}} = \frac{b^5}{a^4 b^2}$, noch durch b^2 gekürzt $= \frac{b^3}{a^4}$.

Anfänger denken sich dieses Kürzen gern mechanisch in folgender Weise: $\frac{a^3 b^5}{a^7 b^2} = \frac{aaabbbbb}{aaaaaaabb}$, nun oben und unten aaa und bb gestrichen, erhält man: $\frac{bbb}{aaaa} = \frac{b^3}{a^4}$.

Beispiele. $\frac{ax}{2x^2}$ durch x gekürzt $= \frac{a}{2x}$.

$\frac{4b^2x^3}{10b^4x} = \frac{2x^2}{5b^2}$.

$12x^6 : -8x^9 = -\frac{12x^6}{8x^9} = -\frac{3}{2x^3}$.

$-\frac{8x}{3y^4} : -\frac{10x^8}{9y^9} = +\frac{8x}{3y^4} \cdot \frac{9y^9}{10x^8} = \frac{12y^5}{5x^7}$.

$-\frac{5x^6}{4} : \frac{x^7}{12} = -\frac{5x^6 \cdot 12}{4 \cdot x^7} = -\frac{15}{x}$.

$\frac{12a^2x}{7x-3} \cdot \frac{7x-3}{4ax} = \frac{12a^2x(7x-3)}{4ax(7x-3)}$ [$7x-3$ mit $7x-3$, a^2 mit a u. s. w. gekürzt] $= 3a$.

$$\frac{2e}{3n^2x(5x-1)} : \frac{1}{6n(5x-1)(x+3)} = \frac{2e \cdot 6n(5x-1)(x+3)}{3n^2x(5x-1)} = \frac{4e(x+3)}{nx}.$$

$$\frac{(9x-7)^3}{5} : \frac{(9x-7)^4}{10} = \frac{(9x-7)^3 \cdot 10}{5 \cdot (9x-7)^4} = \frac{2}{(9x-7)^1} = \frac{2}{9x-7}.$$

6. Umkehrung: $a^{n-r} = \frac{a^n}{a^r}$.

Anstatt eine Zahl mit einer Differenz zu potenzieren, kann man die mit dem Minuend potenzierte Zahl durch die mit dem Subtrahend potenzierte Zahl dividieren.

Beispiele.

$5^{2-x} = \frac{5^2}{5^x} = \frac{25}{5^x}$. (Der 14. Satz wird zeigen, dafs man hier nicht 25 mit 5 kürzen kann.)

$2^{3+x-y} = 2^{(3+x)-y} = \frac{2^{3+x}}{2^y} = \frac{2^3 \cdot 2^x}{2^y} = \frac{8 \cdot 2^x}{2^y}$.

$7^{x-1} = \frac{7^x}{7^1} = \frac{7^x}{7}$.

$5^{1-m-n} = 5^{1-(m+n)} = \frac{5^1}{5^{m+n}} = \frac{5}{5^m \cdot 5^n}$.

(Oder weil $\frac{5^1}{5^m \cdot 5^n} = 5^{1-m-n}$, so mufs unmittelbar

$$5^{1-m-n} = \frac{5}{5^m \cdot 5^n} \text{ sein).}$$

7. $a^0 = 1$.

Beweis. $a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1}$ (s. 6. Satz) $= \frac{a}{a} = 1$;

$$\text{oder } (-7)^0 = (-7)^{1-1} = \frac{(-7)^1}{(-7)^1} = \frac{-7}{-7} = +1.$$

Jede (positive und negative) Zahl giebt in der 0ten Potenz $+1$.

Beispiele. $(a-b-c)^0 - 3 = 1 - 3 = -2$;

$$5a - 7a^0 + 11 - 13a - 2a^0 = 5a - 7 \cdot 1 + 11 - 13a - 2 \cdot 1$$
$$= 2 - 8a.$$

$$\frac{(a-b)(a-b)^{4x-7}(a-b)^{2-x}}{(a-b)^{7x-1} \cdot (a-b)^{-3-4x}}$$
$$= (a-b)^{1+4x-7+2-x-7x+1+3+4x} = (a-b)^0 = 1.$$

$$x^{a-b} \cdot x^{b-a} = x^{a-b+b-a} = x^0 = 1.$$

1. Zusatz. 0^0 ist ein unbestimmter Ausdruck, denn

$$0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1} = \frac{0}{0} \text{ (s. §. 18, 10, II).}$$

2. Zusatz. ∞^0 ist unbestimmt, denn

$$\infty^0 = \infty^{1-1} = \frac{\infty^1}{\infty^1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (s. §. 18, 11, II).}$$

8. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. (Da der reciproke Wert von $a^n = \frac{1}{a^n}$, so läfst sich der vorstehende Satz aussprechen:)

Eine Potenz mit negativem Exponent kann man in den reciproken Wert der mit positivem Exponent geschriebenen Potenz verwandeln.

Beweis.

$$a^{-n} = a^{0-n} \text{ (s. §. 51)} = \frac{a^0}{a^n} \text{ (s. 6. Satz)} = \frac{1}{a^n}.$$

Beispiele. $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

$$(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2}.$$

$$4^{-2} + 2^{-3} + 3 \cdot 8^{-1} - 2(a+b-c)^{-1}$$
$$= \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{3}{8^1} - \frac{2}{(a+b-c)^1}$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} - \frac{2}{a+b-c} = \frac{9}{16} - \frac{2}{a+b-c}.$$

$$\frac{a^{-3}c}{b \cdot d^{-2}} = \frac{\frac{1}{a^3} \cdot c}{b \cdot \frac{1}{d^2}}.$$ Erweitert mit $a^3 \cdot d^2$

$$= \frac{\frac{1}{a^3} \cdot a^3 \cdot c \cdot d^2}{a^3 \cdot b \cdot d^2 \cdot \frac{1}{d^2}} = \frac{cd^2}{a^3 b}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem gegebenen Ausdrucke und berücksichtigt man, dafs auch umgekehrt

$$\frac{cd^2}{a^3 b} = \frac{a^{-3} c}{bd^{-2}}$$

sein mufs, so ergiebt sich die Regel:

Versetzt man eine Potenz aus dem Zähler eines Bruches in den Nenner oder aus dem Nenner in den Zähler, so wird der Exponent entgegengesetzt.

Da man negative Exponenten gern vermeidet, so wird diese Regel oft in Anwendung kommen.

Beispiele.

$$\frac{4^{-2}}{6^{-1}} = \frac{6^1}{4^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

$$a^{-n} = \frac{1 \cdot a^{-n}}{1} = \frac{1}{1 \cdot a^n} = \frac{1}{a^n}$$ (siehe oben die ursprüngliche Form des 8. Satzes!).

$$5^{-2} \cdot 10^3 = \frac{10^3}{5^2} = \frac{1000}{25} = 40.$$

$$\frac{15 \cdot 6^{-2}}{14 \cdot 21^{-1}} = \frac{15 \cdot 21^1}{14 \cdot 6^2} = \frac{15 \cdot 21}{14 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{8}.$$

$$5^{-2} \cdot 15^{-1} = \frac{1}{5^2 \cdot 15^1} = \frac{1}{25 \cdot 15} = \frac{1}{375}.$$

2^{-3-x}? Entweder $2^{-(3+x)} = \frac{1}{2^{3+x}} = \frac{1}{2^3 \cdot 2^x} = \frac{1}{8 \cdot 2^x}$;

oder $2^{-3} \cdot 2^{-x} = \frac{1}{2^3 \cdot 2^x}$.

$$\frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

$$ab^{1-n} = ab^{-n+1} = ab^{-(n-1)} = \frac{a}{b^{n-1}}.$$

$\frac{ab}{c} = abc^{-1}$ (um dem Quotient die Form eines Produkts zu geben).

$$\frac{ab^2}{c^3 d^4} = ab^2 c^{-3} d^{-4}.$$

$$\frac{4}{3x} = \frac{4x^{-1}}{3}; \quad \frac{1}{2a^3} = \frac{a^{-3}}{2}.$$

Anmerkung. Der negative Exponent verwandelt die Potenz nicht etwa in eine negative Zahl. 2^{-3} bedeutet nichts Negatives, sondern einen Quotient, denn es ist $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Zusatz. Soll $\frac{a}{3} - \frac{3}{4a^2} + 5\frac{1}{2} - 2a^2 + \frac{7}{6a}$ streng nach absteigenden Potenzen von a geordnet werden, so denke man sich:

$$= \frac{a^1}{3} - \frac{3a^{-2}}{4} + 5\tfrac{1}{2} \cdot 1 - 2a^2 + \frac{7a^{-1}}{6}$$

$$= \frac{1}{3}a^1 - \frac{3}{4}a^{-2} + 5\tfrac{1}{2}a^0 - 2a^2 + \frac{7}{6}a^{-1}.$$

Die Exponenten von a sind also in folgender Ordnung vorhanden: 1, —2, 0, 2, —1. Dieselben absteigend geordnet:

2 1 0 —1 —2,

hiernach jene Glieder geordnet:

$$-2a^2 + \frac{1}{3}a^1 + 5\tfrac{1}{2}a^0 + \frac{7}{6}a^{-1} - \frac{3}{4}a^{-2}, \text{ d. i.}$$

$$= -2a^2 + \frac{a}{3} + 5\tfrac{1}{2} + \frac{7}{6a} - \frac{3}{4a^2}.$$

Man wird daher auch nicht $x = 3a + \frac{4}{a} + 5$ setzen, sondern $3a + 5 + \frac{4}{a}$, denn a^1, a^0, a^{-1}!

Anmerkung. Der Unterschied zwischen dem gröfsten und dem kleinsten Exponent der Hauptgröfse giebt den Gliederumfang des Polynoms. So ist z. B. $7a^2 - 5a + 6$ von kleinerem Umfange als $a^4 + a^3 - a^2 + 2a$, denn jenes Polynom hat man sich $7a^2 - 5a^1 + 6 \cdot a^0$, letzteres als $a^4 + a^3 - a^2 + 2a^1$ zu denken und ersteres geht mithin von a^2 bis a^0, letzteres von a^4 bis a^1, der Unterschied der Exponenten ist daher $2 - 0 = 2$ und $4 - 1 = 3$.

$x^4 - \frac{3}{x}$ ist von gröfserem Umfange als

$$x^6 + 7x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2.$$

Da nämlich der Gliederumfang offenbar von der Gröfse der Coefficienten unabhängig ist, so sind z. B.

$$x^4 + 100x^3 + 7x^2 + 11x + 2 - 3x^{-1},$$

$$\text{oder } 5x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - x^{-1},$$

$$\text{oder } x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 - 3x^{-1}$$

Polynomien von gleichem Umfange. Das letztere aber ist jenes zuerst gegebene, bei welchem mithin die Differenz der Exponenten $4 - (-1) = 4 + 1 = 5$ ist. Die Differenz der Exponenten ist bei dem andern Polynom nur $6 - 2 = 4$.

9. $(a^n)^r = a^{nr}$. Um eine Potenz zu potenzieren, multipliciert man die Exponenten.

Beweis. $(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{4 \cdot 3}$; allgemein:

$$(a^n)^r = \underset{1}{a^n} \cdot \underset{2}{a^n} \ldots\ldots \underset{r}{a^n} = a^{\underset{1}{n} + \underset{2}{n} + \ldots\ldots + \underset{r}{n}} = a^{nr}.$$

Beispiele. $(2^3)^4 = 2^{12} = 4096$.

$$(5^{-2})^3 = 5^{-2 \cdot 3} = 5^{-6} = \frac{1}{5^6} = \frac{1}{15625}.$$

$$(10^2)^{-3} = 10^{2(-3)} = 10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000}.$$

$$(10^{-2})^{-3} = 10^{(-2)(-3)} = 10^6 = 1000000.$$

$$\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^2 = a^{\frac{3}{8} \cdot 2} = a^{\frac{3}{4}}.$$

$$\left(7^{\frac{9x}{4}}\right)^{\frac{8}{3x}} = 7^{\frac{9x}{4} \cdot \frac{8}{3x}} = 7^6 = 117649.$$

$$((4^{-1})^{-2})^{-3} = 4^{(-1)(-2)(-3)} = 4^{-6} = \frac{1}{4^6} = \frac{1}{4096}.$$

$$((a^2)^{-n})^{5n} = a^{2 \cdot (-n) \cdot 5n} = a^{-10n^2} = \frac{1}{a^{10n^2}}.$$

$(123^{456})^{789} = 123^{456 \cdot 789} = 123^{359784}$ (eine Zahl von 751915 Stellen, deren erste Stellen links 2633989942 ....).

1. Zusatz. Da eine mit n Nullen geschriebene Potenz von $10 = 10^n$ (s. 2. Satz, 1), so ist die r^{te} Potenz einer mit n Nullen geschriebenen Potenz von $10 = (10^n)^r = 10^{nr}$, folglich eine Zahl, die aus 1 mit darauf folgenden nr Nullen besteht. So ist z. B. 10000^7 eine Zahl, die aus 1 mit darauf folgenden $(4 \cdot 7 =)$ 28 Nullen besteht.

2. Zusatz. Bestehen die Ganzen einer Zahl aus n Stellen, so bestehen die Ganzen des Quadrats aus $2n$ oder $2n - 1$ Stellen.

Beweis. Die 1stelligen Zahlen gehen von 1 bis 9,99 .... (letztere Zahl < 10). Nun ist $1^2 = 1$, also 1stellig; $9{,}99^2$ aber offenbar kleiner als 10^2, d. i. kleiner als 100, folglich höchstens 99 (mit einem Decimalbruch), die Ganzen also höchstens 2stellig. Mithin ist das Quadrat einer 1stelligen Zahl 1- oder 2stellig.

Die 2stelligen Zahlen gehen von 10 bis 99,99 ..... Nun ist $10^2 = 100$, also 3stellig; 99^2 aber kleiner als 100^2, d. i. kleiner als 10000, oder höchstens 9999 und folglich die Ganzen höchstens 4stellig. Mithin ist das Quadrat einer 2stelligen Zahl 3- oder 4stellig.

Eben so findet man, dafs die Quadrate der 3stelligen Zahlen aus 5 oder 6, d. i. aus $2 \cdot 3 - 1$ oder $2 \cdot 3$ Stellen, die Quadrate der 4stelligen Zahlen aus 7 oder 8 Stellen, d. i. aus $2 \cdot 4 - 1$ oder $2 \cdot 4$ Stellen bestehen u. s. w.

3. Zusatz. Die Ganzen des Kubus einer $n$stelligen ganzen Zahl bestehen aus $3n$ oder $3n - 1$ oder $3n - 2$ Stellen.

Beweis. Aus $1^3 = 1$, $10^3 = 1000$, $100^3 = 1000000$ u. s. w findet man, dafs der Kubus einer 1stelligen Zahl mindestens 1 und höchstens 999,99 ...., d. i. eine 1, 2 oder 3stellige Zahl ist, dafs ferner der Kubus einer 2stelligen Zahl mindestens 1000 und höchstens 999999, d. i. eine 4, 5 oder 6stellige Zahl ist u. s. w.

10. Umkehrung: $a^{nr} = (a^n)^r$. Die Potenz, deren Exponent ein Produkt ist, kann in die Potenz einer Potenz verwandelt werden, indem man die Basis mit dem einen Faktor (des Exponent) potenziert, die erhaltene Potenz hierauf wieder mit dem andern Faktor.

Beispiele.

$2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$;

$3^{4 \cdot 5} = (3^4)^5 = 81^5$.

$5^{-2n} = (5^{-2})^n = \left(\frac{1}{5^2}\right)^n = \left(\frac{1}{25}\right)^n$, oder auch

$5^{-2n} = \frac{1}{5^{2n}} = \frac{1}{(5^2)^n} = \frac{1}{25^n}.$

$9^{2+4x} = 9^2 \cdot 9^{4x} = 9^2 \cdot (9^4)^x = 81 \cdot 6561^x.$

$10^{4-3n} = \frac{10^4}{10^{3n}} = \frac{10^4}{(10^3)^n} = \frac{10000}{1000^n}.$

$6^{-3-5a} = \frac{1}{6^{3+5a}} = \frac{1}{6^3 \cdot 6^{5a}} = \frac{1}{6^3 \cdot (6^5)^a} = \frac{1}{216 \cdot 7776^a}.$

1. Zusatz. $(a^n)^r = a^{nr} = (a^r)^n.$

Beispiele. $(2^x)^3 = (2^3)^x = 8^x.$

$(5^n)^4 = (5^4)^n = 625^n.$

2. Zusatz. Ist eine Potenz mit gröfserem Exponent zu berechnen, so bestimmt man der Reihe nach die 2., 3., 4. Potenz u. s. w., bis man zu einer Zahl gelangt, mit der sich leicht multiplicieren läfst. Soll z. B. 2^{64} berechnet werden, so findet man $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, dann 16, 32, 64, 128, 256, 512 und $2^{10} = 1024$. Diese Zahl 1024 erscheint offenbar als ein sehr bequemer Multiplicator. Nun denkt man sich

$$2^{64} = 2^{10 \cdot 6 + 4} = (2^{10})^6 \cdot 2^4 = 1024^6 \cdot 16.$$

Folglich: 1024 · 1024
2048
4096 . . . . . = 2 · 2048!

$1024^2 = 1048576.$

Diese Zahl mit 1024 multipliciert giebt 1024^3, durch wiederholtes Multiplicieren mit 1024 erhält man sehr bald die 4., 5. und 6. Potenz von 1024. Die letztere noch mit 16 multipliciert giebt die gewünschte 2^{64} (oder die in §. 19, 2 gegebene 20stellige Zahl).

11. Um $2^{3^{2^2}}$, eine sogenannte „aufsteigende Potenz", zu berechnen, verwandelt man immer die beiden höchsten Exponenten in eine Zahl. Daher $2^{3^4} = 2^{81}$ (eine Zahl von 28 Stellen). Jener gegebene Ausdruck ist also nicht mit

$$((2^3)^2)^2 = 2^{3 \cdot 2 \cdot 2} = 2^{12} = 4096$$

zu verwechseln.

$a^{b^{c^{d^e}}}$? Ist $d^e = m$, so geht die Aufgabe über in $a^{b^{c^m}}$, mit $c^m = n$ in a^{b^n}, mit $b^n = p$ in a^p.

Die gröfste endliche mit 3 Ziffern geschriebene Zahl ist

$9^{9^9} = 9^{387420489}$. Berechnet man diese Potenz, so erhält man eine Zahl von 369 693 100 Stellen, deren erste Ziffern 428124773175748046.... Schreibt man auf den Centimeter 4 Ziffern, so ist diese Zahl 124,5523 geogr. Meilen lang.

B. Die Basen gleich und negativ.

12. $(-a)^0 = +1$ (s. 7. Satz); $(-a)^1 = -a$;

$(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2$; $(-a)^3 = (-a)(-a)(-a) = -a^3$.

$(-a)^4$? 4 negative Faktoren geben nach §. 51, 4, b ein positives Resultat, daher $= +a^4$.

$(-a)^5$? 5 negative Faktoren geben ein negatives Resultat, daher $= -a^5$.

Weil überhaupt je 2 negative Faktoren ein positives Produkt geben, so mufs die geradzahlige Potenz einer negativen Zahl ein positives Resultat geben.

Insbesondere ist daher das Quadrat einer jeden Zahl, gleichviel ob sie positiv oder negativ ist, stets positiv.

Beispiele.

$$(-7)^2 = +7^2 = +49, \quad (+9)^2 = +9^2 = +81.$$

Ist der Exponent ungerade, so bleibt ein negativer Faktor übrig, nachdem je 2 zu einem positiven Produkte vereinigt sind, und mithin mufs das gesuchte Resultat negativ werden.

Da man eine gerade Zahl mit $2n$, eine ungerade mit $2n+1$ bezeichnet (s. §. 55, 1, Zus.), so ist

$$(-a)^{2n} = +a^{2n}; \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

Der Beweis für die vorstehenden Sätze läfst sich allgemeiner und prägnanter in folgender Weise führen:

$$(-a)^{2n} = ((-a)^2)^n = (+a^2)^n = +a^{2n};$$

$$(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} \cdot (-a)^1 = +a^{2n} \cdot -a^1 \text{ (s. Zeile vorher)}$$

$$= -a^{2n} \cdot a^1 = -a^{2n+1}.$$

Beispiele.

$(-1)^{14} = +1^{14} = 1$ (s. §. 15, 5).

$(-1)^{75} = -1^{75} = -1$.

$(-a)^{31} = -a^{31}$;

$(-n)^{22} = +n^{22}$.

$$(+3)^5 - (-2)^4 + (-5)^3 = (+3^5) - (+2^4) + (-5^3)$$
$$\text{(s. Satz 1!)} = 3^5 - 2^4 - 5^3 = 243 - 16 - 125 = 102.$$

$$2(-3)^3 - 5(-4)^2 + 7(-2)^4 - (-5)^2$$
$$= 2(-3^3) - 5(+4^2) + 7(+2^4) - (+5^2)$$
$$= -2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 4^2 + 7 \cdot 2^4 - 5^2$$
$$= -2 \cdot 27 - 5 \cdot 16 + 7 \cdot 16 - 25$$
$$= -54 - 80 + 112 - 25 = -47.$$

$$4(-1)(-2)^5 + (-3)^4(-1)^{29} - 2(-4)^2(-5)^3$$
$$= \underbrace{4(-1)(-2^5)}_{\text{2 Minus}} + \underbrace{(+3^4)(-1^{29})}_{\text{1 Minus}} - \underbrace{2(+4^2)(-5^3)}_{\text{2 Minus}} \quad \text{(s. §. 51, 4, b.)}$$
$$= +4 \cdot 1 \cdot 2^5 - 3^4 \cdot 1^{29} + 2 \cdot 4^2 \cdot 5^3$$
$$= 4 \cdot 32 - 81 \cdot 1 + 2 \cdot 16 \cdot 125$$
$$= 128 - 81 + 4000 = 4047.$$

$$3(-a)^6 b^4 - 5ab^2(-a)^5(-b)^2 + 7a^2b^3(-a)^4(-b)$$
$$= 3(+a^6)b^4 - 5ab^2(-a^5)(+b^2) + 7a^2b^3(+a^4)(-b)$$
$$= 3a^6b^4 + 5ab^2a^5b^2 - 7a^2b^3a^4b$$
$$= 3a^6b^4 + 5a^6b^4 - 7a^6b^4 = a^6b^4.$$

$$1 - \frac{(-2)^6(-3)^2}{4(-6)^3} - \frac{(-30)^3}{(-6)(-5)^4}$$
$$= 1 - \frac{(+2^6)(+3^2)}{4(-6^3)} - \frac{(-30^3)}{(-6)(+5^4)}$$
$$= 1 + \frac{64 \cdot 9}{4 \cdot 216} - \frac{27000}{6 \cdot 625} = 1 + \frac{2}{3} - 7\tfrac{1}{5} = -5\tfrac{8}{15}.$$

$23a^6b^3 - 3a^5c^4 + 2b^4c^3$ geht für $a = -2,\ b = -3,\ c = -5$ über in

$$23(-2)^6(-3)^3 - 3(-2)^5(-5)^4 + 2(-3)^4(-5)^3$$
$$= 23(+2^6)(-3^3) - 3(-2^5)(+5^4) + 2(+3^4)(-5^3)$$
$$= -23 \cdot 64 \cdot 27 + 3 \cdot 32 \cdot 625 - 2 \cdot 81 \cdot 125$$
$$= -39744 + 60000 - 20250 = 6.$$

$a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^6}{6}$ geht für $a = -b$ über in

$$(-b) - \frac{(-b)^2}{2} + \frac{(-b)^3}{3} - \frac{(-b)^4}{4} + \frac{(-b)^5}{5} - \frac{(-b)^6}{6}$$

$$= -b - \frac{+b^2}{2} + \frac{-b^3}{3} - \frac{+b^4}{4} + \frac{-b^5}{5} - \frac{+b^6}{6}$$

$$= -b - \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} - \frac{b^5}{5} - \frac{b^6}{6}.$$

$(-a^5)^6$? Nach dem 1. Satze bezieht sich 5 nicht auf das Minuszeichen, sondern 6 allein, folglich hat man sich die Aufgabe eben so zu denken, wie $(-p)^6 = +p^6$, und man erhält

$$+(a^5)^6 = a^{30}.$$

$(-a^6)^5 = -(a^6)^5 = -a^{30}$; denn $(-p)^5 = -p^5$.

$$(-a^4)^5 \cdot (-a^5)^4 = [-(a^4)^5] \cdot [+(a^5)^4] = (-a^{20})(+a^{20})$$
$$= -a^{20} \cdot a^{20} = -a^{40}.$$

$$5(-a)^6(-a^2)^3 - 14(-a^{-3})^2 \cdot (-a^2)^9$$
$$-4(-a^2)^4(-a)^3(-a) - 6(-a^3)^4$$
$$= 5(+a^6)[-(a^2)^3] - 14[+(a^{-3})^2][-(a^2)^9]$$
$$-4[+(a^2)^4](-a^3)(-a) - 6[+(a^3)^4]$$
$$= -5a^6(a^2)^3 + 14(a^{-3})^2(a^2)^9 - 4(a^2)^4 \cdot a^3 \cdot a - 6(a^3)^4$$
$$= -5a^6a^6 + 14a^{-6}a^{18} - 4a^8a^3a - 6a^{12}$$
$$= -5a^{12} + 14a^{12} - 4a^{12} - 6a^{12} = -a^{12}.$$

$$(-a)^{-6} = [(-a)^6]^{-1} = (+a^6)^{-1} = +a^{6(-1)} = +a^{-6}.$$

$$(-a)^{-9} = \frac{1}{(-a)^9} = \frac{1}{-a^9} = -\frac{1}{a^9} = -a^{-9}.$$

Aus den beiden letzten Beispielen folgt, dafs die Potenz einer negativen Zahl $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ wird, auch wenn der $\left\{\begin{matrix}\text{geradzahlige}\\ \text{ungeradzahlige}\end{matrix}\right\}$ Exponent negativ ist.

$$(-2)^{-3} = -2^{-3} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}.$$

$$(-5)^{-4} = +5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}.$$

C. Verschiedene Basen. Gleiche Exponenten.

13. $a^n b^n = (ab)^n$. Potenzen mit gleichen Exponenten multipliciert man, indem man das Produkt der Basen mit dem gegebenen Exponent potenziert.

Beweis. $a^n b^n = \underbrace{a}_{1} \cdot \underbrace{a}_{2} \ldots \underbrace{a}_{n} \cdot \underbrace{b}_{1} \cdot \underbrace{b}_{2} \ldots \underbrace{b}_{n} = \underbrace{a}_{1} \cdot \underbrace{b}_{1} \cdot \underbrace{a}_{2} \cdot \underbrace{b}_{2} \ldots \underbrace{a}_{n} \cdot \underbrace{b}_{n}$

$= \underbrace{ab}_{1} \cdot \underbrace{ab}_{2} \ldots \underbrace{ab}_{n} = (ab)^n.$

Beispiele. $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000.$

$$(5a)^4 \cdot \left(-\frac{a}{5}\right)^4 = \left(5a \cdot -\frac{a}{5}\right)^4 = (-a^2)^4 = +a^8.$$

$$(-3\tfrac{1}{2})^3 \cdot \left(-\frac{3ab}{14}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4b^5}{3a}\right)^3 = \left[(-3\tfrac{1}{2})\left(-\frac{3ab}{14}\right)\left(-\frac{4b^5}{3a}\right)\right]^3$$

$$= \left[-\frac{7 \cdot 3ab \cdot 4b^5}{2 \cdot 14 \cdot 3a}\right]^3 = -(b^6)^3 = -b^{18}.$$

$$(a+b)^{-7} \cdot (c+d)^{-7} \cdot \left(\frac{c+d}{a+b}\right)^{-7} = \left[(a+b)(c+d) \cdot \frac{c+d}{a+b}\right]^{-7}$$

$$= \left[(c+d)^2\right]^{-7} = (c+d)^{-14} = \frac{1}{(c+d)^{14}}.$$

14. Umkehrung. $(ab)^n = a^n b^n.$

Um ein Produkt zu potenzieren, potenziert man jeden Faktor mit dem gegebenen Exponent.

Beispiele. $(5a)^2 = 5^2 \cdot a^2 = 25a^2.$

$(-4ab)^3 = -(4ab)^3 = -4^3 a^3 b^3 = -64a^3b^3.$

$(-7a^3b^5c)^4 = +(7a^3b^5c)^4 = 7^4 (a^3)^4 (b^5)^4 c^4$
$= 2401\, a^{12} b^{20} c^4.$

Eben so $(-5b^{-6}x^7)^5 = -5^5 b^{-30} x^{35} = -\dfrac{3125x^{35}}{b^{30}}.$

$$(5a^3)^4 - (2a^{-6})^{-2} + (3a^4)^3 + (-20a^{-3})(2a^3)^5$$
$$= 625a^{12} - 2^{-2}a^{12} + 27a^{12} + (-20a^{-3}) \cdot 32a^{15}$$
$$= 625a^{12} - \frac{a^{12}}{4} + 27a^{12} - 640a^{12} = \frac{47a^{12}}{4}.$$

Zusatz. $700^3 = (7 \cdot 100)^3 = 343 \cdot 100^3 = 343$ multipliciert mit einer Zahl, die aus 1 mit 3mal 2 Nullen besteht (s. 9. Satz, 1. Zus.) $= 343 \cdot 1000000 = 343000000.$

Um also eine runde, auf n Nullen sich endigende Zahl auf die r^{te} Potenz zu erheben, potenziert man die ohne jene Nullen gedachte Zahl mit r und hängt dem Resultat nr Nullen an.

13000^5 ist also 13^5 mit $3 \cdot 5$ Nullen
$= 371293$ mit 15 Nullen
$= 371293000000000000000.$

15. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, oder $a^n : b^n = (a:b)^n$.

Um Potenzen mit gleichen Exponenten durch einander zu dividiren, potenziert man den Quotient der Basen mit dem gegebenen Exponent.

Beweis.

Quot. $\times$ Dsr. $= \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot b^n = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)$ (s. 13. Satz) $= a^n =$ Dd.!

Beispiele. $\frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5 = 32.$

$\frac{13869^4}{4623^4} = \left(\frac{13869}{4623}\right)^4 = 3^4 = 81.$

$\frac{(12\,a^4)^7}{(6\,a)^7} = (2\,a^3)^7 = 128\,a^{21}.$

$\frac{(75\,a^4\,b)^3}{(-15\,a^2\,b)^3} = \left(-\frac{75\,a^4\,b}{15\,a^2\,b}\right)^3 = -(5\,a^2)^3 = -125\,a^6.$

$(3\tfrac{1}{5})^2 : (1\tfrac{1}{15})^2 = \left(\frac{16}{5} : \frac{16}{15}\right)^2 = 3^2 = 9.$

$\left(\frac{14\,a^3\,b}{3\,x^4}\right)^6 : \left(-\frac{7\,ab}{6\,x^7}\right)^6 = \left(\frac{14\,a^3\,b}{3\,x^4} : -\frac{7\,ab}{6\,x^7}\right)^6 = (-4\,a^2\,x^3)^6$
$= +4096\,a^{12}\,x^{18}.$

16. Umkehrung: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Um einen Bruch zu potenzieren, hat man jedes Glied desselben mit dem gegebenen Exponent zu potenzieren.

Beispiele. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}.$

$\left(\frac{1}{7}\right)^5 = \frac{1^5}{7^5} = \frac{1}{16807}.$

$(4\tfrac{1}{2})^3$? Hier könnte man sich leicht durch $(ab)^3 = a^3\,b^3$ (siehe 14. Satz) verleiten lassen,

$$\left(4+\frac{1}{2}\right)=4^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=64+\frac{1}{8}=64\tfrac{1}{8}$$

zu rechnen. Vorläufig kann nur darauf aufmerksam gemacht werden, dafs

$$\left(4+\frac{1}{2}\right)^3=\left(4+\frac{1}{2}\right)\left(4+\frac{1}{2}\right)\left(4+\frac{1}{2}\right)$$

und dies offenbar nicht blos $4\cdot 4\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ (s. §. 11, 9) sein kann, dafs man die Potenz eines mehrteiligen Ausdrucks also nicht durch Potenzieren der einzelnen Glieder berechnen kann.

Gemischte Zahlen sind vielmehr einzurichten und nur in besondern Fällen ist das in §. 62 gelehrte Potenzieren eines mehrteiligen Ausdrucks anzuwenden. Daher:

$$(4\tfrac{1}{2})^3=\left(\frac{9}{2}\right)^3=\frac{9^3}{2^3}=\frac{729}{8}=91\tfrac{1}{8}.$$

$$(1\tfrac{1}{10})^4=\left(\frac{11}{10}\right)^4=\frac{11^4}{10^4}=\frac{14641}{10000}=1{,}4641.$$

$$(8\tfrac{1}{3})^2=\left(\frac{25}{3}\right)^2=\frac{25^2}{3^2}=\frac{625}{9}=69\tfrac{4}{9}.$$

$$\left(\frac{5a^3}{6b^5x}\right)^2=\frac{(5a^3)^2}{(6b^5x)^2}=\frac{5^2\cdot(a^3)^2}{6^2\cdot(b^5)^2\cdot x^2}\ \text{(s. 14. Satz).}$$

Enthält also der Zähler oder Nenner eines zu potenzierenden Bruches Produkte, so potenziert man jeden einzelnen Faktor. Hier ist noch $\frac{25a^6}{36b^{10}x^2}$ zu schreiben.

$$\left(\frac{2a^{-9}x^7}{11b^4y}\right)^3=\frac{8a^{-27}x^{21}}{1331b^{12}y^3}=\frac{8x^{21}}{1331a^{27}b^{12}y^3}.$$

$$\left[-\frac{a}{b^3}\right]^4\cdot\left[-\frac{b^4}{a^2}\right]^3=+\frac{a^4}{b^{12}}\cdot-\frac{b^{12}}{a^6}=-\frac{1}{a^2}.$$

1. Zusatz. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n.$

Nimmt man den Exponent einer Potenz entgegengesetzt, so hat man die Basis reciprok zu nehmen.

Beweis. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{a^{-n}}{b^{-n}}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n.$

Beispiele. $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}=\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}=5\tfrac{4}{9}.$

$$\left(\frac{1}{14}\right)^{-3} = \left(\frac{14}{1}\right)^3 = 2744.$$

$$(2\tfrac{3}{8})^{-4} = \left(\frac{8}{19}\right)^4 = \frac{4096}{130321}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^1 = \frac{b}{a}.$$

$$\left[\frac{2\,a^3}{3\,b^2}\right]^{-5} = \left[\frac{3\,b^2}{2\,a^3}\right]^5 = \frac{243\,b^{10}}{32\,a^{15}}.$$

2. Zusatz. $$\frac{a\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^n}{d} = \frac{a}{d\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{-n}} = \frac{a}{d\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^n}$$

und $$\frac{a}{d\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^n} = \frac{a\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{-n}}{d} = \frac{a\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^n}{d}.$$

Oder: Die Potenz eines Bruches kann man mit unverändertem Exponent aus dem Zähler in den Nenner und aus dem Nenner in den Zähler setzen, wenn man die Basis reciprok nimmt.

Beispiele.

$$\frac{7}{19\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^3} = \frac{7\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^3}{19} = \frac{7\cdot 1{,}8^3}{19}.$$

$$\frac{875\cdot\left(\frac{8}{11}\right)^4}{9} = \frac{875}{9\cdot\left(\frac{11}{8}\right)^4} = \frac{875}{9\cdot 1{,}375^4}.$$

$$100\tfrac{13}{17}\cdot\left(\frac{577}{589}\right)^{100} = \frac{1713}{17\cdot\left(\frac{589}{577}\right)^{100}}.$$

3. Zusatz. Die Potenz eines echten Bruches ist kleiner als die Basis, wenn der Exponent > 1.

Allgemeiner:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n < \left(\frac{a}{b}\right)^r, \text{ wenn } \frac{a}{b} < 1 \text{ und } n > r > 1 \text{ ist.}$$

Beispiel. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 < \frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^3 < \left(\frac{1}{4}\right)^2$.

Die Potenz eines echten Bruches entfernt sich mithin immer mehr von 1 und nähert sich fortwährend der 0, wenn der Exponent immer gröfser genommen wird.

Man vergleiche auch:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 0{,}6667$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} = 0{,}2963$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 0{,}0173$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{100} = 0{,}000000000000000024597.$$

Beweis. Nach den Divisionssätzen ist:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \text{ kleiner als } 1 \cdot \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} < 1 \cdot \frac{1}{2},$$

$$\text{d. i. } \left(\frac{1}{4}\right)^2 < \frac{1}{4}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}.$$

Ferner ist $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 < 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$, d. i $\left(\frac{1}{4}\right)^3 < \left(\frac{1}{4}\right)^2$

und da wieder $\left(\frac{1}{4}\right)^2 < \frac{1}{4}$, so ist $\left(\frac{1}{4}\right)^3 < \frac{1}{4}$.

Eben so: $\left(\frac{1}{4}\right)^4 < \left(\frac{1}{4}\right)^3 < \left(\frac{1}{4}\right)^2 < \frac{1}{4}$ (und nach der Voraussetzung) < 1.

4. Zusatz. $\left(\frac{a}{b}\right)^\infty = 0$, wenn die Basis $\frac{a}{b}$ ein echter Bruch.

Beweis. $\left(\frac{8}{9}\right)^\infty = \frac{1}{\left(\frac{9}{8}\right)^\infty}$ (s. 2. Zusatz) $= \frac{1}{\infty}$ (s. §. 57, 2, IV)

$= 0$. (Strenger §. 62, 7, 5. Zus.).

5. Zusatz. Ein $n$stelliger Decimalbruch giebt in der r^{ten} Potenz einen nrstelligen Decimalbruch.

Das Quadrat eines 1, 2, 3, 4, ... $n$stelligen Decimalbruches besteht daher aus 2, 4, 6, 8, ... $2n$ Decimalstellen

Der Kubus eines 1, 2, 3, 4, ... $n$stelligen Decimalbruches besteht aus 3, 6, 9, 12, ... $3n$ Decimalstellen.

1. Beweis. $0{,}0007^3 = 0{,}0007 \cdot 0{,}0007 \cdot 0{,}0007$, folglich $4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$ Decimalstellen.

Eben so ist die Anzahl der Decimalstellen der r^{ten} Potenz eines $n$stelligen Decimalbruchs

$$= \underbrace{n}_{1} + \underbrace{n}_{2} + \ldots\ldots + \underbrace{n}_{r} = nr \text{ Decimalstellen.}$$

2. Beweis. $\frac{a}{10^n}$ ist ein $n$stelliger Decimalbruch (s. §. 38), wobei der Zähler beliebig grofs sein kann. Z. B.

$\frac{43789}{10^3}$ ein 3stelliger Decimalbruch ($= 43{,}789$).

Mithin ist $\left(\frac{a}{10^n}\right)^r = \frac{a^r}{10^{nr}}$ ein nrstelliger Decimalbruch.

6. Zusatz. Aus der vorstehenden Gleichung folgt unmittelbar, dafs man die r^{te} Potenz eines Decimalbruches berechnet, indem man die Anzahl der Einheiten der letzten Decimalstelle auf die r^{te} Potenz erhebt und die gefundene Zahl in die nr^{te} Decimalstelle setzt.

Beispiele. $0{,}0013^3$? Man erhält $13^3 = 2197$ in der ($4 \cdot 3^{\text{ten}} =$) 12ten Decimalstelle, daher $= 0{,}000000002197$.

$3{,}46^2$? Man erhält $346^2 = 119716$ in der ($2 \cdot 2^{\text{ten}} =$) 4ten Decimalstelle, daher $= 11{,}9716$.

7. Zusatz. Beginnt eine Zahl in der n^{ten} Decimalstelle nach dem Komma, so beginnt das Quadrat mit der

$2\,n^{\text{ten}}$ oder $(2n - 1)^{\text{ten}}$ Decimalstelle.

Beispiele. 0,0007 beginnt in der 4ten Decimalstelle,

$$0{,}0007^2 = 0{,}00000049$$

in der $(2 \cdot 4 - 1)^{\text{ten}}$, d. i. in der 7ten Decimalstelle.

0,0103 beginnt in der 2ten Decimalstelle,

$$0{,}0103^2 = 0{,}00010609$$

in der $2 \cdot 2^{\text{ten}}$, d. i. in der 4ten Decimalstelle.

Beweis. Die 1stellige Ziffer der n^{ten} Decimalstelle, mit welcher der Decimalbruch beginnt, wird im Quadrat 1- oder 2stellig (siehe 9. Satz, 2. Zus.), zugleich rückt die letzte Stelle (rechts) des 1- oder 2stelligen Quadrats nach dem 5. Zusatze in die $2\,n^{\text{te}}$ Decimalstelle. Ist nun das Quadrat jener $2\,n^{\text{ten}}$ Decimalstelle 1stellig, so rückt es in die $2\,n^{\text{te}}$ Decimalstelle selbst, ist es aber 2stellig, so rückt die 2te Stelle (rechts) auch in die $2\,n^{\text{te}}$ Decimalstelle und folglich die 1te (links) in die $2\,n - 1^{\text{te}}$ Decimalstelle.

8. Zusatz. Beginnt eine Zahl in der n^{ten} Decimalstelle, so beginnt der Kubus in der $3n^{ten}$ oder $(3n-1)^{ten}$ oder $(3n-2)^{ten}$ Decimalstelle.

Beweis. Die 1stellige Ziffer der n^{ten} Decimalstelle wird im Kubus 1-, 2- oder 3stellig (s. 9. Satz, 3. Zus.), zugleich rückt die letzte Stelle (rechts) des 1-, 2- oder 3stelligen Kubus nach dem 5. Zusatz in die $3n^{te}$ Decimalstelle, daher die 1te den Decimalbruch beginnende Stelle in die $3n^{te}$ oder $(3n-1)^{te}$ oder $(3n-2)^{te}$ Decimalstelle.

D. Verschiedene Basen und verschiedene Exponenten.

17. Die Rechnung mit verschiedenen Basen und Exponenten wird oft bedeutend vereinfacht, oder für bestimmte Zwecke in passender Weise vorbereitet, wenn man entweder gleiche Basen oder gleiche Exponenten herstellt.

Beispiele.

I. $5^4 \cdot 2^5 = 5^4 \cdot 2^4 \cdot 2 = (5 \cdot 2)^4 \cdot 2 = 10^4 \cdot 2 = 10000 \cdot 2.$

$$\frac{8^5}{12^4} = \frac{8^4 \cdot 8}{12^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 8 = \frac{16 \cdot 8}{81}.$$

$$\frac{72^3}{36^4} = \frac{72^3}{36^3 \cdot 36} = \frac{2^3}{36} = \frac{8}{36} \text{ oder}$$

$$\frac{72^3}{36^4} = \frac{(36 \cdot 2)^3}{36^4} = \frac{36^3 \cdot 2^3}{36^4} = \frac{2^3}{36}.$$

$$\frac{0{,}875}{1{,}375^2} = \frac{0{,}875}{1{,}375 \cdot 1{,}375} = \frac{7}{11 \cdot 1{,}375} \text{ u. s. w.}$$

II. $25x^4 = 5^2 \cdot (x^2)^2 = (5x^2)^2; \quad 9 \cdot 7^2 = 3^2 \cdot 7^2 = (3 \cdot 7)^2.$

Anstatt ein Quadrat mit irgend einer Zahl zu multiplicieren, kann man die Basis des Quadrats mit der Quadratwurzel aus jener Zahl multiplicieren.

$64 \cdot 0{,}25^2 = (8 \cdot 0{,}25)^2 = 2^2.$

$1{,}44 \cdot 0{,}7^2 = (1{,}2 \cdot 0{,}7)^2 = 0{,}84^2$; denn $1{,}2^2 = 1{,}44$.

$9a^{10}(5x)^2 = (3a^5 \cdot 5x)^2 = (15a^5x)^2.$

III. $343a^6x^3 = 7^3(a^2)^3x^3 = (7a^2x)^3.$

Anstatt einen Kubus mit irgend einer Zahl zu multiplicieren, kann man die Basis des Kubus mit der Kubikwurzel aus jener Zahl multiplicieren.

Daher auch $0{,}512 \cdot 7{,}5^3 = (0{,}8 \cdot 7{,}5)^3 = 6^3$; denn $0{,}8^3 = 0{,}512$.

IV. $\frac{25a^2}{36b^6} = \frac{5^2 a^2}{6^2 \cdot (b^3)^2} = \left(\frac{5a}{6b^3}\right)^2.$

$\frac{12^2}{4} = \frac{12^2}{2^2} = \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 6^2.$

Anstatt ein Quadrat durch irgend eine Zahl zu dividieren, kann man die Basis des Quadrats durch die Quadratwurzel aus jener Zahl dividieren.

$\frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{3^2} = \left(\frac{a}{3}\right)^2; \quad \frac{x^2}{4} = \left(\frac{x}{2}\right)^2;$

$\frac{(35bc)^2}{25} = \left(\frac{35bc}{5}\right)^2 = (7bc)^2.$

V. $\frac{8x^3}{y^6 z^{12}} = \frac{2^3 x^3}{(y^2)^3 (z^4)^3} = \left(\frac{2x}{y^2 z^4}\right)^3.$

$\frac{18^3}{216} = \frac{18^3}{6^3} = \left(\frac{18}{6}\right)^3 = 3^3.$

Anstatt einen Kubus durch irgend eine Zahl zu dividieren, kann man die Basis des Kubus durch die Kubikwurzel aus jener Zahl dividieren.

$\frac{0{,}06^3}{0{,}008} = \left(\frac{0{,}06}{0{,}2}\right)^3 = 0{,}3^3.$

$\frac{(65a^2b)^3}{125a^3} = \left(\frac{65a^2b}{5a}\right)^3 = (13ab)^3.$

$\frac{4096}{32^4} = \frac{8^4}{32^4} = \left(\frac{8}{32}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}.$

VI. Oft ist es hierbei von Vorteil, die Basen in Primfaktoren zu zerlegen.

$$6^{5-2x} \cdot 9^{2x-3} \cdot 8^{x-2} = \frac{6^5}{6^{2x}} \cdot \frac{9^{2x}}{9^3} \cdot \frac{8^x}{8^2} = \frac{(2\cdot 3)^5 \cdot (3^2)^{2x} \cdot (2^3)^x}{(2\cdot 3)^{2x} \cdot (3^2)^3 \cdot (2^3)^2}$$

$$= \frac{2^5 \cdot 3^5 \cdot (3^4)^x \cdot (2^3)^x}{(2^2 \cdot 3^2)^x \cdot 3^6 \cdot 2^6} = \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{3^4 \cdot 2^3}{2^2 \cdot 3^2}\right)^x = \frac{1}{6}(3^2 \cdot 2)^x$$

$$= \frac{18^x}{6}.$$

$$\frac{72^6 \cdot 75^5}{45^7 \cdot 48^4} = \frac{(2^3 \cdot 3^2)^6 \cdot (3 \cdot 5^2)^5}{(3^2 \cdot 5)^7 \cdot (2^4 \cdot 3)^4} = \frac{2^{18} \cdot 3^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^{10}}{3^{14} \cdot 5^7 \cdot 2^{16} \cdot 3^4}$$

$$= \frac{2^2 \cdot 5^3}{3} = \frac{4 \cdot 125}{3} = 166\tfrac{2}{3}.$$

§. 58. Multiplication eines Polynom mit einem Monom.

1. Nach §. 11, 4 und 5 ist jedes Glied des Polynom mit dem Monom zu multiplicieren.

Beispiele.

$2(x - 3y - 5z)$? Hier ist 2 mit x, 2 mit $-3y$ und 2 mit $-5z$ zu multiplicieren (s. §. 55) $= 2x - 6y - 10z$.

$$3a(4a + 5b - 6c) = 3a \cdot 4a + 3a \cdot 5b - 3a \cdot 6c$$
$$= 12a^2 + 15ab - 18ac.$$

$7a + 9b - 4(2a - b)$ bedeutet, dafs $7a + 9b$ um das 4fache von $2a - b$ vermindert werden soll. Man könnte also rechnen:

$$7a + 9b - [4(2a - b)] = 7a + 9b - (8a - 4b)$$
$$= 7a + 9b - 8a + 4b = 13b - a.$$

Indessen ist es vorteilhafter, die Aufgabe in folgender Weise aufzufassen:

$7a + 9b$ ist um das -4fache von $2a - b$ zu vermehren. Da nun $(-4)(2a - b) = -8a + 4b$ (denn es ist -4 mit $2a$ und -4 mit $-b$ zu multiplicieren), so ist also $7a + 9b$ um $-8a + 4b$ zu vermehren, und man erhält $7a + 9b - 8a + 4b$, wie oben.

Geht mithin dem Produkt aus einem Monom und einem Polynom ein Minuszeichen voraus, so multipliciert man sogleich das mit dem Minuszeichen versehene Monom mit jedem Gliede des Polynom, wodurch zugleich die Parenthese aufgelöst wird.

$$4(3a - 5ab + 2ac) - 7a(1 + 3b - 2c)$$
$$= 12a - 20ab + 8ac - 7a - 21ab + 14ac$$
$$= 5a - 41ab + 22ac.$$

$$5x - y - 4\tfrac{1}{4} - 1\tfrac{2}{3}\left(\frac{x}{10} - \frac{y}{2} + 3\tfrac{3}{4}\right) + \frac{5x}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{3x} - \frac{y}{x}\right)$$

$$= 5x - y - 4\tfrac{1}{4} - \frac{x}{6} + \frac{5y}{6} - 6\tfrac{1}{4} + \frac{3x}{2} + 3\tfrac{1}{3} - \frac{5y}{2}$$

$$= \frac{19x}{3} - \frac{8y}{3} - 7\tfrac{1}{6}.$$

$$\frac{4a}{3}\cdot\left(\frac{2b}{3}-\frac{5a}{6}\right)\cdot\frac{9}{8a^2}=\frac{4a}{3}\cdot\frac{9}{8a^2}\left(\frac{2b}{3}-\frac{5a}{6}\right)$$
$$=\frac{3}{2a}\left(\frac{2b}{3}-\frac{5a}{6}\right)=\frac{b}{a}-1\tfrac{1}{4}.$$

2. $5[2(a-4b)-3(2a-5b)]-7(2a-9b)$
$=5[2a-8b-6a+15b]-14a+63b.$

Bevor man mit einem Polynom rechnet, sind in demselben die gleichartigen Glieder zusammenzuziehen. Daher:

$$5(7b-4a)-14a+63b=98b-34a.$$

$$x-3\underset{a}{(}5x-2y-4\underset{b}{[}3y+7x-2\underset{c}{(}x-9y\underset{d}{)}+11\underset{e}{(}2x-y\underset{f}{)}\underset{g}{]}$$
$$-9\underset{h}{[}2\underset{i}{(}3x-8y\underset{k}{)}-x+13y\underset{l}{]}\underset{m}{)}=?$$

Hier soll von x das 3fache eines Ausdrucks subtrahiert werden, der von den beiden Parenthesenstrichen a und m eingeschlossen ist. Innerhalb dieser runden Parenthese am befinden sich die eckigen Parenthesen bg und hl nebengeordnet. Innerhalb jener Parenthese bg befinden sich wieder die runden Parenthesen cd und ef nebengeordnet. Die Parenthese hl schliefst nur die Parenthese ik ein. Mithin sind zunächst die Parenthesen cd, ef und ik aufzulösen, hierauf bg und hm, endlich am. Man erhält:

$$x-3(5x-2y-4[3y+7x-2x+18y+22x-11y]$$
$$-9[6x-16y-x+13y])$$
$$=x-3(5x-2y-4[27x+10y]-9[5x-3y])$$
$$=x-3(5x-2y-108x-40y-45x+27y)$$
$$=x-3(-148x-15y)$$
$$=x+444x+45y$$
$$=445x+45y.$$

3. $(-1)(a-b-c+d)=-1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c-1\cdot d$
$=-a+b+c-d.$

Multipliciert man also einen mehrteiligen Ausdruck mit -1, so werden die sämtlichen Glieder desselben in die entgegengesetzten verwandelt. Zugleich mufs das gefundene Produkt den entgegengesetzten Wert jenes multiplicierten Polynom haben (s. §. 51, 4, b, 2. Zus.).

$x-y$ mit -1 multipliciert $=-x+y=y-x$.

$\frac{7-3a-4b}{5}$ mit 1 multipliciert entweder $=-\frac{7-3a-4b}{5}$,

oder $=\frac{(7-3a-4b)(-1)}{5}=\frac{3a+4b-7}{5}$

(s. §. 13, 19).

$$\left(\frac{a+b}{a+2b}\right)-3)\cdot(-1)=-\frac{a+b}{a+2b}+3=3-\frac{a+b}{a+2b}.$$

$$\left(\frac{x-1}{a-b}+2n\right)\cdot(-1)=\frac{1-x}{a-b}-2n \text{ (s. §. 13, 19).}$$

Zusatz. Nach §. 57, 8 kann eine Potenz aus dem Zähler in den Nenner und aus dem Nenner in den Zähler gesetzt werden, wenn man den Exponent mit -1 multipliciert. Daher:

$$\frac{ab^{1-n}}{c}=\frac{a}{b^{n-1}c}.$$

$$\frac{a^{x-y}}{b^{u-z}}=\frac{b^{z-u}}{a^{y-x}}.$$

4. $(a-3b)\left[\frac{5a}{a-3b}-\frac{2a}{a-3b}\right]$?

Denkt man sich $a-3b$ als Monom, so ist dasselbe mit jedem der beiden Glieder (Brüche) der Parenthese [ ] zu multiplicieren, daher:

$$=(a-4b)\cdot\frac{5a}{a-3b}-(a-3b)\cdot\frac{2a}{a-3b}$$

$$=5a-2a \text{ (§. 13, 10 und §. 55, 2, Zus.)} =3a.$$

$$\left[\frac{2x-9a}{5x-4a}-\frac{x-7a}{5x-4a}+\frac{2x}{3(5x-4a)}\right]\cdot(5x-4a)?$$

Der Ungeübte macht oft den Fehler, dafs er die Zeichen der Glieder des Zählers unverändert läfst, wenn der Nenner eines nach einem Minuszeichen stehenden Bruches wegfällt. Er rechnet z. B.

$$-\frac{x-7a}{5x-4a}\cdot(5x-4a)=-x-7a.$$

Um diesen Fehler zu vermeiden, denke man sich den Zähler in Parenthese (s. §. 13, 10, 1. Anmerk.). Daher:

$$=\frac{2x-9a}{5x-4a}\cdot(5x-4a)-\frac{(x-7a)}{5x-4a}\cdot(5x-4a)$$

$$+\frac{2x}{3(5x-4a)}\cdot(5x-4a)$$

$$=2x-9a-(x-7a)+\frac{2x(5x-4a)}{3(5x-4a)}$$

$$=2x-9a-x+7a+\frac{2x}{3}=\frac{5x}{3}-2a.$$

5. $7\left[5x-4\cdot\frac{x-3}{7}\right]$? Diese Aufgabe hat man sich in der Form $7\left(5x-4\cdot\frac{a}{7}\right)$ zu denken, wo $4\cdot\frac{a}{7}$, also auch $4\cdot\frac{x-3}{7}$

als ein Glied zu betrachten ist (s. §. 52, 10). Mithin ist 7 mit $5x$ und 7 mit $4 \cdot \frac{x-3}{7}$ zu multiplicieren. Die letztere Multiplication ist die Multiplication eines Produkts (s. §. 11, 8), wobei man 7 nur mit $\frac{x-3}{7}$, nicht aber mit 4 multiplicieren wird. Man erhält

$$35x - 4 \cdot (x-3) = 35x - 4x + 12 = 31x + 12.$$

$$\left[2a - \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2+b}{a}\right] \cdot a = 2a^2 - \frac{3}{4}(a^2+b)$$
$$= 2a^2 - \frac{3a^2}{4} - \frac{3b}{4} = \frac{5a^2}{4} - \frac{3b}{4}.$$

$5\left(\frac{a}{2} - 1\frac{1}{4}\right)(a+5)$ mit 4 multipliciert $= 5(2a-5)(a+5)$.

$-1\frac{1}{6} \cdot \frac{a+1}{2a-5}$ multipliciert mit $6(2a-5)$

$$= -1\tfrac{1}{6} \cdot 6 \cdot \frac{a+1}{2a-5} \cdot (2a-5) = -7(a+1).$$

Um $3\frac{1}{2}\,(2x - 3\frac{2}{3})\left(\frac{5x}{6} + \frac{8}{9}\right)$ mit 216 zu multiplicieren, denkt denkt man sich $216 = 4 \cdot 3 \cdot 18$ und multipliciert $3\frac{1}{2}$ mit 4, $(2x - 3\frac{2}{3})$ mit 3 und $\left(\frac{5x}{6} + \frac{8}{9}\right)$ mit 18. Daher $= 14(6x-11)(15x+16)$.

A besitzt $\frac{2a}{3}$, B $1\frac{4}{5}$ *M.* weniger als A, C $\frac{3}{4}$ von B (s. §. 35, 7), D 15 mal so viel als C. Wie viel hat D?

B hat $\frac{2a}{3} - 1\frac{4}{5}$, C: $\frac{3}{4}\left(\frac{2a}{3} - 1\frac{4}{5}\right)$, D: $\frac{3}{4}\left(\frac{2a}{3} - 1\frac{4}{5}\right)$ multipliciert mit $15 = \frac{3}{4}(10a - 27)$.

6. $25\left(\frac{a}{5} - \frac{b}{10}\right)^2 = 5^2\left(\frac{a}{5} - \frac{b}{10}\right)^2 = \left[5\left(\frac{a}{5} - \frac{b}{10}\right)\right]^2$
$$= \left(a - \frac{b}{2}\right)^2.$$

Dies hätte man auch unmittelbar nach der in §. 57, 17, II gegebenen Regel erhalten!

$64(1\frac{3}{10} + \frac{a}{8} + b)^2 = ?$ Da $64 = 8^2$, so erhält man nach §. 57 17, II: $(10{,}4 + a + 8b)^2$.

$$27\left(\frac{2x}{3}-1\right)^3 = 3^3\left(\frac{2x}{3}-1\right)^3 = \left[3\left(\frac{2x}{3}-1\right)\right]^3 = (2x-3)^3$$

(s. §. 57, 17, III).

$$4a^2\left(\frac{b}{2a}+\frac{c}{4}\right)^2 = \left(b+\frac{ac}{2}\right)^2; \text{ denn } (2a)^2\left(\frac{b}{2a}+\frac{c}{4}\right)^2$$

$$=\left[2a\left(\frac{b}{2a}+\frac{c}{4}\right)\right]^2.$$

§. 59. Anwendungen auf das Erweitern und Ausheben.

1. Erweitern.

I. $\dfrac{\frac{5}{a}}{\frac{2}{b}}$ mit ab erweitert $= \dfrac{\frac{5}{a}\cdot a\cdot b}{\frac{2}{b}\cdot b\cdot a} = \dfrac{5b}{2a}$.

Bei eingliedrigen Zählern und Nennern kann also die schon in §. 37 gegebene Regel angewendet werden.

$$\frac{\frac{2x}{3y}\cdot\frac{5}{9a}}{\frac{7}{4b}\cdot\frac{3}{5a}} = \frac{2x\cdot 5\cdot 4b\cdot 5a}{3y\cdot 9a\cdot 7\cdot 3} = \frac{200bx}{567y}.$$

II. Bei mehrgliedrigen Zählern und Nennern hat man mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen (Generalnenner) der Specialnenner zu erweitern.

$\dfrac{5}{x+\frac{1}{2}}$ mit 2 erweitert $= \dfrac{5\cdot 2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2} = \dfrac{10}{2x+1}$.

$\dfrac{3x+3\frac{1}{2}}{\frac{5x}{6}-1\frac{1}{4}}$ mit dem Generalnenner von 2, 4 und 6, also mit

12 erweitert $= \dfrac{(3x+3\frac{1}{2})\cdot 12}{\left(\frac{5x}{6}-1\frac{1}{4}\right)\cdot 12} = \dfrac{36x+42}{10x-15}$.

$\dfrac{5\cdot\frac{3a}{b}-1}{\frac{2}{b}+3}$ mit b erweitert $= \dfrac{5\cdot 3a-b}{2+3b} = \dfrac{15a-b}{2+3b}$.

III. $\dfrac{\dfrac{7a}{18b^2} - \dfrac{5}{4ab}}{\dfrac{11}{12ab^2} + \dfrac{1}{6a} - 2}$ ist mit dem Generalnenner von

$18b^2$, $4ab$, $12ab^2$ und $6a$ zu erweitern.

Man sucht diesen Generalnenner ganz nach §. 27:

Die höchste Potenz von $2 = 4$		
" " " " $3 = 9$		$36ab^2$ der Generalnenner, daher:
" " " " $a = a$		
" " " " $b = b^2$		

$$= \frac{\left(\dfrac{7a}{18b^2} - \dfrac{5}{4ab}\right) \cdot 36ab^2}{\left(\dfrac{11}{12ab^2} + \dfrac{1}{6a} - 2\right) \cdot 36ab^2} ?$$

Die Brüche multipliciert man mit dem Generalnenner, indem man zuerst letzteren durch den Nenner des Bruches dividiert und den Quotient hierauf mit dem Zähler multipliciert. Z. B. $\dfrac{7a}{18b^2} \cdot 36ab^2$ $= \dfrac{36ab^2}{18b^2} \cdot 7a = 2a \cdot 7a = 14a^2$. Daher

$$= \frac{14a^2 - 45b}{33 + 6b^2 - 72ab^2}.$$

IV. Der reciproke Wert von $\dfrac{a}{9b} - \dfrac{b}{15a}$ ist

$$= \frac{1}{\dfrac{a}{9b} - \dfrac{b}{15a}} = \frac{1 \cdot 45ab}{\left(\dfrac{a}{9b} - \dfrac{b}{15a}\right) \cdot 45ab} = \frac{45ab}{5a^2 - 3b^2}.$$

V. $\dfrac{2\frac{1}{3}(2x+1)}{4\left(\dfrac{5x}{9} - 2\right)}$ mit 9 erweitert (s. §. 11, 8) $= \dfrac{21(2x+1)}{4(5x-18)}$.

$$\frac{2\frac{1}{2}\left(\dfrac{x}{14} + \dfrac{1}{21}\right)}{11\left(\dfrac{5x}{6} + 7\right)\left(\dfrac{x}{4} + 1\frac{1}{6}\right)} ?$$

Der Generalnenner des 1. Faktor im Zähler ist 2, des 2. Faktor 42, des 2. Faktor im Nenner 6, des 3. Faktor 12. Damit die Brüche verschwinden, ist der Zähler mit $2 \cdot 42$, der Nenner mit

$6 \cdot 12$ zu multiplicieren, folglich der Bruch mit dem Generalnenner von $2 \cdot 42$ und $6 \cdot 12$, d. i. mit $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$ in folgender Weise zu erweitern:

$$= \frac{2\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \left(\frac{x}{14} + \frac{1}{21}\right) \cdot 42}{11 \cdot 7 \cdot \left(\frac{5x}{6} + 7\right) \cdot 6 \cdot \left(\frac{x}{4} + 1\frac{1}{6}\right) \cdot 12} = \frac{30(3x+2)}{77(5x+42)(3x+14)}.$$

$$\frac{a + x^{-1}}{2} = \frac{a + \frac{1}{x}}{2} \text{ mit } x \text{ erweitert} = \frac{ax+1}{2x}.$$

VI. Sind Zähler und Nenner negativ oder haben dieselben mehr negative als positive Glieder, so erweitert man mit -1.

Beispiele.

$$\frac{-a-2b}{-3-4c} = \frac{(-a-2b)\cdot(-1)}{(-3-4c)\cdot(-1)} = \frac{a+2b}{3+4c}.$$

$$\frac{1-7x}{2-5x-8x^2} = \frac{7x-1}{8x^2+5x-2}.$$

Mithin ist $\frac{a-b}{c-d}$ mit -1 zu erweitern, wenn der neue Bruch den Nenner $d-c$ oder den Zähler $b-a$ erhalten soll. Man erhält

$$\frac{-a+b}{-c+d} = \frac{b-a}{d-c}.$$

$\frac{a+b}{c-d}$ mit 1 erweitert $= \frac{-a-b}{d-c}$. Ein solches Erweitern wäre jedoch wegen des negativen Zählers unstatthaft.

$(3x-5y)\left[\frac{7x-4y}{3x-5y} - \frac{y-6x}{5y-3x}\right]$? Damit bei der Multiplication der Brüche der Nenner des 2. Bruches verschwindet, ist zuvor dieser Bruch mit -1 zu erweitern. Daher:

$$= (3x-5y)\left[\frac{7x-4y}{3x-5y} - \frac{6x-y}{3x-5y}\right]$$
$$= 7x - 4y - (6x-y) = x - 3y.$$

$\frac{a-b}{2(c-d)(e-f)}$ mit -1 erweitert $= \frac{b-a}{2(d-c)(e-f)}$ oder $= \frac{b-a}{2(c-d)(f-e)}$, jedoch nicht $\frac{b-a}{2(d-c)(f-e)}$ (s. §. 11, 8).

2. Ausheben.

Nach §. 11, 6 und 7 kann man den gemeinsamen Faktor eines vielteiligen Ausdrucks ausheben, d. h. aus allen Gliedern entfernen

(oder vielmehr den Ausdruck durch diesen gemeinsamen Faktor dividieren — s. §. 13, 12, Anmerk.), dann den zurückbleibenden vielteiligen Ausdruck in Parenthese stellen und diese wieder mit jenem gemeinsamen Faktor multiplicieren.

1. Beispiel. $ab + ac - ad$? Der gemeinsame Faktor aller Glieder ist a. Entfernt man diesen, so bleibt $a + c - d$ zurück, welches Polynom in Parenthese zu stellen und die Parenthese alsdann mit jenem gemeinsamen Faktor a zu multiplicieren ist. Daher ist

$$ab + ac - ad = a(b + c - d).$$

Als Probe mag der Ungeübte den erhaltenen Ausdruck wieder ausmultiplicieren und nachsehen, ob jenes gegebene Polynom entsteht.

2. Beispiel. $15a^2c + 35abc - 40abd$, d. i. $15aac$ u. s. w. Da $5ac$ der gemeinsame Faktor, so erhält man

$$5ac(3a + 7b - 8d).$$

3. Beispiel. $x - ax$? Hier ist zuvor der Coeff. 1 zu ergänzen.

$$1 \cdot x - ax = (1 - a)x.$$

4. Beispiel. $\frac{a}{bx} + \frac{c}{dx} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot x} + \frac{c \cdot 1}{d \cdot x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{x} + \frac{c}{d} \cdot \frac{1}{x}$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\frac{1}{x}.$$

5. Beispiel. $-a^2 - ab - ac$? Beginnt das Polynom mit einem Minuszeichen, so denkt man sich nach diesem Zeichen eine Parenthese; daher:

$$= -(a^2 + ab + ac) = -a(a + b + c).$$

6. Beispiel. $-\frac{28x}{9y} - \frac{16ax}{15y} + \frac{32a^2x}{27y}$

$$= \frac{32a^2x}{27y} - \frac{16ax}{15y} - \frac{28x}{9y}$$

$$= \frac{4x}{3y}\left(\frac{8a^2}{9} - \frac{4a}{5} - \frac{7}{3}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{8a^2}{9} - \frac{4a}{5} - \frac{7}{3}\right)\frac{x}{y}.$$

II. Das Ausheben vereinfacht, denn die Berechnung von $87 \cdot 69 - 87 \cdot 47$ würde weit mehr Arbeit erfordern als

$$87 \cdot (69 - 47) = 87 \cdot 22.$$

Man bildet daher überall derartige Produkte. So ist als Resultat nicht $a - bc - bd$, sondern $a - b(c + d)$ zu setzen.

Die schon vorhandene Produktform behält man mithin bei, läfst daher z. B. $x = 5a(2b - 3c)$ oder $x = (a + b)^2$ unverändert

stehen; denn $(17 + 14)^2 = 31^2 = 31 \cdot 31$ würde leichter zu berechnen sein als

$$\begin{aligned}(17 + 14)^2 &= (17 + 14)(17 + 14) \\ &= 17 \cdot 17 + 17 \cdot 14 + 17 \cdot 14 + 14 \cdot 14 \\ &= 17 \cdot 17 + 2 \cdot 17 \cdot 14 + 14 \cdot 14.\end{aligned}$$

Nur in zwei Fällen löst man die Produktform auf:

1) Wenn nach dem Auflösen eine noch gröfsere Vereinfachung des Gesamtausdrucks möglich ist.

Beispiel.

$$13(2b - 5a) - 7(4b - 9a) = 26b - 65a - 28b + 63a$$
$$= -2a - 2b = -(2a + 2b) = -2(a + b).$$

2) Wenn die unbekannten Gröfsen von den bekannten getrennt werden müssen.

Beispiele.

$$\begin{aligned}4(3x - 2) + 3(ax - 7) &= 10; \\ 12x - 8 + 3ax - 21 &= 10; \\ 12x + 3a - 8 - 21 &= 10; \\ (12 + 3a)x - 29 &= 10; \\ 3(4 + a)x - 29 &= 10.\end{aligned}$$

III. Beispiele zur Übung.

a) $15a^3x - 10a^2bx = 5a^2x \cdot 3a - 5a^2x \cdot 2b$
$$= 5a^2x(3a - 2b) = 5a^2(3a - 2b)x.$$

b) $abx^n - nb^2x^n = bx^n(a - nb) = b(a - nb)x^n.$

c) $a^3 - a^4b^3 + a^5b^2 = a^3[1 - ab^3 + a^2b^2] = a^3[1 - ab^2(b - a)]$
oder besser $a^3[1 + a^2b^2 - ab^3] = a^3[1 + ab^2(a - b)]$.

d) $4(7a - 14b) = 4 \cdot 7(a - 2b) = 28(a - 2b).$

e) $$-\frac{ax}{6by} - \frac{cx}{12dy} = -\frac{x}{6y}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{2d}\right)$$
$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{2d}\right)\frac{x}{y}.$$

f) $$\frac{-42x - 28y}{z} = \frac{-14(3x + 2y)}{+z} \text{ (und da } - : + = -)$$
$$= -\frac{14(3x + 2y)}{z}.$$

g) $ax - by - cx + dy = ax - cx - by + dy$
$$= (a - c)x - (by - dy) = (a - c)x - (b - d)y.$$

h) $-(a + 2d)m - (5a + 6d)m$
$$\begin{aligned}&= -[(a + 2d)m + (5a + 6d)m] \\ &= -(a + 2d + 5a + 6d)m = -(6a + 8d)m \\ &= -2(3a + 4d)m.\end{aligned}$$

i) $(a-b)m-(a-b)n$? Entfernt man hier den gemeinsamen Faktor $a-b$, so bleibt $m-n$ zurück. Daher:
$$=(a-b)(m-n).$$

k) $5m-3n-7a(5m-3n)=1\cdot(5m-3n)-7a(5m-3n)$
$=(1-7a)(5m-3n).$

l) $(a+3b)(b-a)-4(4a-3b)(b-a)$
$=[(a+3b)-4(4a-3b)](b-a)$
$=(a+3b-16a+12b)(b-a)=(15b-15a)(b-a)$
$=15(b-a)(b-a)=15(b-a)^2.$

m) $(11a-4c)(5a+3c)-7(5a-4c)(5a+3c)$
$=[11a-4c-7(5a-4c)](5a+3c)$
$=(24c-24a)(5a+3c)=24(c-a)(5a+3c).$

n) $3(13x-5y)(2x+5y)-17(2x+5y)^2$
$=[3(13x-5y)-17(2x+5y)](2x+5y)$
$=(5x-100y)(2x+5y)=5(x-20y)(2x+5y).$

o) $(7a-4b)^4-(11a-16b)(7a-4b)^3$
$=[(7a-4b)-(11a-16b)](7a-4b)^3$
$=(12b-4a)(7a-4b)^3=4(3b-a)(7a-4b)^3.$

p) $3a^{n-2}+6a^{n-3}$? Da $n-3$ kleiner als $n-2$, so denkt man sich $3a^{n-3}\cdot a^1+6a^{n-3}=3a^{n-3}(a+2).$

q) $ab-ad+bc-cd=a(b-d)+c(b-d)=(a+c)(b-d).$
Hier zeigt sich vorzüglich der grofse Unterschied zwischen der Berechnung von
$$67\cdot 46-67\cdot 29+23\cdot 46-23\cdot 29$$
und $(67+23)(46-29)$, d. i. $90\cdot 17$.

r) $12a^2+20am-21an-35mn$
$=12a^2+20am-(21an+35mn)$
$=4a(3a+5m)-7n(3a+5m)$
$=(4a-7n)(3a+5m).$

s) $99ab-27bc-44ac+12c^2$
$=99ab-27bc-(44ac-12c^2)$
$=9b(11a-3c)-4c(11a-3c)$
$=(9b-4c)(11a-3c).$

t) $\left.\begin{array}{r}3ax-4by-9cz\\ -5cx+7dy-hz\end{array}\right\}$ addiert!

Für z z. B. denke man sich

$$-9ez - hz = -(9ez + hz) = -(9e + h)z.$$

Daher ist die gesuchte Summe:

$$(3a - 5c)x + (7d - 4b)y - (9e + h)z.$$

u) $\left.\begin{array}{l}(9a - 2b)x - (a - 6b)y - (a - 3b)z \\ (3a + 10b)x - (9a - 14b)y + 2(a + 6b)z\end{array}\right\}$ subtr.!

Man denke sich (s. §. 54, 2):

$$(9a - 2b)x - (3a + 10b)x = [9a - 2b - (3a + 10b)]x$$
$$= (6a - 12b)x$$
$$-(a - 6b)y + (9a - 14b)y = [9a - 14b - (a - 6b)]y$$
$$= (8a - 8b)y$$
$$-(a - 3b)z - 2(a + 6b)z = -[(a - 3b)z + 2(a + 6b)z]$$
$$= -[a - 3b + 2(a + 6b)]z$$
$$= -(3a + 9b)z$$

Daher der gesuchte Rest:

$$= 6(a - 2b)x + 8(a - b)y - 3(a + 3b)z.$$

v) $(ab + ac)^2 = [a(b + c)]^2 = a^2(b + c)^2.$

w) $(4x - 12y)^2 = [4(x - 3y)]^2 = 16(x - 3y)^2.$

Aus v und w folgt die Regel: Der gemeinsame Faktor der Glieder der Basis eines Quadrats mufs ins Quadrat erhoben werden, wenn er als Faktor des Quadrats herausgestellt werden soll.

x) $(ab - 5ac)^3 = [a(b - 5c)]^3 = a^3(b - 5c)^3.$

§. 60. Multiplication eines Polynom mit einem Polynom.

1. Nach §. 11, 9 ist jedes Glied des einen Polynom mit jedem Gliede des andern zu multiplicieren.

Beispiel. $(5a - 2b + 3c)(6a + 7b - 4c)$?

Obgleich es gleichgültig sein müfste, in welcher Ordnung man multipliciert, so ist es doch im allgemeinen vorzuziehen, zuerst mit dem 1. Gliede des 2. Faktor alle Glieder des 1. Faktor zu multiplicieren, dann mit dem 2. Gliede des 2. Faktor alle Glieder des 1. Faktor u. s. w. Folglich:

$$= 5a \cdot 6a - 2b \cdot 6a + 3c \cdot 6a + 5a \cdot 7b - 2b \cdot 7b + 3c \cdot 7b$$
$$- 5a \cdot 4c + 2b \cdot 4c - 3c \cdot 4c$$
$$= 30a^2 - 12ab + 18ac + 35ab - 14b^2 + 21bc - 20ac$$
$$+ 8bc - 12c^2$$
$$= 30a^2 + 23ab - 2ac - 14b^2 + 29bc - 12c^2.$$

Haben die Glieder beider Faktoren, wie es hier der Fall war, gleiche Hauptgröfsen, oder sind sie nach Potenzen derselben Hauptgröfse geordnet (s. 2. Beisp.), so ist es oft von Vorteil, schematisch so zu multiplicieren, dafs die gleichartigen Glieder der Partialprodukte untereinander zu stehen kommen, mithin das aus dem 2. Gliede des 2. Faktor entstehende Partialprodukt eine Stelle rechts von dem aus dem 1. Gliede des 2. Faktor hervorgegangenen zu setzen u. s. w. Daher:

$$\begin{array}{l} \underline{(5a - 2b + 3c)(6a + 7b - 4c)} \\ 30a^2 - 12ab + 18ac \\ \qquad + 35ab - 14b^2 + 21bc \\ \qquad\qquad - 20ac + 8bc - 12c^2 \\ \hline = 30a^2 + 23ab - 2ac - 14b^2 + 29bc - 12c^2 \end{array}$$

Um das Resultat zu prüfen, kann man die sogen. Einerprobe anwenden, die darin besteht, dafs man jeden Buchstaben $= 1$ setzt. Hier also:

$$(5 - 2 + 3)(6 + 7 - 4) = 6 \cdot 9 = 54.$$

Das Resultat giebt:

$$30 + 23 - 2 - 14 + 29 - 12 = 54, \text{ also dasselbe!}$$

2. Beispiel.

$$\begin{array}{l} \underline{(8x^3 - 11x^2 + 3x - 13)(3x^2 - x - 9)} \\ 24x^5 - 33x^4 + 9x^3 - 39x^2 \\ \qquad - 8x^4 + 11x^3 - 3x^2 + 13x \\ \qquad\qquad - 72x^3 + 99x^2 - 27x + 117 \\ \hline = 24x^5 - 41x^4 - 52x^3 + 57x^2 - 14x + 117. \end{array}$$

Bei so regelmäfsig fortschreitenden Potenzen der Hauptgröfse schreibt man nur:

$$\begin{array}{l} \underline{(8 - 11 + 3 - 13)(3 - 1 - 9)} \\ 24 - 33 + 9 - 39 \\ \quad - 8 + 11 - 3 + 13 \\ \qquad - 72 + 99 - 27 + 117 \\ \hline = 24 - 41 - 52 + 57 - 14 + 117. \end{array}$$

Die Potenzen von x sind leicht zu ergänzen, da das 1. Glied $8x^3 \cdot 3x^2$, das letzte $-13 \cdot -9$ sein mufs.

3. Beispiel. $(5 - 6x)(7 + 4x) = 35 - 42x + 20x - 24x^2$
$= 35 - 22x - 24x^2.$

Die Multiplication der nach einerlei Potenzen geordneten 2gliederigen Faktoren kann auch der Ungeübte leicht mit den folgenden 3 Gliedern niederschreiben:

1) das Produkt der beiden niedrigsten Glieder
(hier $5 \cdot 7 = 35$);
2) die sogleich im Kopfe berechnete Summe der Produkte aus dem niedrigsten Gliede des einen und dem höchsten Gliede des andern Faktor
(hier $-6x \cdot 7 + 5 \cdot 4x = -42x + 20x = -22x$);
3) das Produkt der beiden höchsten Glieder
(hier $-6x \cdot 4x = -24x^2$).

In gleicher Weise:

4. Beispiel. $(11 - 8x)(10x - 3) = -33 + 134x - 80x^2$;
denn ohne x: $11 \cdot -3$
mit x^1: $11 \cdot 10 + (-8 \cdot -3)$
„ x^2: $-8x \cdot 10x$.

5. Beispiel. $1\frac{1}{5}\left(\frac{2x}{3} - 1\frac{1}{4}\right)(2x + 3\frac{1}{2})$?

Bei Brüchen wendet man in der Regel jene Abkürzung nicht an. Bei mehr als 2 Faktoren multipliciert man ferner am besten zuerst die zusammengesetzten Faktoren. Daher:

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{4x^2}{3} - \frac{5x}{2} + \frac{7x}{3} - \frac{35}{8}\right)$$

$$= \frac{8x^2}{5} - 3x + \frac{14x}{5} - \frac{21}{4} = \frac{8x^2}{5} - \frac{x}{5} - 5\frac{1}{4}.$$

6. Beispiel. $6a^2 - 15a - 3(2 - 11a)(8a + 3)$?

Hier soll von $6a^2 - 15a$ das Produkt $3(2 - 11a)(8a + 3)$ subtrahiert werden. Wäre $6a^2 - 15a - 3$ mit $(2 - 11a)(8a + 3)$ zu multiplicieren, so müfste $(6a^2 - 15a - 3)(2 - 11a)(8a - 3)$ geschrieben werden. Daher:

$$= 6a^2 - 15a - 3(-88a^2 - 17a + 6)$$
$$= 6a^2 - 15a + 264a^2 + 51a - 18$$
$$= 270a^2 + 36a - 18$$
$$= 18(15a^2 + 2a - 1).$$

7. Beispiel.

$$4\frac{1}{2} + \frac{x^2}{60} - \frac{2}{3x}\left(\frac{7x}{4} - 5\right)\left[\frac{x}{6} - \frac{x^2}{10}\right] + \left(\frac{x}{3} + 2\frac{1}{2}\right)\left(3 - \frac{2x}{5}\right)$$

$$= 4\frac{1}{2} + \frac{x^2}{60} - \frac{2}{3x}\left[\frac{7x^2}{24} - \frac{5x}{6} - \frac{7x^3}{40} + \frac{x^2}{2}\right] + x + 7\frac{1}{2}$$
$$- \frac{2x^2}{15} - x$$

$$= 12 + \frac{x^2}{60} - \frac{7x}{36} + \frac{5}{9} + \frac{7x^2}{60} - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{15}$$

$$= 12\tfrac{5}{9} - \frac{19x}{36}.$$

8. Beispiel. $(a - 3b)\left[\frac{7a - 13b}{a - 3b} + \frac{2a - 5b}{3b - a} - 2\tfrac{2}{3}\right]$?

Hier ist zunächst der 2. Bruch mit -1 zu erweitern.

$$= (a - 3b)\left[\frac{7a - 13b}{a - 3b} + \frac{5b - 2a}{a - 3b} - \frac{8}{3}\right]$$

$$= 7a - 13b + 5b - 2a - \frac{8}{3}(a - 3b)$$

$$= \frac{7a}{3}.$$

9. Beispiel. $(3x + 15y - 4x - 7y)(5x - y + 9x + 4y)$?

Hier wird man nicht 16 Produkte berechnen, sondern zuvor die gleichartigen Glieder vereinigen.

$$= (8y - x)(14x + 3y) = -14x^2 + 109xy + 24y^2.$$

10. Beispiel.

$$(4x - 3)(5x + 6)\left[1\tfrac{1}{2} - \frac{1 - x}{3 - 4x} - 4\tfrac{1}{3} + 1\tfrac{7}{9}\right]?$$

Auch hier sind die gleichartigen Glieder zu addieren und das 2. Glied der [ ] mit -1 zu erweitern.

$$= (4x - 3)(5x + 6)\left[-\frac{19}{18} - \frac{x - 1}{4x - 3}\right].$$

Zunächst ist nur $4x - 3$ mit [ ] zu multiplicieren.

$$= (5x + 6)\left[-\frac{19}{18}(4x - 3) - (x - 1)\right]$$

$$= (5x + 6)\left(-\frac{38x}{9} + \frac{19}{6} - x + 1\right)$$

$$= (5x + 6)\left(\frac{25}{6} - \frac{47x}{9}\right)$$

$$= 25 - \frac{21x}{2} - \frac{235x^2}{9}.$$

11. Beispiel. $\frac{(5 - 4x)(2 - x)}{25x - 29}\left[\frac{6}{5 - 4x} - \frac{14}{2 - x}\right]$

$$= \frac{1}{25x - 29}[6(2 - x) - 14(5 - 4x)]$$

$$= \frac{50x - 58}{25x - 29} = \frac{2(25x - 29)}{25x - 29} = 2.$$

12. Beispiel.

$$6(2a-5)^2\left[\frac{5(2a^2-3)}{3(2a-5)^2}-\frac{3a-2}{2(5-2a)}\right]$$

$$=6(2a-5)^2\left[\frac{5(2a^2-3)}{3(2a-5)^2}-\frac{2-3a}{2(2a-5)}\right].$$

Die Multiplication des 2. Bruches giebt:

$$\frac{6(2a-5)^2(2-3a)}{2(2a-5)}=\frac{6(2a-5)(2a-5)(2-3a)}{2(2a-5)},$$

$$=3(2a-5)(2-3a).$$

Folglich erhält man:

$$2\cdot 5(2a^2-3)-3(2a-5)(2-3a)$$

$$=20a^2-30-3(-6a^2+19a-10)$$

$$=38a^2-57a=19a(2a-3).$$

13. Beispiel.

$$12a^2x(5a-7x)\left[\frac{6ax+5}{20a^2x-28ax^2}+\frac{7x-4}{42x^2-30ax}-\frac{1}{15a}\right]?$$

Zusammengesetzte Nenner zerlege man bei solchen Multiplicationen stets in Faktoren (z. B. durch Ausheben), damit man das Heben von Zahlen leichter erkennt.

$$=12a^2x(5a-7x)\left[\frac{6ax+5}{4ax(5a-7x)}+\frac{7x-4}{6x(7x-5a)}-\frac{1}{15a}\right]$$

$$=12a^2x(5a-7x)\left[\frac{6ax+5}{4ax(5a-7x)}+\frac{4-7x}{6x(5a-7x)}-\frac{1}{15a}\right]$$

$$=3a(6ax+5)+2a^2(4-7x)-\frac{4ax}{5}(5a-7x)$$

$$=18a^2x+15a+8a^2-14a^2x-4a^2x+\frac{28ax^2}{5}$$

$$=8a^2+15a+\frac{28ax^2}{5}.$$

14. Beispiel. $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+2b}+\dfrac{1}{2}}{3\frac{1}{2}-\dfrac{5a+7b}{a+2b}}$ mit $2(a+2b)$, dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Specialnenner, erweitert:

$$=\frac{2(a+2b)\cdot\dfrac{a-b}{a+2b}+2(a+2b)\cdot\dfrac{1}{2}}{3\frac{1}{2}\cdot 2(a+2b)-\dfrac{5a+7b}{a+2b}\cdot 2(a+2b)}$$

$$=\frac{2(a-b)+a+2b}{7(a+2b)-2(5a+7b)}=\frac{3a}{-3a}=-\frac{3a}{3a}=-1.$$

15. Beispiel.

$$\frac{\frac{4b-11a}{8b-12a}-\frac{7a-4b}{6a-8b}}{\frac{5b-2a}{12b-9a}-\frac{4a+9b}{18a-12b}}=\frac{\frac{4b-11a}{4(2b-3a)}-\frac{7a-4b}{2(3a-4b)}}{\frac{5b-2a}{3(4b-3a)}-\frac{4a+9b}{6(2a-3b)}}$$

(s. 13. Beisp.)

$$=\frac{\frac{11a-4b}{4(3a-2b)}-\frac{7a-4b}{2(3a-4b)}}{\frac{2a-5b}{3(3a-4b)}-\frac{4a+9b}{6(3a-2b)}}.$$

Mit $12(3a-2b)(3a-4b)$ erweitert:

$$=\frac{3(3a-4b)(11a-4b)-6(3a-2b)(7a-4b)}{4(3a-2b)(2a-5b)-2(3a-4b)(4a+9b)}$$

$$=\frac{-27a^2-12ab}{112b^2-98ab}=\frac{27a^2+12ab}{98ab-112b^2}=\frac{3a(9a+4b)}{14b(7a-8b)}.$$

16. Beispiel.

$$\frac{(2ax^3-3bx^2+4cx-5d)(8ax^2+7bx-6c)}{\begin{array}{l}16a^2x^5-24abx^4+32acx^3-40adx^2\\ \qquad\qquad+14abx^4-21b^2x^3+28bcx^2-35bdx\\ \qquad\qquad\qquad\qquad-12acx^3+18bcx^2-24c^2x+30cd\end{array}}$$

$$=16a^2x^5-10abx^4+(20ac-21b^2)x^3+(46bc-40ad)x^2$$
$$-(35bd+24c^2)x+30cd.\quad \text{(Vergl. §. 59, 2, III, t).}$$

17. Beispiel. $[2(a-3b)x^2-5(2a+b)x-(3a+4b)]\cdot[3(a+b)x-7(4a-3b)]$?

Um das Produkt nach x zu ordnen, sind folgende Multiplicationen auszuführen:

$$2(a-3b)x^2\cdot 3(a+b)x=6(a-3b)(a+b)x^3;$$
$$-5(2a+b)x\cdot 3(a+b)x=-15(2a^2+3ab+b^2)x^2;$$
$$-(3a+4b)\cdot 3(a+b)x=-3(3a^2+7ab+4b^2)x;$$
$$2(a-3b)x^2\cdot -7(4a-3b)=-14(4a^2-15ab+9b^2)x^2;$$
$$-5(2a+b)x\cdot -7(4a-3b)=+35(8a^2-2ab-3b^2)x;$$
$$-(3a+4b)\cdot -7(4a-3b)=+7(3a+4b)(4a-3b).$$

Man erhält daher:

$$\begin{array}{l}6(a-3b)(a+b)x^3\\ \quad+[-15(2a^2+3ab+b^2)-14(4a^2-15ab+9b^2)]x^2\\ \quad+[-3(3a^2+7ab+4b^2)+35(8a^2-2ab-3b^2)]x\\ \quad+7(3a+4b)(4a-3b)\end{array}$$

$$= 6(a-3b)(a+b)x^3 - (86a^2 - 165ab + 141b^2)x^2$$
$$+ (271a^2 - 91ab - 117b^2)x + 7(3a+4b)(4a-3b).$$

Hier sind nur die mit x^2 und x auftretenden Produkte ausmultipliciert worden, um die 6 Glieder in 3 vereinigen zu können.

18. Beispiel. $859 \cdot 567 = 487053$ sei bekannt. Wie viel ist $857 \cdot 568$?

Auflösung.

$$(859-2)(567+1) = 859 \cdot 567 - 2 \cdot 567 + 859 \cdot 1 - 2$$
$$= 487053 - 1134 + 859 - 2 = 487053 - 277 = 486776.$$

(Vergl. §. 28, F, 28).

2. Verwandeln eines Trinom in ein Produkt binomer Faktoren.

$$x^2 + 7x + 12 = x^2 + 4x + 3x + 12 = x(x+4) + 3(x+4)$$
$$= (x+3)(x+4).$$

Ein solches Zerlegen wäre offenbar dem Zufall preisgegeben. Es fragt sich also, wie man rationeller zu dem Produkte gelangt. Um diese Frage zu beantworten, schlagen wir den umgekehrten Weg ein.

Es ist $(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$
$$= x^2 + (a+b)x + ab.$$

Um also $x^2 + (a+b)x + ab$, bei welchem Trinom das Quadrat der Hauptgröfse x den Coefficient $+1$ hat, in ein Produkt aus 2 binomen Faktoren zu zerlegen, hat man 2 Zahlen (a und b) zu suchen, die multipliciert das von x freie Glied (nämlich ab) und summiert den Faktor von x (nämlich $a+b$) geben. Die gefundenen Zahlen (a und b) zu der Hauptgröfse addiert ($x+a$ und $x+b$) geben alsdann die beiden Faktoren $(x+a)(x+b)$.

Beispiel. $x^2 + 7x + 12$? Man stelle das von x freie Glied 12 in verschiedener Weise als Produkt aus 2 Faktoren dar, bis die Summe dieser Faktoren dem Coefficient 7 von x^1 gleich ist.

$+12 \cdot +1 = +12$, Summe: $+12 + 1 = +13$;
$+6 \cdot +2 = +12$, „ $+6 + 2 = +8$;
$+4 \cdot +3 = +12$, „ $+4 + 3 = +7$.

$+4$ und $+3$ sind also die gesuchten Zahlen, folglich ist $x+4$ der eine, $x+3$ der andere Faktor und das gesuchte Produkt

$$= (x+4)(x+3).$$

Wäre nicht $x^2 + 7x + 12$, sondern $x^2 - 7x + 12$ gegeben, so hätte man noch weiter gehen müssen:

$-12 \cdot -1 = +12$, Summe: $-12 - 1 = -13$;
$-6 \cdot -2 = +12$, „ $-6 - 2 = -8$;
$-4 \cdot -3 = +12$, „ $-4 - 3 = -7$.

Die gesuchten Zahlen sind alsdann -4 und -3, das gesuchte Produkt daher $= (x-4)(x-3)$.

2. Beispiel. $-x^2 + x + 30$?

Hat die höchste Potenz der Hauptgröfse den Faktor -1, so ist zuvor nach dem Minuszeichen eine Parenthese zu bilden

$$= -(x^2 - x - 30)$$

und man verwandelt zunächst nur $x^2 - x - 30$ in ein solches Produkt.

Für -30 findet man:

$$\begin{array}{lll} 30\cdot(-1), & \text{Summe:} & 30-1=29; \\ 15\cdot(-2), & \text{„} & 15-2=13; \\ 10\cdot(-3), & \text{„} & 10-3=7; \\ 6\cdot(-5), & \text{„} & 6-5=1; \\ 5\cdot(-6), & \text{„} & 5-6=-1. \end{array}$$

Da nun -1 der Coefficient von x ist, so sind 5 und -6 die gesuchten Zahlen, und es ist $x^2 - x - 30 = (x+5)(x-6)$, daher der gegebene Ausdruck:

$$-(x^2 - x - 30) = -(x+5)(x-6).$$

Anmerkung. Der Geübte würde selbstverständlich nicht erst die obigen Produkte aufgestellt, sondern sogleich $+5$ und -6 erkannt haben. Immer aber bleibt das Verfahren ein empirisches (unmathematisches), weil es nicht direkt, sondern durch Versuche, durch Probieren zum Ziele führt. Das mathematische Verfahren, welches das Produkt ohne alle Versuche direkt findet, kann erst bei der Auflösung der quadratischen Gleichung (§. 83) gelehrt werden.

Wie $ax^2 + bx + c$, wo a weder $+1$ noch -1 ist, analog dem vorstehenden Verfahren in ein Produkt binomer Faktoren verwandelt wird, soll demnächst (§. 64, 1, V) gezeigt werden.

3. Das Aufsuchen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen mehrgliedriger Ausdrücke (Anwendung des 2. Satzes von §. 59 und des vorstehenden 2. Satzes).

Nicht immer liegt die Bestimmung eines solchen Vielfachen (resp. Generalnenners) so nahe, wie es im 14. und 15. Beispiele des 1. Satzes der Fall war. Daher ist es nötig, auf folgende Punkte aufmerksam zu machen:

I. Vor allen Dingen sind die Polynomien (resp. Nenner) so in Faktoren aufzulösen, dafs ein weiteres Zerlegen unmöglich ist. Sind z. B. die 4 Nenner gegeben:

$$24a^3b + 12a^2b^2,\ 18ab^2 - 36ab^2,\ 80a^2 + 40ab,\ 30ab - 15b^2,$$

so können dieselben durch Ausheben zerlegt werden in:

$12a^2b(2a+b)$, $18ab(b-2a)$, $40a(2a+b)$, $15b(2a-b)$.

II. Damit das gemeinsame Vielfache auch wirklich das kleinste werde, sind oft Polynomien (namentlich Differenzen) mit -1 zu multiplicieren, jedoch dabei darauf zu sehen, dafs der Wert des ganzen Ausdrucks nicht geändert wird. Hier wäre z. B. der Bruch, dessen Nenner $18ab(b-2a)$ ist, mit -1 zu erweitern, damit der Faktor $2a-b$ dem im 4. Nenner gleich werde. (Vergl. auch das 15. Beispiel des 1. Satzes.)

Jene Nenner verwandeln sich nun in:

$12a^2b(2a+b)$, $18ab(2a-b)$, $40a(2a+b)$, $15b(2a-b)$.

III. Die Gleichheit der Faktoren, überhaupt die Möglichkeit der Vereinfachung läfst sich leichter erkennen, wenn man die Polynomien ohne Ausnahme unter sich nach gleichen Principien anordnet (s. §. 52, 14, I). Hier ist dies schon geschehen, da jedes 1. Glied der Binomien a^1 und b^0, jedes 2. Glied a^0 und b^1 hat.

IV. Alle unzerlegbaren Polynomien, die nicht vollkommen gleich sind, sind nun als Primzahlen unter sich zu betrachten. So hat man sich z. B. $2a+b$ und $2a-b$ trotz der gleichen Glieder $2a$ und b eben so verschieden zu denken wie m und n. Man erkennt diese Verschiedenheit auch durch das Substituieren beliebiger Zahlen. Wäre $a=10$, $b=7$, so würde

$$2a+b=2\cdot 10+7=27,\quad 2a-b=2\cdot 10-7=13$$

sein, 27 und 13 aber sind Primzahlen unter sich. Solche Polynomien sind also nicht mit Produkten ($2a+b$ nicht mit $2a\cdot b$) zu verwechseln.

V. Das kleinste gemeinsame Vielfache kann nun ganz so wie in §. 59, 1, III gesucht werden.

Bei vorliegender Aufgabe ist:

die höchste Potenz von $2=8$ (in 40),
" " " " $3=9$ (" 18),
" " " " $5=5$,
" " " " $a=a^2$ (im 1. Nenner),
" " " " $b=b$,
" " " " $2a+b=2a+b$,
" " " " $2a-b=2a-b$.

Mithin ist der gesuchte Generalnenner:

$$=8\cdot 9\cdot 5\cdot a^2\cdot b\cdot(2a+b)(2a-b)=360a^2b(2a+b)(2a-b)$$

oder (nach Ausmultiplicieren der Binomien):

$$=360a^2b(4a^2-b^2).$$

2. Beispiel.

Mit welcher einfachsten Zahl (Generalnenner!) ist:

$$\frac{1}{6x^3-36x^2+54x^2}-\frac{5x-2}{168x^2-28x^3}+\frac{3-2x}{189x-21x^2-378}-\frac{7-x^2}{36x-12x^2}$$

zu multiplicieren, damit die Nenner verschwinden?

Nach vorstehendem Abschnitte I schreibe man zunächst:

$$\frac{1}{6x(x^2-6x+9)}-\frac{5x-2}{28x^2(6-x)}+\frac{3-2x}{21(9x-x^2-18)}-\frac{7-x^2}{12x(3-x)}.$$

Damit behufs Zerfällens in binome Faktoren die höchste Potenz von x in dem Trinom des 3. Nenners den Coefficienten $+1$ erhält, ist der betr. Bruch mit -1 zu erweitern, derselbe daher in

$$\frac{2x-3}{21(x^2-9x+18)} \text{ zu verwandeln.}$$

Damit ferner die vorzunehmenden Vereinfachungen besser erkannt werden (s. III), ordne man alle Nenner nach absteigenden Potenzen von x:

$$\frac{1}{6x(x^2-6x+9)}-\frac{2-5x}{28x^2(x-6)}+\frac{2x-3}{21(x^2-9x+18)}-\frac{x^2-7}{12x(x-3)}.$$

Noch sind x^2-6x+9 und $x^2-9x+18$ (wenn es möglich ist) in binome Faktoren zu zerlegen.

Für das erstere Trinom: $-3\cdot-3=+9$, $-3-3=-6$, folglich:

$$=(x-3)(x-3)=(x-3)^2.$$

Für das zweite Trinom: $-6\cdot-3=+18$, $-6-3=-9$, folglich:

$$=(x-6)(x-3).$$

Der gegebene Ausdruck wird nun:

$$\frac{1}{6x(x-3)^2}-\frac{2-5x}{28x^2(x-6)}+\frac{2x-3}{21(x-6)(x-3)}-\frac{x^2-7}{12x(x-3)}\ldots\ldots(\text{Y}).$$

Generalnenner?

Die höchste Potenz von $2 = 4$,
„ „ „ „ $3 = 3$,
„ „ „ „ $7 = 7$,
„ „ „ „ $x = x^2$
„ „ „ „ $x - 3 = (x - 3)^2$
„ „ „ „ $x - 6 = x - 6$.

Folglich ist der gegebene Ausdruck Y mit $84x^2(x-6)(x-3)^2$ zu multiplicieren, wenn die Nenner verschwinden sollen.

§. 61. Merkwürdige Produkte.

1. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; denn

$$\begin{array}{l} a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline = a^2 - b^2. \end{array}$$

Oder: Das Produkt aus Summe und Differenz derselben Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Hat man also eine Summe mit einer Differenz zu multiplicieren und sieht man, dafs die beiden Glieder der Summe dieselben sind, wie die der Differenz, so multipliciert man nicht nach §. 60 jedes Glied der Differenz mit jedem Gliede der Summe, sondern quadriert die beiden Glieder und setzt ein Minuszeichen zwischen die Quadrate.

Beispiele.

$(8a + 3b)(8a - 3b) = (8a)^2 - (3b)^2 = 64a^2 - 9b^2$.

$(a+1)(a-1) = a^2 - 1^2 = a^2 - 1$.

$(5a - 7bx)(5a + 7bx) = (5a)^2 - (7bx)^2 = 25a^2 - 49b^2x^2$.

$$\left(\frac{a^3}{9b^2} - 3\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{a^3}{9b^2} + 3\tfrac{1}{2}\right) = \left(\frac{a^3}{9b^2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{a^6}{81b^4} - \frac{49}{4}.$$

$73 \cdot 67 = (70 + 3)(70 - 3) = 70^2 - 3^2 = 4900 - 9 = 4891$.

Man wendet also unsern Satz auf die Multiplication zweier Zahlen an, wenn die Mitte zwischen denselben eine Zahl ist, deren Quadrat sich leicht berechnen läfst.

$39 \cdot 41 = (40 - 1)(40 + 1) = 40^2 - 1^2 = 1600 - 1 = 1599$.

$$39\tfrac{5}{8} \cdot 40\tfrac{3}{8} = \left(40 - \frac{3}{8}\right)\left(40 + \frac{3}{8}\right) = 1600 - \frac{9}{64} = 1599\tfrac{55}{64}.$$

$$8\tfrac{12}{13} \cdot 9\tfrac{1}{13} = \left(9 - \frac{1}{13}\right)\left(9 + \frac{1}{13}\right) = 81 - \frac{1}{169} = 80\tfrac{168}{169}.$$

$1213 \cdot 1187 = (1200 + 13)(1200 - 13) = 1440000 - 169$
$= 1439831$.

Zusatz. Da

$$(am + bm)(an - bn) = m \cdot (a + b) \cdot n \cdot (a - b) = mn\left(a^2 - b^2\right)$$
$$= am \cdot an - bm \cdot bn,$$

so läſst sich der Satz überhaupt auf solche Produkte anwenden, bei welchen der eine Faktor Summe, der andere Differenz ist und der Quotient aus dem 1. und 2. Gliede jedes Faktors derselbe ist:

$$\left(\frac{am}{bm} = \frac{an}{bn}!\right).$$

Man hat alsdann nur das Produkt der beiden ersten Glieder um das Produkt der beiden letzten zu vermindern.

Beispiel. $\left(9x^4 + 15x^3\right)(6x - 10)$?

Da $\frac{9x^4}{15x^3} = \frac{6x}{10}$, so muſs das gesuchte Produkt

$$9x^4 \cdot 6x - 15x^3 \cdot 10 = 54x^5 - 150x^3 \text{ sein.}$$

2. Umkehrung: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Ist also eine Differenz zweier Quadrate gegeben, oder lassen sich die Glieder einer Differenz als Quadrate darstellen, so ist diese Differenz gleich dem Produkte aus der Summe der Basen der Quadrate und der Differenz derselben.

Beispiele.

$17^2 - 13^2 = (17 + 13)(17 - 13) = 30 \cdot 4 = 120.$

$759^2 - 241^2 = (759 + 241)(759 - 241) = 1000 \cdot 518 = 518000.$

$0{,}547^2 - 0{,}053^2 = (0{,}547 + 0{,}053)(0{,}547 - 0{,}053) = 0{,}6 \cdot 0{,}494$
$= 0{,}2964.$

$16 - x^2 = 4^2 - x^2 = (4 + x)(4 - x).$

$a^4 - 1 = \left(a^2\right)^2 - 1^2$? Die Basen sind a^2 und 1, daher die Summe derselben (d. i. $a^2 + 1$) der eine Faktor, die Differenz $(a^2 - 1)$ der andere Faktor. Das gesuchte Produkt $= \left(a^2 + 1\right)\left(a^2 - 1\right)$.

$$1\tfrac{11}{25} - \frac{x^6}{81} = \frac{36}{25} - \frac{x^6}{81} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left\{\frac{x^3}{9}\right\}^2$$
$$= \left\{\frac{6}{5} + \frac{x^3}{9}\right\}\left\{\frac{6}{5} - \frac{x^3}{9}\right\}.$$

$$\frac{1}{x^2} - 12\tfrac{1}{4} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{7}{2}\right).$$

$$25x^2 - 0{,}36a^4b^2 = (5x)^2 - \left(0{,}6a^2b\right)^2$$
$$= \left(5x + 0{,}6a^2b\right)\left(5x - 0{,}6a^2b\right).$$

$$1-9a+36a^3=1-9a\left(1-4a^2\right)=1-9a\left[1^2-(2a)^2\right]$$
$$=1-9a(1+2a)(1-2a).$$

$$2^{16}-1=\left(2^8\right)^2-1^2=\left(2^8+1\right)\left(2^8-1\right)$$
$$=\left(2^8+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^4-1\right)$$
$$=\left(2^8+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^2+1\right)\left(2^2-1\right)$$
$$=\left(2^8+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^2+1\right)(2+1)(2-1)$$
$$=257\cdot 17\cdot 5\cdot 3\cdot 1.$$

$$1760+59^2-71^2=1760-\left(71^2-59^2\right)$$
$$=1760-(71+59)(71-59)$$
$$=1760-130\cdot 12=1760-1560=200.$$

$$ax^4-an^2=a\left(x^4-n^2\right)=a\left(x^2+n\right)\left(x^2-n\right).$$

$$(a-b)b^2-(a-b)c^2=(a-b)\left(b^2-c^2\right)$$
$$=(a-b)(b-c)(b+c).$$

$$(37-23)\left(37^2-23^2\right)=(37-23)(37+23)(37-23)$$
$$=(37-23)^2(37+23)=14^2\cdot 60.$$

$$\left(a^2-b^2\right)-(a+b)c=(a+b)(a-b)-(a+b)c$$
$$=(a+b)(a-b-c).$$

$$\left(ac+c^2-b^2-ab\right)m+\left(c^2+cb-a^2-ab\right)n$$
$$=\left[(ac-ab)+\left(c^2-b^2\right)\right]m+\left[(cb-ab)+\left(c^2-a^2\right)\right]n$$
$$=[a(c-b)+(c+b)(c-b)]m+[b(c-a)$$
$$+(c+a)(c-a)]n$$
$$=(c-b)(a+c+b)m+(c-a)(b+c+a)n$$
$$=(a+b+c)[(c-b)m+(c-a)n].$$

$$(7a+2b)^2-(5a-4b)^2$$
$$=[(7a+2b)+(5a-4b)][(7a+2b)-(5a-4b)]$$
$$=(12a-2b)(2a+6b)=4(6a-b)(a+3b).$$

$$(7x-4y+3c)^2-(7x+4y-3c)^2$$
$$=[(7x-4y+3c)+(7x+4y-3c)]\cdot[(7x-4y+3c)$$
$$-(7x+4y-3c)]$$
$$=14x(-8y+6c)=28x(3c-4y).$$

$$16(9a+4b)^2-25(3a-2b)^2$$
$$=[4(9a+4b)]^2-[5(3a-2b)]^2$$
$$=[36a+16b+15a-10b][36a+16b-(15a-10b)]$$
$$=(51a+6b)(21a+26b)=3(17a+2b)(21a+26b).$$

$$4a^2(a+3b)^2-9b^2(2a-b)^2$$
$$=[2a(a+3b)]^2-[3b(2a-b)]^2$$

$$= [2a^2 + 6ab + 6ab - 3b^2]\,[2a^2 + 6ab - 6ab + 3b^2]$$
$$= (2a^2 + 12ab - 3b^2)\,(2a^2 + 3b^2).$$

$$7(20 - 45x^2) - 6(14 + 21x) = 7\cdot 5(4 - 9x^2) - 6\cdot 7(2 + 3x)$$
$$= 7[5(2 + 3x)(2 - 3x) - 6(2 + 3x)]$$
$$= 7(2 + 3x)[10 - 15x - 6] = 7(2 + 3x)(4 - 15x).$$

$$5an^2 - 5a - n + 1 = 5a(n^2 - 1) - (n - 1)$$
$$= (n - 1)[5a(n + 1) - 1].$$

$$(9a^2 - 4b^2)\left[\frac{b - 2a}{2b - 3a} - \frac{3a^2 - 5b^2}{4b^2 - 9a^2} + \frac{4a - 7b}{2b + 3a} - 2\tfrac{1}{3}\right]?$$

Da $9a^2 - 4b^2 = (3a)^2 - (2b)^2 = (3a + 2b)(3a - 2b)$, so ist zunächst zu schreiben:

$$(9a^2 - 4b^2)\left[\frac{2a - b}{3a - 2b} - \frac{5b^2 - 3a^2}{9a^2 - 4b^2} + \frac{4a - 7b}{3a + 2b} - \frac{7}{3}\right].$$

Bei der Multiplication $(9a^2 - 4b^2)\cdot\frac{2a - b}{3a - 2b}$ denke man sich $(3a + 2b)(3a - 2b)\cdot\frac{2a - b}{3a - 2b}$; daher:

$$= (3a + 2b)(2a - b) - (5b^2 - 3a^2) + (3a - 2b)(4a - 7b)$$
$$- \frac{7}{3}(9a^2 - 4b^2)$$
$$= \frac{49b^2}{3} - 28ab = 7b\left(\frac{7b}{3} - 4a\right).$$

Mit welcher Zahl ist

$$\frac{56 + x^2}{120 - 30x^2} + \frac{20 - 3x}{15x^2 - 30x} - \frac{7}{30 + 15x} + \frac{2}{3x}$$

zu multiplicieren, damit die Nenner verschwinden und wie grofs wird alsdann das Produkt?

Auflösung. Die Nenner sind

$$30(4 - x^2),\ 15x(x - 2),\ 15(2 + x) \text{ und } 3x.$$

Da nun $4 - x^2 = 2^2 - x^2 = (2 + x)(2 - x)$, so ist der 2. Bruch mit -1 zu erweitern und man erhält:

$$\frac{56 + x^2}{30(4 - x^2)} + \frac{3x - 20}{15x(2 - x)} - \frac{7}{15(2 + x)} + \frac{2}{3x} \ldots \text{ (Y)}$$

Der Generalnenner ist $30x(2 + x)(2 - x) = 30x(4 - x^2)$.

Y mit demselben multipliciert:

$$= x(56 + x^2) + 2(2 + x)(3x - 20) - 14x(2 - x) + 20(4 - x^2)$$
$$= x^3.$$

Die quadratische Form der beiden Glieder einer Differenz läfst sich stets erreichen. Z. B.

$$a - b = a^1 - b^1 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right),$$

wobei die Bedeutung des Exponent $\frac{1}{2}$ vorläufig noch unerörtert bleiben mufs.

1. Zusatz. $a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + b^2.$

1. Form. $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2.$

Um also eine Zahl zu quadrieren, sucht man die der Basis des zu berechnenden Quadrats zunächst liegende runde Zahl auf. Hierauf bildet man 2 Faktoren, von welchen der eine um die Differenz aus der runden Zahl und der gegebenen Basis gröfser als diese Basis, der andere aber um eben so viel kleiner als dieselbe ist. Das Produkt dieser Faktoren um das Quadrat jener Differenz vermehrt, giebt das verlangte Quadrat.

Beispiele.

58^2? Die zunächst liegende runde Zahl ist 60, die Differenz zwischen 58 und 60 $= 2$, daher:

$$58^2 = (58 + 2)(58 - 2) + 2^2 = 60 \cdot 56 + 4 = 3360 + 4 = 3364.$$

$$43^2 = (43 + 3)(43 - 3) + 3^2 = 46 \cdot 40 + 9 = 1849.$$

$$(19\tfrac{3}{4})^2 = \left(19\tfrac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)\left(19\tfrac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 20 \cdot 19\tfrac{1}{2} + \frac{1}{16}$$
$$= 390\tfrac{1}{16}.$$

2. Form. $a^2 = b^2 + (a + b)(a - b).$

Um also eine Zahl zu quadrieren, kann man das Quadrat einer naheliegenden runden Zahl um das Produkt aus der Summe und der Differenz der gegebenen und neuen Zahl vermehren.

Beispiele.

$$48^2 = 50^2 + (48 + 50)(48 - 50) = 2500 + 98(-2)$$
$$= 2500 - 196 = 2304.$$

$$74^2 = 70^2 + (74 + 70)(74 - 70) = 4900 + 144 \cdot 4$$
$$= 4900 + 576 = 5476.$$

2. Zusatz.

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = [a + b + a - b]\,[a + b - (a - b)]$$
$$= 2a \cdot 2b = 4ab.$$ Folglich umgekehrt:

$$4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$$ oder:

$$ab = \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{4}.$$

Mittelst Tafeln der Quadratzahlen, die oft die Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 enthalten, und der vorstehenden Formel läfst sich das Produkt zweier beliebigen Zahlen berechnen.

Beispiel.

$$567\cdot 394 = \frac{(567+394)^2-(567-394)^2}{4} = \frac{961^2-173^2}{4}.$$

Aus den Tafeln: $961^2 = 923521$

$173^2 = 29929$ subtr.

$893592 : 4$

$567\cdot 394 = 223398.$

3. Erweiterung des 1. Satzes.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

$$(a^2+ab+b^2)(a-b) = a^3 - b^3; \quad \text{denn}$$

$$\begin{array}{l} a^3 + a^2b + ab^2 \\ \quad - a^2b - ab^2 - b^3 \\ \hline = a^3 \qquad\qquad - b^3. \end{array}$$

Eben so: $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b) = a^4 - b^4.$

$$(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b) = a^5 - b^5.$$

Allgemein:

$$* \; (a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)(a-b) = a^{n+1} - b^{n+1};$$

denn

$$\begin{array}{l} a^{n+1} + a^nb + a^{n-1}b^2 + \ldots + a^3b^{n-2} + a^2b^{n-1} + ab^n \\ \quad - a^nb - a^{n-1}b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots - a^2b^{n-1} - ab^n - b^{n+1} \\ \hline = a^{n+1} - b^{n+1}. \end{array}$$

$n = 20$ giebt:

$$(a^{20} + a^{19}b + a^{18}b^2 + \ldots + a^2b^{18} + ab^{19} + b^{20})(a-b) = a^{21} - b^{21}.$$

Der 1. Faktor dieser Produkte ist ein Polynom, bei welchem vom ersten bis vorletzten Gliede die Potenzen einer Zahl so abnehmen, dafs die Exponenten eine bis 1 abnehmende natürliche Zahlenreihe bilden, gleichzeitig vom 2. bis letzten Gliede die Potenzen einer 2. Zahl so zunehmen, dafs die Exponenten dieselbe, aber von 1 an aufsteigende natürliche Zahlenreihe bilden.

Aufserdem ist der Coefficient jedes Gliedes $= +1$.

Der 2. Faktor ist die Differenz der Basen jener Potenzen.

Das Resultat ist die Differenz derjenigen Potenzen jener Zahlen, deren Exponent um 1 gröfser, als die höchsten Exponenten des 1. Faktor.

Leichter behält man das Resultat, wenn man berücksichtigt, dafs beim Multiplicieren alle Mittelglieder verschwinden müfsen und nur 2 Glieder übrig bleiben: das Produkt der beiden ersten und der beiden letzten Glieder der gegebenen Faktoren.

Beispiel. $(a^7 + a^6 b + a^5 b^2 + \ldots + ab^6 + b^7)(a - b)$?

Das 1. Glied des Resultats

$= 1.$ Glied des 1. Faktor $\times$ 1. Glied des 2. Faktor

$= a^7 \cdot a = a^8.$

Das 2. Glied des Resultats

$=$ letztes Glied des 1. Fakt. $\times$ letztes Glied des 2. Fakt.

$= + b^7 \cdot - b = - b^8.$

Das Resultat daher $= a^8 - b^8.$

1. Zusatz. Setzt man $b = 1$, so erhält man:

$$(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1^2 = a^2 - 1,$$
$$(a^2 + a + 1)(a - 1) = a^3 - 1,$$
$$(a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1) = a^4 - 1 \text{ u. s. w.}$$

Allgemein:

$$(a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a + 1)(a - 1) = a^{n+1} - 1 \ldots (Y).$$

Setzt man $a = 1$:

$$(1 + b)(1 - b) = 1 - b^2,$$
$$(1 + b + b^2)(1 - b) = 1 - b^3,$$
$$(1 + b + b^2 + b^3)(1 - b) = 1 - b^4 \text{ u. s. w.}$$

Allgemein:

$$(1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1} + b^n)(1 - b) = 1 - b^{n+1} \ldots (Z).$$

2. Zusatz. Setzt man in vorstehender Formel Y: $a = 2$, so erhält man:

$$(2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^2 + 2 + 1)(2 - 1) = 2^{n+1} - 1,$$

d. i. $(2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^2 + 2 + 1) \cdot 1 = 2^{n+1} - 1,$

folglich:

$$* \quad 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Beispiel. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1.$ (Siehe §. 57, 10, 2. Zus.).

3. Zusatz. Nehmen die Exponenten der Potenzen in gleichen Differenzen ab oder zu, so kann man sich dieselbe Form denken.

Beispiel.

$$\left(a^{12}+5a^8b^3+25a^4b^6+125b^9\right)\left(a^4-5b^3\right)$$
$$=\left[\left(a^4\right)^3+\left(a^4\right)^2\left(5b^3\right)^1+\left(a^4\right)^1\cdot\left(5b^3\right)^2+\left(5b^3\right)^3\right]\cdot\left[\left(a^4\right)-\left(5b^3\right)\right]$$
$$=\left(a^4\right)^{3+1}-\left(5b^3\right)^{3+1}=a^{16}-625b^{12}.$$

4. Zusatz. Vereinigt man in dem Produkt

$$\left(a^n+a^{n-1}b+\ldots\ldots+b^n\right)(a-b)\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)$$

die beiden ersten Faktoren, so erhält man:

$$\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right)\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)$$
$$=\left(a^{n+1}\right)^2-\left(b^{n+1}\right)^2$$
$$=a^{2n+2}-b^{2n+2}.$$

Vereinigt man in dem gegebenen Produkte die beiden letzten Faktoren, so erhält man:

$$\left(a^n+a^{n-1}b+\ldots\ldots+b^n\right)\left(a^{n+2}-a^{n+1}b+ab^{n+1}-b^{n+2}\right).$$

Folglich ist:

$$\left(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots\ldots+b^n\right)\left(a^{n+2}-a^{n+1}b+ab^{n+1}-b^{n+2}\right)$$
$$=a^{2n+2}-b^{2n+2}.$$

$n=5$ giebt z. B.:

$$\left(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5\right)\left(a^7-a^6b+ab^6-b^7\right)$$
$$=a^{12}-b^{12}.$$

Multipliciert man die zuerst aufgestellten 3 Faktoren noch mit $a^{2n+2}+b^{2n+2}$, so ergiebt sich ein analoges Produkt, bei welchem der 2. Faktor aus 8 Gliedern besteht.

4. Setzt man in dem vorstehenden 3. Satze $-b$ statt $+b$, so ergiebt sich:

$$[a+(-b)]\,[a-(-b)]=a^2-(-b)^2=a^2-\left(+b^2\right),\text{ d. i.}$$
$$(a-b)\,(a+b)=a^2-b^2.$$

$$\left[a^2+a(-b)+(-b)^2\right]\left[a-(-b)\right]=a^3-(-b)^3,\text{ d. i.}$$
$$\left(a^2-ab+b^2\right)(a+b)=a^3+b^3.$$

$$\left[a^3+a(-b)+a(-b)^2+(-b)^3\right]\left[a-(-b)\right]=a^4-(-b)^4$$
$$=a^4-\left(+b^4\right),\text{ d. i.}$$
$$\left(a^3-a^2b+ab^2-b^3\right)(a+b)=a^4-b^4.$$

Eben so: $(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4)(a + b) = a^5 + b^5$.

$(a^5 - a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 + ab^4 - b^5)(a + b) = a^6 - b^6$ u. s. w.

Allgemein:

$$[a^n + a^{n-1}(-b) + a^{n-2}(-b)^2 + a^{n-3}(-b)^3 + \ldots + (-b)^n][a - (-b)] = a^{n+1} - (-b)^{n+1}$$

oder $[a^n - a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 - a^{n-3} b^3 + \ldots + (-1 \cdot b)^n][a + b] = a^{n+1} - (-1 \cdot b)^{n+1}$, d. i.

✻ $[a^n - a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 - \ldots + (-1)^n b^n][a + b] = a^{n+1} - (-1)^{n+1} b^{n+1}$.

$n = 8$ giebt:

$$[a^8 - a^7 b + a^6 b^2 - \ldots + (-1)^8 b^8](a + b) = a^9 - (-1)^9 b^9, \text{ d. i.}$$

$$(a^8 - a^7 b + a^6 b^2 - \ldots + b^8)(a + b) = a^9 + b^9.$$

Enthalten also die Glieder des polynomen 1. Faktor dieselben Potenzen und Produkte wie im polynomen 1. Faktor des 3. Satzes, jedoch mit abwechselnd positiven und negativen Gliedern und ist der 2. Faktor die Summe der Basen jener Potenzen, so erhält man als Resultat gleichfalls nur 2 Glieder und zwar:

eine Differenz, wenn der 1. polynome Faktor von ungeradzahligen Potenzen begrenzt ist,
eine Summe bei geradzahligen Potenzen.

Leichter behält man das Resultat, wenn man, wie im 3. Satze, nur die beiden ersten und die beiden letzten Glieder der gegebenen Faktoren multipliciert.

Beispiele. $(a^7 - a^6 b + a^5 b^2 - a^4 b^3 + a^3 b^4 - a^2 b^5 + ab^6 - b^7)(a + b)$?

Das 1. Glied des Resultats = 1. Glied des 1. Faktor × 1. Glied des 2. Faktor
$= a^7 \cdot a = a^8$;

„ 2. „ „ „ = letztes Glied des 1. Faktor × letztes Glied des 2. Faktor.
$= -b^7 \cdot +b = -b^8$.

Das Resultat daher $= a^8 - b^8$.

$$(a^{15}-2a^{10}x+4a^5x^2-8x^3)(a^5+2x)$$
$$=[(a^5)^3-(a^5)^2(2x)^1+(a^5)^1(2x)^2-(2x)^3][(a^5)+(2x)]$$
$$=(a^5)^3\cdot a^5-(2x)^3\cdot 2x=a^{20}-16x^4.$$

1. Zusatz. $b=1$ giebt:

$$(a-1)(a+1)=a^2-1$$
$$(a^2-a+1)(a+1)=a^3+1$$
$$(a^3-a^2+a-1)(a+1)=a^4-1 \text{ u. s. w}$$

$a=1$ giebt: $(1-b)(1+b)=1-b^2$

$$(1-b+b^2)(1+b)=1+b^3$$
$$(1-b+b^2-b^3)(1+b)=1-b^4 \text{ u. s. w.}$$

5. Dividiert man jedes Glied des 1. Faktor des im 3. Satze enthaltenen Produkts

$$(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots\ldots+b^n)(a-b)$$

durch das vorausgehende (links stehende), so erhält man stets $\frac{b}{a}$ als Quotient.

Beispiel. $\frac{a^{n-2}b^2}{a^{n-1}b}=a^{n-2-n+1}b^{2-1}=a^{-1}b^1=\frac{b}{a}.$

Dividiert man das 2. Glied des 2. Faktor durch das 1., so erhält man $-\frac{b}{a}$, also den entgegengesetzten Quotient.

Setzt man b negativ, wodurch bekanntlich die Formel des 4. Satzes entsteht, so mufs gleichfalls der Quotient des 2. Faktor $\left(+\frac{b}{a}\right)$ dem des ersten $\left(-\frac{b}{a}\right)$ entgegengesetzt sein.

Hieraus ergiebt sich folgende ganz allgemeine Regel:

Das Produkt $(A+B+C+\ldots\ldots+M)(N+P)$ wird $AN+MP$, wenn im 1. Faktor jedes Glied durch das vorhergehende dividiert immer denselben Quotient giebt, im 2. Faktor aber das 2. Glied (P) durch das 1. (N) dividiert denselben Quotient mit entgegengesetztem Zeichen giebt.

Beispiel. $\left[\frac{x^3}{6y}-\frac{x}{2}+\frac{3y}{2x}-\frac{9y^2}{2x^3}\right]\left(\frac{5x}{9y^2}+\frac{5}{3xy}\right)?$

Da im 1. Faktor die Zeichen abwechseln, während der 2. Faktor eine Summe ist, da ferner in beiden Faktoren der Exponent von x in jedem nachfolgenden Gliede um 2 kleiner, der von y aber um 1 gröfser ist, die Quotienten von je 2 aufeinander fol-

genden Gliedern also hinsichtlich dieser Buchstaben gleich sein müssen, da endlich die speciellen Zahlen von je 2 aufeinander folgenden Gliedern gleiche Quotienten geben

$$\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{6}=\frac{3}{2}:\frac{1}{2}=\frac{9}{2}:\frac{3}{2}=\frac{5}{3}:\frac{5}{9}\right),$$

so mufs nach vorstehender Regel das gesuchte Produkt = der Summe der Produkte der ersten und der letzten Glieder der beiden Faktoren sein:

$$=\frac{x^3}{6y}\cdot\frac{5x}{9y^2}-\frac{9y^2}{2x^3}\cdot\frac{5}{3xy}=\frac{5x^4}{54y^3}-\frac{15y}{2x^4}.$$

6. Die Umkehrungen des 3. und 4. Satzes kommen gleichfalls öfter in Anwendung:

I. $a^3-b^3=(a^2+ab+b^2)(a-b)$

$a^3+b^3=(a^2-ab+b^2)(a+b)$

$\left.\begin{aligned}a^4-b^4&=(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)\\&=(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)\end{aligned}\right\}!$

$a^5-b^5=(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)$

$a^5+b^5=(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b)$

$x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)$

$x^3+1=(x^2-x+1)(x+1)$

$x^4-1=(x^3+x^2+x+1)(x-1)$

$\quad=(x^3-x^2+x-1)(x+1).$

II. $a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$, denn $(a^2)^2-(b^2)^2=?$

$a^6-b^6=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$

$\quad=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$a^6+b^6=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$ u. s. w.

7. Es ist $ez=dv+ze-zd+zd-dv$, denn rechts hebt sich dv und zd,

d. i. $ez=dv+z(e-d)+d(z-v)$.

In Worten:

Anstatt 2 Zahlen (eine erste e und eine zweite z) zu multiplicieren, kann man das Produkt von 2 beliebigen andern Zahlen (einer dritten d und einer vierten v) noch um die beiden nachstehenden Produkte vermehren:

1) die 2. multipliciert mit der Differenz aus der vorhergehenden (1.) und der nachfolgenden (3.);
2) die 3. multipliciert mit der Differenz aus der vorhergehenden (2.) und der nachfolgenden (4.).

Beispiele.

$$59 \cdot 38 = 60 \cdot 40 + 38\,(59 - 60) + 60\,(38 - 40)$$
$$= 2400 - 38 \cdot 1 - 60 \cdot 2$$
$$= 2400 - 158 = 2242.$$

$$73 \cdot 52 = 70 \cdot 50 + 52\,(73 - 70) + 70\,(52 - 50)$$
$$= 3500 + 52 \cdot 3 + 70 \cdot 2$$
$$= 3500 + 156 + 140 = 3796.$$

8. $(a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc\right)$

$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc.$$

Beweis durch Multiplication.

§. 62. Potenzen von Polynomien.

1. Quadrat des Binom.

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b)$$
$$\frac{\begin{array}{l} a^2 + ab \\ \quad\; + ab + b^2 \end{array}}{}$$

✵ $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2.$

Das Quadrat einer zweiteiligen Gröfse kann in einen dreiteiligen Ausdruck aufgelöst werden. Diese 3 Teile sind:

1) das Quadrat des 1. Teils $(= a^2)$;
2) das doppelte Produkt der beiden Teile (= 2mal der 1. Teil a × der 2. Teil b);
3) das Quadrat des 2. Teils $(= b^2)$.

Setzt man in vorstehender Formel $b = -c$, so erhält man:

$$[a + (-c)]^2 = a^2 + 2\,a(-c) + (-c)^2, \text{ d. i.}$$

✵ $(a - c)^2 = a^2 - 2\,ac + c^2.$ (S. §. 57, 12.)

Das Quadrat einer Differenz hat also dieselben 3 Teile wie das einer Summe, jedoch sind dieselben abwechselnd positiv und negativ. Da das 3. Glied ein Quadrat ist, so mufs es selbstverständlich stets positiv sein.

Beide Formeln vereinigt man in folgender Weise:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\,ab + b^2.$$

1. Anmerkung. In solchen Ausdrücken mit Doppelzeichen hat man entweder überall das obere oder überall das untere Zeichen zu nehmen, also nicht willkürlich in dem einen Gliede das obere, im andern das untere.

2. Anmerkung. Die Coefficienten der 3 Glieder sind 1, 2, 1. Diese Zahlen mögen hier „Potenzialcoefficienten“ genannt werden.

Der 2., 3. . . . . . Potenzialcoefficient heifst auch der 1., 2. . . . . . „Binomialcoefficient".

3. Anmerkung. Da sich die 3 Glieder auch

$$1 \cdot a^2 b^0,\ 2 \cdot a^1 b^1,\ 1 \cdot a^0 b^2$$

schreiben lassen, so kann man folgende symmetrische Formen unterscheiden:

	1. Glied,	2. Glied,	3. Glied,
Potenzialcoefficienten:	1	2	1
Potenzen von a:	a^2	a^1	a^0
„ „ b:	b^0	b^1	b^2.

4. Anmerkung. Der Ungeübte verwechselt oft $(a \pm b)^2$ mit $(ab)^2 = a^2 b^2$, indem er $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ setzt.

Ferner ist $a^2 - b^2$ nicht mit $(a - b)^2$ zu verwechseln, vielmehr ist:

$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) \\ (a-b)^2 = (a-b)\,(a-b)\end{array}\right\}\ \text{gleiche Faktoren!}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b) \quad \text{verschiedene Faktoren, also kein Quadrat!}$$

Beispiele.

$$(7 + 3)^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 3^2 = 49 + 42 + 9 = 100.$$

$$[\text{Probe: } 10^2 = 100].$$

$$(5a - 6b)^2 = (5a)^2 - 2 \cdot 5a \cdot 6b + (6b)^2$$
$$= 25a^2 - 60ab + 36b^2.$$

$$\left(\frac{3a}{4x^3} - \frac{2x^3}{3a}\right)^2 = \left(\frac{3a}{4x^3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3a}{4x^3} \cdot \frac{2x^3}{3a} + \left(\frac{2x^3}{3a}\right)^2$$
$$= \frac{9a^2}{16x^6} - 1 + \frac{4x^6}{9a^2}.$$

$(-a-b)^2$? Das 1. Glied = Quadrat des 1. Teils
$= (-a)^2 = +a^2$;
das 2. Glied = 2 × (1. Glied) × (2. Glied)
$= 2 \cdot (-a)\,(-b) = +2ab$;
das 3. Glied = Quadrat des 2. Teils
$= (-b)^2 = +b^2$.

Daher $= a^2 + 2ab + b^2$.

Dasselbe Resultat hätte man erhalten durch:

$$(-a-b)^2 = [-(a+b)]^2 = +(a+b)^2.$$

$$1\tfrac{1}{2}\left(\frac{2x}{3}+\frac{5}{6x^2}\right)^2-\frac{7}{3x^2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right)^2$$
$$=\frac{3}{2}\left[\left(\frac{2x}{3}\right)^2+2\cdot\frac{2x}{3}\cdot\frac{5}{6x^2}+\left(\frac{5}{6x^2}\right)^2\right]$$
$$-\frac{7}{3x^2}\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)^2-2\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]$$
$$=\frac{3}{2}\left[\frac{4x^2}{9}+\frac{10}{9x}+\frac{25}{36x^4}\right]-\frac{7}{3x^2}\left[\frac{x^4}{4}-x+\frac{1}{x^2}\right]$$
$$=\frac{2x^2}{3}+\frac{5}{3x}+\frac{25}{24x^4}-\frac{7x^2}{12}+\frac{7}{3x}-\frac{7}{3x^4}$$
$$=\frac{x^2}{12}+\frac{4}{x}-\frac{31}{24x^4}.$$

$$(5x^{3n+1}-3yz^{2n-5})^2=(5x^{3n+1})^2-2\cdot 5x^{3n+1}\cdot 3yz^{2n-5}$$
$$+(3yz^{2n-5})^2$$
$$=25x^{6n+2}-30x^{3n+1}yz^{2n-5}+9y^2z^{4n-10}.$$

$$(9-5a)^2\left[\frac{2a-7}{5a-9}-\frac{10a^2}{3(9-5a)^2}-\frac{a+1}{9-5a}-\frac{7}{15}\right]$$
$$=(9-5a)^2\left[\frac{7-2a}{9-5a}-\frac{10a^2}{3(9-5a)^2}-\frac{a+1}{9-5a}-\frac{7}{15}\right]$$
$$=(9-5a)(7-2a)-\frac{10a^2}{3}-(9-5a)(a+1)$$
$$-\frac{7}{15}(9-5a)^2$$
$$=10a^2-53a+63-\frac{10a^2}{3}+5a^2-4a-9$$
$$-\frac{7}{15}(81-90a+25a^2)$$
$$=15a^2-57a+54-\frac{10a^2}{3}-37\tfrac{4}{5}+42a-\frac{35a^2}{3}$$
$$=16\tfrac{1}{5}-15a.$$

$$1197^2=(1200-3)^2=1440000-7200+9=1432809$$

$$(12\tfrac{1}{4})^2=\left(12+\frac{1}{4}\right)^2=144+6+\frac{1}{16}=150\tfrac{1}{16}.$$

$$(39\tfrac{5}{8})^2 = \left(40 - \frac{3}{8}\right)^2 = 1600 - 30 + \frac{9}{64} = 1570\tfrac{9}{64}.$$

$$(ab + ac)^2 = [a(b + c)]^2 = a^2(b^2 + 2bc + c^2).$$

1. Zusatz. Einen mehrteiligen Ausdruck kann man nach vorstehenden Regeln quadrieren, indem man sich denselben zweigliederig denkt.

Beispiel.

$$(5x^3 - 4x^2 - 3x - 2)^2 = [(5x^3 - 4x^2) - (3x + 2)]^2$$
$$= (5x^3 - 4x^2)^2 - 2\cdot(5x^3 - 4x^2)(3x + 2) + (3x + 2)^2$$
$$= 25x^6 - 40x^5 + 16x^4 - 30x^4 + 24x^3 - 20x^3 + 16x^2$$
$$+ 9x^2 + 12x + 4$$
$$= 25x^6 - 40x^5 - 14x^4 + 4x^3 + 25x^2 + 12x + 4.$$

2. Zusatz. $(a \pm u)^2 = a^2 \pm 2au + u^2.$

Ist u sehr klein, so kann u^2 so klein werden, dafs es nicht beachtet zu werden braucht.

Beispiele.

$$0{,}1103^2 = (0{,}11 + 0{,}0003)^2 = 0{,}11^2 + 2\cdot 0{,}11\cdot 0{,}0003$$
$$= 0{,}0121 + 0{,}000066 = 0{,}012166.$$

Hier ist $0{,}0003^2 = 0{,}00000009$ weggelassen worden.

$$0{,}333495^2 = (0{,}333333 + 0{,}000162)^2 = \left(\frac{1}{3} + 0{,}000162\right)^2$$
$$= \frac{1}{9} + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 0{,}000162 = \frac{1}{9} + \frac{0{,}000324}{3}$$
$$= 0{,}111111 + 0{,}000108 = 0{,}111219.$$

$$2{,}9996^2 = (3 - 0{,}0004)^2 = 9 - 6\cdot 0{,}0004 = 9 - 0{,}0024$$
$$= 8{,}9976.$$

3. Zusatz.

$$(a + b + c)(a + b - c) = [(a + b) + c][(a + b) - c]$$
$$= (a + b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \text{ (s. §. 61, 1).}$$

$$(a - b + c)(a + b - c) = [a - (b - c)][a + (b - c)]$$
$$= a^2 - (b - c)^2 = a^2 - b^2 + 2bc - c^2.$$

Sind die Glieder zweier polynomen Faktoren teils ganz gleich, andernteils nur hinsichtlich der Zeichen verschieden, so setze man die mit gleichen Zeichen voran, mit verschiedenen nach, und vereinige sowohl jene, als auch diese für sich, um alsdann §. 61, 1 anzuwenden.

Beispiel.

$$(3a-2b+5c-11d)(3a+2b-5c-11d)$$
$$=(3a-11d-2b+5c)(3a-11d+2b-5c)$$
$$=[(3a-11d)-(2b-5c)][(3a-11d)+(2b-5c)]$$
$$=(3a-11d)^2-(2b-5c)^2$$
$$=9a^2-66ad+121d^2-4b^2+20bc-25c^2.$$

2. Umgekehrt ist $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

Das 2. Glied $2ab$ ist also $2 \times$ Basis des Quadrats des 1. Gliedes $\times$ Basis des Quadrats des 3. Gliedes.

Ist daher ein streng nach ab- oder aufsteigenden Potenzen der Hauptgröfse geordnetes Trinom gegeben, bei welchem das 1. und 3. Glied positiv, das 2. $\left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}$ ist und giebt man dem 1. und 3. Gliede die Quadratform, so ist das Trinom das Quadrat der $\left\{ \begin{matrix} \text{Summe} \\ \text{Differenz} \end{matrix} \right\}$ der beiden Basen der Quadrate, wenn das Produkt aus der Zahl 2 und diesen Basen dem 2. Gliede des gegebenen Trinom gleich ist.

1. Beispiel. $x^6 + 4a^4 + 4a^2x^3$?

Geordnet: $x^6 + 4a^2x^3 + 4a^4 = \left(x^3\right)^2 + 4a^2x^3 + \left(2a^2\right)^2$. Da nun das doppelte Produkt der Basen der Quadrate $= 2 \cdot x^3 \cdot 2a^2 = 4a^2x^3 =$ dem Mittelgliede, so mufs jenes gegebene Trinom das Quadrat der Summe beider Basen sein, d. i. $= \left(x^3 + 2a^2\right)^2$.

2. Beispiel. $6\frac{1}{4} + \frac{16}{225a^2} - \frac{4}{3a}$?

$$\text{Geordnet} = \frac{25}{4} - \frac{4}{3a} + \frac{16}{225a^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{4}{3a} + \left(\frac{4}{15a}\right)^2.$$

Hier ist das doppelte Produkt der Basen $= 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{15a} = \frac{4}{3a} =$ dem Mittelgliede des vorstehenden Trinom und da dieses Mittelglied negativ ist, so mufs der gegebene Ausdruck das Quadrat der Differenz der Basen, d. i. $\left(\frac{5}{2} - \frac{4}{15a}\right)^2$ sein.

3. Beispiel.

$$77ac + 35ad - 33bc - 15bd - 245a^2 + 210ab - 45b^2$$
$$= 7a(11c+5d) - 3b(11c+5d) - 5\left(49a^2 - 42ab + 9b^2\right)$$

Hier ist $49a^2 = (7a)^2$, $9b^2 = (3b)^2$ und $2 \cdot 7a \cdot 3b = 42ab$, folglich:

$$= (7a - 3b)(11c + 5d) - 5(7a - 3b)^2$$
$$= (7a - 3b)[11c + 5d - 5(7a - 3b)].$$

4. Beispiel.

$$4a^2 - 20ab + 25b^2 - 16ac + 40bc - 36ad + 90bd + 16c^2 + 72cd + 81d^2$$
$$= (2a)^2 - 20ab + (5b)^2 - 2[8ac - 20bc + 18ad - 45bd] + (4c)^2 + 72cd + (9d)^2$$
$$= (2a - 5b)^2 - 2(4c + 9d)(2a - 5b) + (4c + 9d)^2$$
$$= [(2a - 5b) - (4c + 9d)]^2 = (2a - 5b - 4c - 9d)^2.$$

5. Beispiel.

$$(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2) = (ac)^2 + n(bc)^2 + n(ad)^2 + (nbd)^2$$
$$= (ac)^2 + 2nabcd + n^2b^2d^2 + n(ad)^2 - 2nabcd + n(bc)^2$$
$$= (ac)^2 + 2ac \cdot nbd + (nbd)^2 + n[(ad)^2 - 2 \cdot ad \cdot bc + (bc)^2]$$
$$= (ac + nbd)^2 + n(ad - bc)^2.$$

6. Beispiel.

Es ist $(Aa + Bb + Cc + Dd)^2 + (Ab - Ba + Cd - Dc)^2 + (Ac - Bd - Ca + Db)^2 + (Ad + Bc - Cb - Da)^2$

$$= (Aa \underset{1}{+} Bb)^2 + 2(\underset{\substack{3\\5}}{Aa} + \underset{\substack{6\\4}}{Bb})(\underset{\substack{3\\4}}{Cc} + \underset{\substack{6\\5}}{Dd}) + (Cc \underset{2}{+} Dd)^2$$
$$+ (Ab \underset{1}{-} Ba)^2 + 2(\underset{\substack{7\\9}}{Ab} - \underset{\substack{10\\8}}{Ba})(\underset{\substack{7\\8}}{Cd} - \underset{\substack{10\\9}}{Dc}) + (Cd \underset{2}{-} Dc)^2$$
$$+ (Ac \underset{3}{-} Ca)^2 + 2(\underset{\substack{9\\12}}{Ac} - \underset{\substack{8\\11}}{Ca})(\underset{\substack{9\\11}}{Db} - \underset{\substack{8\\12}}{Bd}) + (Db \underset{6}{-} Bd)^2$$
$$+ (Ad \underset{5}{-} Da)^2 + 2(\underset{\substack{7\\12}}{Ad} - \underset{\substack{10\\11}}{Da})(\underset{\substack{10\\12}}{Bc} - \underset{\substack{7\\11}}{Cb}) + (Bc \underset{4}{-} Cb)^2.$$

Hier heben sich die nichtquadratischen Glieder und zwar die mit einerlei Zahlen unterschriebenen Produkte.

In der 1. Zeile hebt sich z. B. das mit 1 bezeichnete Produkt $+2 \cdot Aa \cdot Bb$ mit dem in der 2. Zeile mit 1 bezeichneten Produkt $-2 \cdot Ab \cdot Ba$; in der 3. Zeile das mit 11 bezeichnete Produkt $-2 \cdot Ca \cdot Db$ mit dem in der 4. Zeile mit 11 bezeichneten Produkt $+2 \cdot Da \cdot Cb$.

Hieraus folgt, dafs nur die nachstehenden quadratischen Glieder übrig bleiben:

$$A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 + D^2d^2 + A^2b^2 + B^2a^2 + C^2d^2 + D^2c^2$$
$$+ A^2c^2 + C^2a^2 + D^2b^2 + B^2d^2 + A^2d^2 + D^2a^2 + B^2c^2 + C^2b^2$$
$$= A^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + B^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$
$$+ C^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + D^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Folglich ist:

$(A^2 + B^2 + C^2 + D)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) =$ dem gegebenen Ausdruck $(Aa + Bb + Cc + Dd)^2 + (Ab - Ba + Cd - Dc)^2 + (Ac - Bd - Ca + Db)^2 + (Ad + Bc - Cb - Da)^2$.

Anmerkung. Setzt man hier $D = d = 0$, so ergiebt sich:

$$(A^2 + B^2 + C^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (Aa + Bb + Cc)^2 + (Ab - Ba)^2 + (Ac - Ca)^2 + (Bc - Cb)^2.$$

Zusatz. Bemerkenswert sind folgende Ausdrücke:

I. $a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = (a + b)^2 - 2ab$;

II. $a^2 + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = (a - b)^2 + 2ab$;

III. $(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = (a - b)^2 + 4ab$;

IV. $(a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a + b)^2 - 4ab$.

3. Quadrat des Polynom.

I. $(a + b + c + d)^2 = [(a + b) + (c + d)]^2$
$$= (a + b)^2 + 2(a + b)(c + d) + (c + d)^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Das Quadrat eines Polynom besteht also:

1) aus den Quadraten sämtlicher Glieder (die mithin immer positiv sind, auch wenn die gegebenen Glieder negativ sein sollten);

2) aus den doppelten Produkten von je 2 Gliedern (entstehend aus der Multiplication jedes Gliedes mit jedem folgenden: a mit b, c, d,
b „ c, d,
c „ d).

Beispiel. $(7x^2 - 5x - 6)^2$?

Gedacht: $[7x^2 + (-5x) + (-6)]^2 = (7x)^2 + (-5x)^2 + (-6)^2 + 2 \cdot 7x^2(-5x) + 2 \cdot 7x^2 \cdot (-6) + 2 \cdot (-5x)(-6)$;

daher: $= 49x^4 + 25x^2 + 36 - 70x^3 - 84x^2 + 60x$
$= 49x^4 - 70x^3 - 59x^2 + 60x + 36$.

II. Schreiten die Glieder nach Potenzen einer Hauptgröfse fort, so entsteht die besonders wichtige involutorische Form in folgender Weise:

$$(ax^3+bx^2+cx+d)^2=a^2x^6+b^2x^4+c^2x^2+d^2+2abx^5 \\ +2acx^4+2adx^3+2bcx^3+2bdx^2+2cdx$$

oder, wenn man, von x abgesehen, zuerst die a allein enthaltenden Glieder nimmt, hierauf die Glieder vereinigt, welche b (und aufserdem a) enthalten, hierauf die Glieder vereinigt, welche c (und aufserdem b und a) enthalten u. s. w.:

$$(ax^3+bx^2+cx+d)^2=a^2x^6+(2ax+b)\,bx^4 \\ +[2(ax^2+bx)+c]\,cx^2+[2(ax^3+bx^2+cx)+d]\,d.$$

1. Beispiel.

$$\begin{aligned} 7586^2 &= (7\cdot10^3+5\cdot10^2+8\cdot10+6)^2 \\ &= 7^2\cdot10^6+[(2\cdot7\cdot10)+5]\cdot5\cdot10^4 \\ &\quad +[2(7\cdot10^2+5\cdot10)+8]\cdot8\cdot10^2 \\ &\quad +[2\cdot(7\cdot10^3+5\cdot10^2+8\cdot10)+6]\cdot6 \\ &= 7^2\cdot10^6+[(2\cdot7)\cdot10+5]\cdot5\cdot10^4 \\ &\quad +[2\cdot(7\cdot10+5)\cdot10+8]\cdot8\cdot10^2 \\ &\quad +[2\cdot(7\cdot10^2+5\cdot10+8)\cdot10+6]\cdot6 \\ &= 7^2\cdot10^6+14_5\cdot5\cdot10^4+150_8\cdot8\cdot10^2+1516_6\cdot6 \end{aligned}$$

Schematisch:

s. 7586

	$7^2 =$	49......
$(2\cdot7=14)$	$14_5\cdot5=$	725....
$(2\cdot75=150)$	$150_8\cdot8=$	12064..
$(2\cdot758=1516)$	$1516_6\cdot6=$	90996
folglich:	$7586^2=$	57547396.

2. Beispiel. 39478^2?

s. 39478

	$3^2 =$	9
$(2\cdot3=6)$	$6_9\cdot9=$	621
$(2\cdot39=78)$	$78_4\cdot4=$	3136
$(2\cdot394=788)$	$788_7\cdot7=$	55209
$(2\cdot3947=7894)$	$7894_8\cdot8=$	631584
		$=1558512484.$

3. Beispiel. $8{,}7654^2$?

s. 8,7654

$$\begin{array}{rl}
 & 8^2 = 64, \\
(2\cdot 8 = 16) & 16_7 \cdot 7 = 1169 \\
(2\cdot 87 = 174) & 174_6 \cdot 6 = 10476 \\
(2\cdot 876 = 1752) & 1752_5 \cdot 5 = 87625 \\
(2\cdot 8765 = 17530) & 17530_4 \cdot 4 = 701216 \\
\hline
 & = 76{,}83223716.
\end{array}$$

Anmerkung. Noch einfacher wird die Rechnung, wenn man berücksichtigt, dafs durch Addition der beiden Faktoren die Zehner des folgenden 1. Faktor entstehen müssen. Z. B.:

$16_7 + 7$ (s. 2. Zeile des vorstehenden Beisp.) $= 174$ (3. Zeile);
$174_6 + 6$ (s. 3. Zeile) $= 1752$ (4. Zeile).

4. Beispiel. (Mit abgekürzter Multiplication).

$3{,}84769^2$ auf 5 Decimalstellen zu berechnen:

$$\begin{array}{rl}
3^2 = & 9, \\
6_8 \cdot 8 = & 5{,}44 \\
76_4 \cdot 4 = & 3056 \\
768\not{7} \cdot 7 = & 5381 \\
7694\not{6} \cdot 6 = & 462 \\
76952\not{9} \cdot 9 = & 69 \\
\hline
= & 14{,}80472.
\end{array}$$

Da ein 3stelliger Decimalbruch (s. oben 847) im Quadrat 6 Decimalstellen giebt, so mufs offenbar in dem Produkt, in welchem die 3. Stelle 7 auftritt (s. oben die 4. Zeile des Schema), eine Stelle gestrichen werden, wenn man das Resultat auf 5 Stellen berechnen will. In jedem 1. Faktor der nachfolgenden Produkte sind mithin stets 2 Stellen zu streichen.

4. Kubus des Binom.

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2 (a+b)^1 \\
&= \left(a^2 + 2ab + b^2\right)(a+b) \\
\hline
& a^3 + 2a^2 b + ab^2 \\
& + a^2 b + 2ab^2 + b^3, \text{ daher:}
\end{aligned}$$

$$✲\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Setzt man $b = -c$, so erhält man:

$$[a + (-c)]^3 = a^3 + 3a^2(-c) + 3a(-c)^2 + (-c)^3, \text{ d. i.}$$

$$✲\ (a-c)^3 = a^3 - 3a^2 c + 3ac^2 - c^3.$$

Der Kubus einer Differenz mufs also ganz wie beim Quadrat abwechselnd positive und negative Glieder haben, da $(-c)$ in der 1. und 3. Potenz negativ ist, in der 2. und 4. aber positiv.

Der Kubus eines Binom hat mithin folgende 4 Teile:

1) der Kubus des 1. Gliedes;
2) das 3fache Produkt aus dem Quadrat des 1. Gliedes und dem einfachen 2. Gliede;
3) das 3fache Produkt aus dem einfachen 1. Gliede und dem Quadrat des 2. Gliedes;
4) der Kubus des 2. Gliedes.

Man beachte die hierbei auftretenden symmetrischen Formen:

Potenzialcoefficienten:	1,	3,	3,	1.
Potenzen von a:	a^3	a^2	a^1	a^0
„ „ b:	b^0	b^1	b^2	b^3.

1. Beispiel.
$$\begin{aligned}(6+4)^3 &= 6^3 + 3\cdot 6^2\cdot 4 + 3\cdot 6\cdot 4^2 + 4^3\\ &= 216 + 3\cdot 36\cdot 4 + 3\cdot 6\cdot 16 + 64\\ &= 216 + 432 + 288 + 64\\ &= 1000.\end{aligned}$$

[Probe: $(6+4)^3 = 10^3 = 1000.$]

2. Beispiel.
$$\left(\frac{4a^2}{9b^5} - \frac{3b^3}{2a}\right)^3$$
$$= \left(\frac{4a^2}{9b^5}\right)^3 - 3\left(\frac{4a^2}{9b^5}\right)^2 \cdot \frac{3b^3}{2a} + 3\cdot\frac{4a^2}{9b^5}\cdot\left(\frac{3b^3}{2a}\right)^2 - \left(\frac{3b^3}{2a}\right)^3$$
$$= \frac{64a^6}{729b^{15}} - \frac{3\cdot 16a^4\cdot 3b^3}{81\cdot b^{10}\cdot 2a} + \frac{3\cdot 4a^2\cdot 9b^6}{9b^5\cdot 4a^2} - \frac{27b^9}{8a^3}$$
$$= \frac{64a^6}{729b^{15}} - \frac{8a^3}{9b^7} + 3b - \frac{27b^9}{8a^3}.$$

3. Beispiel. $\left(\frac{7x}{5y} + \frac{2y^4}{3x^3}\right)^3 - \left(\frac{7x}{5y} - \frac{2y^4}{3x^3}\right)^3 = ?$

Substituiert man einstweilen für die öfter wiederkehrenden zusammengesetzten Ausdrücke einfache Zeichen, so erleichtert man sich die Rechnung oft bedeutend. Setzt man hier

$$\frac{7x}{5y} = a,\ \frac{2y^4}{3x^3} = b, \text{ so entsteht:}$$

$$(a+b)^3-(a-b)^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$$
$$=6a^2b+2b^3.$$

Nun wieder die gegebenen Ausdrücke eingeführt, also

$a=\frac{7x}{5y}$, $b=\frac{2y^4}{3x^3}$ gesetzt, giebt:

$$6\cdot\left(\frac{7x}{5y}\right)^2\cdot\frac{2y^4}{3x^3}+2\cdot\left(\frac{2y^4}{3x^3}\right)^3=\frac{196y^2}{25x}+\frac{16y^{12}}{27x^9}.$$

1. Zusatz. $(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$ folgt unmittelbar aus der Hauptformel. Dies aber ist:

$$✵\ \underline{(a+b)^3}=a^3+b^3+3ab\,\underline{(a+b)}$$

Eben so $(a-c)^3=a^3-3ac(a-c)-c^3$ (s. oben die 2. Formel); daher: $✵\ \underline{(a-c)^3}=a^3-c^3-3ac\,\underline{(a-c)}$

2. Zusatz. Nach §. 8, 1, Zus. folgt aus der 1. Formel des vorstehenden Zusatzes:

$$✵\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

und aus der 2. Formel (nach §. 9, 4):

$$✵\ a^3-c^3=(a-c)^3+3ac(a-c).$$

5. Kubus des Polynom.

$$(a+b+c+d)^3$$
$$=[(a+b)+(c+d)]^3$$
$$=(a+b)^3+3(a+b)^2(c+d)+3(a+b)(c+d)^2+(c+d)^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+(a^2+2ab+b^2)(3c+3d)+(3a+3b)(c^2+2cd+d^2)+c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d$$
$$+3b^2a+3b^2c+3b^2d$$
$$+3c^2a+3c^2b+3c^2d$$
$$+3d^2a+3d^2b+3d^2c$$
$$+6abc+6abd+6acd+6bcd.$$

Der Kubus eines Polynom hat mithin folgende Glieder:

1) Die Kuben sämtlicher Glieder;
2) die 3fachen Produkte aus dem Quadrate jedes Gliedes und jedem andern einfachen Gliede;
3) die 6fachen Produkte aus je 3 Gliedern.

Beispiele. $(4x^2 - 5x - 7)^3$?

Gedacht: $\left[4x^2 + (-5x) + (-7)\right]^3$, daher:

$$\begin{aligned}
&= (4x^2)^3 + (-5x)^3 + (-7)^3 + 3(4x^2)^2(-5x) + 3(4x^2)^2(-7) \\
&\quad + 3(-5x)^2 \cdot 4x^2 + 3(-5x)^2(-7) \\
&\quad + 3(-7)^2 \cdot 4x^2 + 3(-7)^2(-5x) \\
&\quad + 6 \cdot 4x^2 \cdot (-5x)(-7) \\
&= 64x^6 - 125x^3 - 343 - 240x^5 - 336x^4 + 300x^4 - 525x^2 \\
&\quad + 588x^2 - 735x + 840x^3 \\
&= 64x^6 - 240x^5 - 36x^4 + 715x^3 + 63x^2 - 735x - 343.
\end{aligned}$$

Zusatz. Addiert man

$$(a + b - c)^3 + (a - b + c)^3 + (-a + b + c)^3,$$

zieht die Summe von $(a + b + c)^3$ ab und dividiert den Rest durch 24, so erhält man:

$$abc = \frac{(a+b+c)^3 - \left[(a+b-c)^3 + (a-b+c)^3 + (-a+b+c)^3\right]}{24}.$$

Diese Formel kann man benutzen, um mittelst der Kubikzahlentafel (von 1 bis 1000) 3 beliebige Zahlen zu multiplicieren.

Beispiel.

$$397 . 489 . 674 = \frac{(397 + 489 + 674)^3 - \left[(397 + 489 - 674)^3 + (397 - 489 + 674)^3 + (-397 + 489 + 674)^3\right]}{24}$$

$$= \frac{1560^3 - (212^3 + 582^3 + 766^3)}{24}$$

$$\begin{aligned}
212^3 &= 9528128 \\
582^3 &= 197137368 \\
766^3 &= 449455096 \\
\hline
& 656120592 \text{ subtr. von} \\
1560^3 &= 3796416000 \\
\hline
& 3140295408 : 24 \\
397 \cdot 489 \cdot 674 &= 130845642.
\end{aligned}$$

6. Die höheren Potenzen des Binom.

$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b)$.

$$\begin{aligned}
&= (\overline{1} \cdot a^3 + \overline{3} \cdot a^2 b + \underline{3} \cdot ab^2 + \underline{1} \cdot b^3)(1 \cdot a + 1 \cdot b) \\
\hline
&\quad \overline{1} \cdot a^4 + \overline{3} \cdot a^3 b + \underline{3} \cdot a^2 b^2 + \underline{1} \cdot ab^3 \\
&\quad \phantom{\overline{1} \cdot a^4} + \overline{1} \cdot a^3 b + \overline{3} \cdot a^2 b^2 + \underline{3} \cdot ab^3 + \underline{1} \cdot b^4 \\
\hline
(a+b)^4 &= \overline{1} \cdot a^4 + (\overline{1} + \overline{3})\, a^3 b + (\overline{3} + \underline{3})\, a^2 b^2 + (\underline{3} + \underline{1})\, ab^3 + \underline{1} \cdot b^4.
\end{aligned}$$

oder: $$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3 b + 6\,a^2 b^2 + 4\,ab^3 + b^4.$$

Nimmt man b negativ, so entsteht:

$$(a-b)^4 = a^4 + 4\,a^3(-b) + 6\,a^2(-b)^2 + 4\,a(-b)^3 + (-b)^4, \text{ d. i.}$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4\,a^3 b + 6\,a^2 b^2 - 4\,ab^3 + b^4.$$

Multipliciert man diese Formeln wieder mit $(a \pm b)$, so würde man $(a \pm b)^5$ erhalten. Offenbar aber müssen die in $(a \pm b)^4$ von a^4 bis a^0 und b^0 bis b^4 fortschreitenden Potenzen auch in $(a \pm b)^5$ eben so regelmäfsig von a^5 bis a^0 und b^0 bis b^5 fortschreiten, da eben nur jeder Exponent jener Reihen durch die Multiplication mit a^1 und b^1 um 1 gröfser wird.

Folglich müssen die Glieder von $(a \pm b)^5$ folgende Potenzen von a und b enthalten:

$$a^5,\ a^4 b,\ a^3 b^2,\ a^2 b^3,\ ab^4,\ b^5;$$

die von $(a \pm b)^6$:

$$a^6,\ a^5 b,\ a^4 b^2,\ a^3 b^3,\ a^2 b^4,\ ab^5,\ b^6.$$

Das Abwechseln der Zeichen bei den verschiedenen Potenzen der Differenz $a - b$ folgt einfach aus dem Umstande, dafs stets

das 2. Glied den Faktor $(-b)^1 = -b$,
„ 3. „ „ „ $(-b)^2 - +b^2$,
„ 4. „ „ „ $(-b)^3 = -b^3$,
„ 5. „ „ „ $(-b)^4 = +b^4$ u. s. w.

enthält.

Vergleicht man noch die Potenzialcoefficienten der 3. Potenz

$$\overline{1}\quad \overline{3}\quad \underline{3}\quad \underline{1}$$

mit den Potenzialcoefficienten der 4. Potenz:

$$\overline{1},\ \overline{1}+\overline{3},\ \overline{3}+\underline{3},\ \underline{3}+\underline{1},\ \underline{1},$$

so findet man, dafs man aus den Potenzialcoefficienten irgend einer Potenz von $a+b$ die Potenzialcoefficienten derjenigen Potenz, deren Exponent um 1 gröfser ist, dadurch ableiten kann, dafs man je 2 neben einander liegende Coefficienten jener Potenz addiert.

Ohne daher folgende Formen zu kennen:

$(a+b)^0 = 1$, also der Potenzialcoeff. der 0ten Pot. $= 1$;
$(a+b)^1 = 1.a + 1.b$, „ die „ „ 1 „ „ $= 1, 1$;
$(a+b)^2 = 1.a^2 + 2.ab + 1.b^2$, „ „ „ „ 2 „ „ $= 1, 2, 1$

u. s. w., hätte man schon aus 1, dem Potenzialcoefficient der 0ten Potenz, durch Addition von je 2 neben einander liegenden Coefficienten:

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & & 1 & 0 \\ & 1 & 2 & 1 & \end{array}$$

die Potenzialcoefficienten der nachfolgenden Potenzen erhalten.

Auf diese Weise ergiebt sich folgende Tafel, die nach ihrem Erfinder „das Dreieck von Pascal" heifst:

1 . . . . für die 0te Potenz
1 1 . . . „ „ 1te „
1 2 1 . . „ „ 2te „
1 3 3 1 „ „ 3te „
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1 u. s. w.

Um nun irgend eine Potenz eines Binom zu entwickeln, hat man nur für die betreffende Potenz die Coefficienten aus der vorstehenden Tafel aufzusuchen und die Zeichen der Glieder nebst den Potenzen von a und b auf Grund der vorstehenden Bemerkungen hinzuzufügen.

1. Beispiel. $(a+b)^5$?

Zeichen:	+	+	+	+	+	+	
Potenzialcoeff.:	1	5	10	10	5	1	
Potenzen v. a:	a^5	a^4	a^3	a^2	a^1	a^0	
„ „ b:	b^0	b^1	b^2	b^3	b^4	b^5	(mult.:)

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

2. Beispiel. $(a-b)^6$?

Zeichen:	+	—	+	—	+	—	+
Potentialcoeff.:	1	6	15	20	15	6	1
Potenzen v. a:	a^6	a^5	a^4	a^3	a^2	a	
„ „ b:		b	b^2	b^3	b^4	b^5	b^6

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

1. Zusatz. Das für $(a+b)^n$ entwickelte Polynom hat im vorletzten Gliede a^1, im drittletzten Gliede a^2, im 1. Gliede a^n, mithin mufs den Exponenten dieser Potenzen zufolge die Anzahl dieser Glieder $= n$ sein. Da aber noch das letzte, von a freie Glied hinzukommt, so mufs die Anzahl sämtlicher Glieder $n+1$ sein. $(a \pm b)^9$ mufs z. B. aus 10 Gliedern bestehen.

2. Zusatz. Es ist

$$1\cdot a^7+7\cdot a^6b+21\cdot a^5b^2+35\cdot a^4b^3+\ldots+1\cdot b^7=(1\cdot a+1\cdot b)^7.$$

Setzt man $a=1$ und $b=1$, so erhält man:

$$1+7+21+35+\ldots+1=(1+1)^7=2^7.$$

Es mufs also die Summe sämtlicher Potenzialcoefficienten der n^{ten} Potenz $=2^n$ sein.

3. Zusatz.

$$\begin{aligned}11^3&=(10+1)^3\\&=\mathbf{1}\cdot10^3+\mathbf{3}\cdot10^2+\mathbf{3}\cdot10+\mathbf{1}\\&=\left.\begin{array}{r}1\,.\,.\,.\\3\,.\,.\\3\,.\\1\end{array}\right\}\text{ addiert:}\\11^3&=1331.\end{aligned}$$

Addiert man mithin die immer um eine Stelle nach rechts ausgerückten Potenzialcoefficienten der n^{ten} Potenz, so erhält man die n^{te} Potenz der Zahl 11.

Es sei z. B. 11^7 zu berechnen.

$$\begin{array}{l}1\\\;\;7\\\;\;21\\\;\;\;\;35\\\;\;\;\;\;\;35\\\;\;\;\;\;\;\;\;21\\\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;7\\\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1\\\hline 11^7=19487171.\end{array}$$

4. Zusatz.

$$abcd=\frac{(a+b+c+d)^4-\left[(a+b+c-d)^4+(a+b-c+d)^4+(a-b+c+d)^4+(-a+b+c+d)^4\right]}{120}.$$

(Vergl. §. 61, 2, 2. Zus. und §. 62, 5, Zus.)

5. Zusatz.

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \quad \text{(s. §. 62, 2, Zus.).}$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \quad \text{(s. §. 62, 4, 2. Zus.).}$$

Eben so:

$$\begin{aligned}a^4+b^4&=(a+b)^4-4a^3b-6a^2b^2-4ab^3\\&=(a+b)^4-4a^3b-8a^2b^2-4ab^3+2a^2b^2\\&=(a+b)^4-4ab\left(a^2+2ab+b^2\right)+2a^2b^2,\text{ oder}\end{aligned}$$

$$a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2(ab)^2.$$

$$a^5+b^5=(a+b)^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4,$$
$$=(a+b)^5-5a^4b-15a^3b^2-15a^2b^3-5ab^4+5a^3b^2$$
$$+5a^2b^3$$
$$a^5+b^5=(a+b)^5-5ab(a+b)^3+5a^2b^2(a+b).$$
$$a^6+b^6=(a+b)^6-6a^5b-15a^4b^2-20a^3b^3-15a^2b^4-6ab^5$$
$$=(a+b)^6-6a^5b-24a^4b^2-36a^3b^3-24a^2b^4-6ab^5$$
$$+9a^4b^2+18a^3b^3+9a^2b^4-2a^3b^3$$
$$a^6+b^6=(a+b)^6-6ab(a+b)^4+9a^2b^2(a+b)^2-2(ab)^3.$$

Setzt man $a+b=s$ (Summe), $ab=p$ (Produkt), so ist also:

$$(A)\left\{\begin{aligned}
a^2+b^2&=s^2-2p\\
a^3+b^3&=s^3-3sp\\
a^4+b^4&=s^4-4s^2p+2p^2\\
a^5+b^5&=s^5-5s^3p+5sp^2\\
a^6+b^6&=s^6-6s^4p+9s^2p^2-2p^3\\
a^7+b^7&=s^7-7s^5p+14s^3p^2-7sp^3\\
a^8+b^8&=s^8-8s^6p+20s^4p^2-16s^2p^3+2p^4.
\end{aligned}\right.$$

6. Zusatz. Nimmt man hier b negativ, so entsteht:

$$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$
$$a^4+(-b)^4=a^4+b^4=(a-b)^4+4ab(a-b)^2+2a^2b^2$$
$$a^5-b^5=(a-b)^5+5ab(a-b)^3+5a^2b^2(a-b) \text{ u. s. w.}$$

Setzt man $a-b=d$ (Differenz), $ab=p$, so ist:

$$a^3-b^3=d^3+3dp$$
$$a^5-b^5=d^5+5d^3p+5dp^2$$
$$a^7-b^7=d^7+7d^5p+14d^3p^2+7dp^3$$
$$a^4+b^4=d^4+4d^2p+2p^2$$
$$a^6+b^6=d^6+6d^4p+9d^2p^2+2p^3.$$

Anmerkung. a^2-b^2, a^4-b^4 u. s. w. lassen sich auf solche einfache Formen nicht zurückführen.

7. Der binomische Lehrsatz.

Um die 30. Potenz von $a+b$ zu bilden, müfste man den vorstehenden Sätzen zufolge die sämtlichen Potenzen $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ bis $(a+b)^{29}$ entwickeln, um alsdann aus den Coefficienten für die 29. Potenz diejenigen der 30. Potenz abzuleiten. Offenbar wird daher ein Verfahren von höchster Wichtigkeit sein, welches unmittelbar die 31 Glieder der 30. Potenz giebt, ohne erst die vorhergehenden Potenzen berechnen zu müssen.

Im Nachstehenden wollen wir versuchen, dieses Verfahren zu entwickeln.

Dem 6. Satze zufolge ist:

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10 a^9 b + 45 a^8 b^2 + 120 a^7 b^3 + \ldots.$$

$$(a+b)^{12} = a^{12} + 12 a^{11} b + 66 a^{10} b^2 + 220 a^9 b^3 + \ldots, \text{ oder}$$

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10 a^{10-1} b + 45 a^{10-2} b^2 + 120 a^{10-3} b^3 + 210 a^{10-4} b^4 + \ldots.$$

$$(a+b)^{12} = a^{12} + 12 a^{12-1} b + 66 a^{12-2} b^2 + 220 a^{12-3} b^3 + 495 a^{12-4} b^4 + \ldots.$$

Es mufs also $(a+b)^n$ offenbar die Form

$$a^n + n a^{n-1} b + (\ldots) a^{n-2} b^2 + (\ldots) a^{n-3} b^3 + (\ldots) a^{n-4} b^4 + \ldots.$$

haben und es würde sich nur fragen, wie grofs die hier vorläufig mit $(\ldots)$ angedeuteten Coefficienten sind.

Anmerkung. Da der Coefficient des 1. Gliedes stets 1 sein mufs und sich erst die folgenden Coefficienten nach dem Exponent n der Potenz $(a+b)^n$ richten, so bezeichnet man den Coefficient des 2. Gliedes, der offenbar n ist (siehe das Dreieck von Pascal), als „1. Binomialcoefficient". Der 1., 2., 3.... Binomialc. der 10. Potenz ist also 10, 45, 120....

Nach §. 13, 11 ist $A = B \cdot \frac{A}{B}$, folglich ist für die 10. Potenz

$$\text{der 2. Binomialc. (45)} = \text{1. Binomialc.} \times \frac{\text{2. Binomialc.}}{\text{1. Binomialc.}} = 10 \cdot \frac{45}{10} = 10 \cdot \frac{9}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2},$$

$$\text{der 3. Binomialcoeff.} = \text{2. Binomialc.} \times \frac{\text{3. Binomialc.}}{\text{2. Binomialc.}} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{120}{45} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\text{der 4. Binomialcoeff.} = \text{3. Binomialc.} \times \frac{\text{4. Binomialc.}}{\text{3. Binomialc.}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{210}{120} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Eben so ergiebt sich für die 12. Potenz

$$\text{der 2. Binomialc. (66)} = \text{1. Binomialc.} \times \frac{\text{2. Binomialc.}}{\text{1. Binomialc.}} = 12 \cdot \frac{66}{12} = \frac{12}{1} \cdot \frac{11}{2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2},$$

$$\text{der 3. Binomialcoeff.} = \text{2. Binomialc.} \times \frac{\text{3. Binomialc.}}{\text{2. Binomialc.}} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot \frac{220}{66} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\text{der 4. Binomialcoeff.} = \text{3. Binomialc.} \times \frac{\text{4. Binomialc.}}{\text{3. Binomialc.}}$$

$$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{495}{220} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Somit erhält man:

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10\, a^{10-1} b + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} a^{10-2} b^2 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{10-3} b^3$$
$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{10-4} b^4 + \ldots.$$

$$(a+b)^{12} = a^{12} + 12\, a^{12-1} b + \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} a^{12-2} b^2$$
$$+ \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{12-3} b^3 + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{12-4} b^4 + \ldots.$$

Dies kann auch geschrieben werden:

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10\, a^{10-1} b + \frac{10\,(10-1)}{1 \cdot 2} a^{10-2} b^2$$
$$+ \frac{10\,(10-1)\,(10-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{10-3} b^3$$
$$+ \frac{10\,(10-1)\,(10-2)\,(10-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{10-4} b^4 + \ldots.$$

$$(a+b)^{12} = a^{12} + 12\, a^{12-1} b + \frac{12\,(12-1)}{1 \cdot 2} a^{12-2} b^2$$
$$+ \frac{12\,(12-1)\,(12-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{12-3} b^3$$
$$+ \frac{12\,(12-1)\,(12-2)\,(12-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{12-4} b^4 + \ldots.$$

Setzt man in den vorstehenden Formeln an die Stelle von 10, resp. 12, die Zahl n, so erhält man den sogenannten „binomischen Lehrsatz“ in der Form:

$$✵\quad (a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n\,(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5 + \ldots.$$

Diese Formel ist aber nur aus der 10. und 12. Potenz abgeleitet und es würde sich fragen, ob sie auch für jeden andern Exponent gilt. Um dies zu beweisen, nehmen wir zunächst an, die hier aufgestellte Form gelte wirklich für die n^{te} Potenz und ent-

wickeln $(a+b)^{n+1}$ so aus derselben, wie $(a+b)^3$ aus $(a+b)^2$, $(a+b)^4$ aus $(a+b)^3$ u. s. w. entwickelt wurde.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\
&= \Big[a^n + na^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 \\
&\qquad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \ldots \Big](a+b) \\
&= a^{n+1} + na^n b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-1} b^2 \\
&\qquad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-2} b^3 + \ldots \\
&\qquad + a^n b + n \cdot a^{n-1} b^2 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

(Denn es ist z. B. $a^{n-2} \cdot a = a^{n-2} \cdot a^1 = a^{n-2+1} = a^{n-1}$.)

$$
\begin{aligned}
&= a^{n+1} + (n+1) a^n b + \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + n\right] a^{n-1} b^2 \\
&\qquad + \left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right] a^{n-2} b^3 + \ldots \\
&= a^{n+1} + (n+1) a^n b + n\left[\frac{n-1}{2} + 1\right] a^{n-1} b^2 \\
&\qquad + \frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n-2}{3} + 1\right] a^{n-2} b^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

Nun ist $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n-1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{n-1+2}{2} = \frac{n+1}{2}$, $\frac{n-2}{3} + 1 = \frac{n-2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{n-2+3}{3} = \frac{n+1}{3}$, daher:

$$
\begin{aligned}
&= a^{n+1} + (n+1) a^n b + n \cdot \frac{n+1}{2} a^{n-1} b^2 \\
&\qquad + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n+1}{3} a^{n-2} b^3 + \ldots \\
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + (n+1) a^n b + \frac{(n+1)n}{2} a^{n-1} b^2 \\
&\qquad + \frac{(n+1)n(n-1)}{2 \cdot 3} a^{n-2} b^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

Setzt man hier $n+1 = r$, so wird also:
$n = r-1$, $n-1 = r-1-1 = r-2$, $n-2 = r-1-2 = r-3$ u. s. w.

und man erhält

$$(a+b)^r = a^r + r a^{r-1} b + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2} a^{r-2} b^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3} a^{r-3} b^3 + \dots.$$

Diese Formel hat genau dieselbe Gestalt wie die als richtig angenommene $(a+b)^n$ und es mufs daher $(a+b)^{n+1}$ richtig sein, wenn es $(a+b)^n$ ist. Da nun $(a+b)^n$ mit $(a+b)^{12}$ übereinstimmt, so mufs auch $(a+b)^{12+1}$, d. i. $(a+b)^{13}$ mit $(a+b)^{n+1}$, also auch der Form nach mit $(a+b)^n$ übereinstimmen. Da jetzt jene Form für $(a+b)^{13}$ gilt, so mufs auch $(a+b)^{13+1}$, d. i. $(a+b)^{14}$ mit $(a+b)^{n+1}$, also auch wieder mit $(a+b)^n$ übereinstimmen. So ergiebt sich, dafs die für $(a+b)^n$ gefundene Formel für alle Exponenten gelten mufs.

Anmerkung. Das Verfahren, aus einigen für $n = 1, 2, 3 \dots$ gültigen Auflösungen einer beliebigen Aufgabe auf die allgemein für n gültige Formel zu schliefsen, dann die Formel für $n+1$ aus der für n angenommenen eben so abzuleiten, wie es z. B. mit $n=3$ aus $n=2$ geschehen, läfst, wie bei der vorstehenden Ableitung des binomischen Lehrsatzes gezeigt wurde, die angenommene Form als unbedingt richtig erscheinen, wenn die für $n+1$ berechnete Formel mit jener übereinstimmt. Diese Beweisführung nennt man „Beweis durch Induktion“ oder „Schlufs von n auf $n+1$“ oder „das Kästner'sche Verfahren“.

Beispiele.

$$(a+b)^{30} = a^{30} + 30 a^{29} b + \frac{30\cdot 29}{2} a^{28} b^2 + \frac{30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3} a^{27} b^3 + \dots$$
$$= a^{30} + 30 a^{29} b + 435 a^{28} b^2 + 4060 a^{27} b^3 + \dots.$$

$$(a-b)^{20} = a^{20} - 20 a^{19} b + \frac{20\cdot 19}{2} a^{18} b^2 - \frac{20\cdot 19\cdot 18}{2\cdot 3} a^{17} b + \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{2\cdot 3\cdot 4} a^{16} b^4 - \dots$$
$$= a^{20} - 20 a^{19} b + 190 a^{18} b^2 - 1140 a^{17} b^3 + 4845 a^{16} b^4 - \dots.$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4 a^3 b + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 1} a^2 b^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} ab^3 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} a^0 b^4 + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} a^{-1} b^5 + \dots$$
$$= a^4 + 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 ab^3 + b^4 + 0 + 0 + \dots.$$

Das 6. Glied ist hier $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{-1} b^5 \cdot 0$ (folglich nach §. 18, 6) $= 0$.

1. Zusatz.

$$(1+b)^n = 1^n + n \cdot 1^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 1^{n-2} b^2 + \ldots \text{ oder}$$

$$✵ \quad (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} b^3 + \ldots$$

2. Zusatz. Nimmt man hier b negativ, so wird bekanntlich $b, b^3, \ldots$ negativ, $b^2, b^4, \ldots$ positiv. Daher:

$$✵ \quad (1-b)^n = 1 - nb + \frac{n(n-1)}{2} b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} b^3 + \ldots$$

3. Zusatz. Um die nachfolgenden Sätze in übersichtlicher Form geben zu können, mögen zunächst einige Erklärungen vorausgeschickt werden.

Das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ bezeichnet man mit $4!$, gelesen „4 Fakultät", eben so $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$

Der 2. Binomialcoefficient der n^{ten} Potenz kann daher auch $\frac{n(n-1)}{2!}$, der dritte: $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ geschrieben werden.

Ferner kürzt man die Binomialcoefficienten

$$n, \quad \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{mit } \binom{n}{1}, \ \binom{n}{2}, \ \binom{n}{3} \text{ ab,}$$

gelesen „n über 1", „n über 2", „n über 3". [Manche schreiben auch $n_1, n_2, n_3, \ldots$, gelesen: „n tief 1", „n tief 2". Diese Bezeichnung kann aber leicht zu Mifsverständnissen führen.]

Es ist also der

$$\text{4. Binomialcoeff. } \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

$$\text{5. } \quad " \quad \binom{n}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Vergleicht man hier den gleichvielten Faktor des Zählers und Nenners (z. B. den 4. Faktor $n-3$ mit der darunter stehenden 4), so findet man, dafs die von n abgezogene Zahl um 1 kleiner ist, als der zugehörige Faktor des Nenners.

Es ist also:

$$\binom{n}{5} = \frac{[n-(1-1)]\cdot[n-(2-1)]\cdot[n-(3-1)]\cdot[n-(4-1)]\cdot[n-(5-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Folglich ist der 17. Binomialcoefficient:

$$\binom{n}{17} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(9-1)]\ldots\ldots[n-(17-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots 9\ldots\ldots 17},$$

allgemein der r^{te} Binomialcoefficient:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(k-1)]\ldots\ldots[n-(r-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots k\ldots\ldots r}.$$

Hieraus folgt, dafs ein Quotient ein Binomialcoefficient ist, wenn

1) der Zähler ein Produkt ist, bei welchem jeder Faktor um 1 kleiner als der vorhergehende ist;
2) der Nenner ein Produkt der natürlichen Zahlen von 1 an ist;
3) der letzte Faktor des Zählers = ist der Differenz aus dem 1. Faktor des Zählers und dem um 1 verminderten letzten Faktor des Nenners.

Dieser Binomialcoefficient wird alsdann dadurch abgekürzt, dafs man in eine Parenthese den 1. Faktor des Zählers und darunter den letzten Faktor des Nenners setzt.

So ist z. B.

$$\frac{(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)\ldots\ldots(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots(n-k+3)}$$

ein mit $\binom{n+1}{n-k+3}$ zu bezeichnender Binomialcoefficient, denn im Zähler ist der 2. Faktor n um 1 kleiner als der 1te: $n+1$, der 3. Faktor $n-1$ um 1 kleiner als der 2. Faktor n u. s. w., der Nenner aber ist das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis $n-k+3$ und der letzte Faktor des Zählers ist = der Differenz aus dem 1. Faktor des Zählers und dem um 1 verminderten letzten Faktor des Nenners $= n+1-(n-k+3-1) = k-1$.

Da der vorletzte Faktor des Zählers um 1 gröfser als der letzte ist, so ist derselbe $= k-1+1 = k$.

Der vorletzte Faktor des Nenners ist um 1 kleiner als der letzte, folglich ist er $n-k+3-1 = n-k+2$.

4. Zusatz. Die vom 1. und letzten Potenzialcoefficient der n^{ten} Potenz (n ganz und positiv) gleichweit abstehenden Binomialcoefficienten sind einander gleich. So ist z. B. für die 5. Potenz:

der 1. Potenzialcoeff. (1) = dem letzten (1),
„ 2. „ (5) = „ vorletzten (5),
„ 3. „ (10) = „ drittletzten (10).

Es ist daher für die 12. Potenz
der 3. Binomialcoeff. (220) = dem 12 — 3., d. i. 9. (220),
für die n^{te} Potenz
der k^{te} Binomialcoeff. = dem $n - k^{\text{ten}}$.

Beweis.

I. Speciell. Der 3. Binomialcoeff. der 10. Pot. $= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Der 10 — 3. oder 7. „ „ „ „ $= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \text{dem 3. Binomialc.}$$

II. Allgemein. Der k^{te} Binomialcoeff. der n^{ten} Potenz:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \ldots\ldots [n-(k-1)]}{1 \cdot \; 2 \ldots\ldots\ldots k}$$

$$= \frac{n(n-1) \ldots\ldots (n+1-k)}{1 \cdot \; 2 \ldots\ldots\ldots k}.$$

Der eben so weit vom letzten Coefficient abstehende Binomialcoeff. ist der $n-k^{\text{te}}$ (s. die Zeile vor dem Beweis). Es sei $n-k > k$ (wie vorher $10-3 > 3$, d. i. $7 > 3$).

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1) \ldots\ldots [n-(n-k-1)]}{1 \cdot \; 2 \ldots\ldots (n-k)}.$$ Da k zwischen 1 und $n-k$ liegt, so kann man noch innerhalb des 1. und letzten Faktor folgende Faktoren hinzufügen (ähnlich wie im 3. Zusatze beim 17. und r^{ten} Binomialcoeff.):

$$= \frac{n(n-1) \ldots\ldots [n-(k-1)]\,[n-(k+1-1)] \ldots\ldots [n-(n-k-1)]}{1 \cdot \; 2 \ldots\ldots k \quad (k+1) \ldots\ldots (n-k)}$$

$$= \frac{n(n-1) \ldots\ldots (n+1-k) \cdot (n-k) \ldots\ldots (k+1)}{1 \cdot \; 2 \ldots\ldots k \cdot (k+1) \ldots\ldots (n-k)}$$

$$= \frac{n(n-1)\;\ldots\ldots\;(n+1-k)}{1\cdot\;\;2\;\;\;\;\ldots\ldots\;\;\;\;k} \cdot \frac{(n-k)\;\ldots\ldots\;(k+1)}{(k+1)\;\ldots\ldots\;(n-k)}.$$

Da der letzte Bruch dieselben Faktoren von $k+1$ bis $n-k$ im Zähler und Nenner enthält, so ist der Wert dieses Bruches $=1$ (s. §. 13, 8). Daher:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)\;\ldots\ldots\;(n+1-k)}{1\cdot\;\;2\;\;\;\;\ldots\ldots\;\;\;\;k}.$$

Die rechte Seite ist nach dem 3. Zusatze der Binomialcoefficient $\binom{n}{k}$; folglich ist $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

5. Zusatz. Die Summe des k^{ten} und $k+1^{\text{ten}}$ Binomialcoeff. der n^{ten} Potenz ist $=$ dem $k+1^{\text{ten}}$ Binomialcoeff. der $(n+1)^{\text{ten}}$ Potenz. So ist z. B. die Summe des 4. und 5. Binomialcoeff. der 11. Potenz, d. i. $330+462=792$, $=$ dem 5. Binomialcoeff. der 12. Potenz.

Beweis. I. Speciell.

$$\binom{11}{4} + \binom{11}{5} = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$

$$= \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot5 + 11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$

$$= \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\,(5+7)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \binom{12}{5}.$$

II. Allgemein.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\;\ldots\ldots\;(n+1-k)}{1\cdot\;\;2\;\;\;\;\ldots\ldots\;\;\;\;k} + \frac{n(n-1)\;\ldots\ldots\;(n+1-k)\,(n-k)}{1\cdot\;\;2\;\;\;\;\ldots\ldots\;\;\;\;k\;\;\cdot(k+1)}$$

$$= \frac{n(n-1)\;\ldots\ldots\;(n+1-k)\,(k+1) + n(n-1)\;\ldots\ldots\;(n+1-k)\,(n-k)}{1\cdot2\;\ldots\ldots\ldots\;k\cdot(k+1)}$$

$$= \frac{n(n-1)\;\ldots\ldots\;(n+1-k)\,[(k+1)+(n-k)]}{1\cdot2\;\ldots\ldots\;(k+1)}$$

$$= \frac{n(n-1) \ldots\ldots (n+1-k)\cdot(n+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (k+1)}$$

$$= \frac{(n+1)\,n\,(n-1) \ldots\ldots (n+1-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (k+1)} = \binom{n+1}{k+1}.$$

6. Zusatz. $a^{\infty} = \infty$, wenn $a > 1$; z. B. $(1\frac{2}{345})^{\infty} = \infty$.

Beweis. Wenn a gröfser als 1, ferner b irgend eine positive Zahl, so kann man $a = 1 + b$ setzen; denn $1 + b > 1$ (s. §. 1, 6).

Nun ist $a^2 = (1+b)^2 = 1 + 2b + b^2$

$$a^3 = (1+b)^3 = 1 + 3b + 3b^2 + \ldots.$$

$$a^4 = (1+b)^4 = 1 + 4b + 6b^2 + \ldots.$$

$$a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2} b^2 + \ldots.$$

$$a^{\infty} = (1+b)^{\infty} = 1 + \infty\, b + \frac{\infty(\infty - 1)}{2} b^2 + \ldots.$$

$$= 1 + b\,\infty + \frac{\infty \cdot \infty}{2} b^2 + \ldots. \text{ (s. §. 18, 9, I)}$$

$$= 1 + b\,\infty + \infty \cdot \infty\, b^2 + \ldots. \text{ (s. §. 18, 11, I)}$$

$$= 1 + \infty + \infty \cdot \infty + \ldots. \text{ (s. §. 18, 3)}$$

$$a^{\infty} = \infty \text{ (s. §. 18, 2).}$$

7. Zusatz. $a^{\infty} = 0$, wenn $a < 1$ (a also ein echter Bruch ist). Z. B. $\left(\frac{998}{999}\right)^{\infty} = 0$.

Beweis. Ein echter Bruch kann $\frac{1}{1+b}$ geschrieben werden, wenn b eine positive Zahl ist, weil $1 + b > 1$.

Es sei daher $a = \frac{1}{1+b}$.

Nun ist $a^{\infty} = \left(\frac{1}{1+b}\right)^{\infty} = \left[(1+b)^{-1}\right]^{\infty} = (1+b)^{-\infty}$

$$= \frac{1}{(1+b)^{\infty}} = \frac{1}{\infty} \text{ (s. 6. Zusatz) } = 0.$$

8. Die Multiplication der Basis einer Potenz mit -1.

I. Die Potenz mit **geradzahligem** Exponent bleibt unverändert, wenn man die Basis mit -1 multipliciert.

Beweis. $a^6 = (-a)^6 = (a \cdot -1)^6$.

$$a^{2n} = (-a)^{2n} \text{ (s. §. 57, 12) } = (a \cdot -1)^{2n}.$$

Beispiele.

$(a-b)^2=(b-a)^2$. Probe: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,

$(b-a)^2=b^2-2ab+a^2$, dasselbe!

$(3-4x-5x^2)^4=(5x^2+4x-3)^4$.

$$7(x-y)^{10}-11(y-x)^{10}+(y-x)^{10}$$
$$=7(x-y)^{10}-11(x-y)^{10}+(x-y)^{10}$$
$$=-3(x-y)^{10}.$$

$$(5a-4b)^2\left[\frac{24b^2}{(5a-4b)^2}-\frac{8b^2-a^2}{(4b-5a)^2}-\frac{b-a}{4b-5a}-\frac{3}{4}\right].$$

Der 2. Bruch bleibt unserm Satze zufolge unverändert, wenn für denselben $\frac{8b^2-a^2}{(5a-4b)^2}$ gesetzt wird. Wollte man jenen Bruch mit -1 erweitern, so erhielte man nicht etwa $\frac{a^2-8b^2}{(5a-4b)^2}$, weil dann wohl der Zähler mit -1 multipliciert, der Nenner aber unverändert gelassen worden wäre. Um ihn mit -1 zu erweitern, könnte man daher nur $\frac{a^2-8b^2}{-(4b-5a)^2}$ oder $\frac{a^2-8b^2}{-(5a-4b)^2}$ schreiben.

Der gegebene Ausdruck ist mithin in folgenden zu verwandeln:

$$(5a-4b)^2\left[\frac{24b^2}{(5a-4b)^2}-\frac{8b^2-a^2}{(5a-4b)^2}-\frac{a-b}{5a-4b}-\frac{3}{4}\right]$$
$$=24b^2-(8b^2-a^2)-(5a-4b)(a-b)-\frac{3}{4}(5a-4b)^2$$
$$=24b^2-8b^2+a^2-(5a^2-9ab+4b^2)$$
$$-\frac{3}{4}(25a^2-40ab+16b^2)$$
$$=39ab-\frac{91a^2}{4}=13a\left(3b-\frac{7a}{4}\right).$$

II. Man kann die Basis einer Potenz mit **ungeradzahligem** Exponent mit -1 multiplicieren, wenn man das Vorzeichen der Potenz in das entgegengesetzte verwandelt.

Beweis. $+a^7=-(-a^7)=-(-a)^7=-(a\cdot-1)^7$.

Beispiele.

$$5\,(9x - 1\tfrac{1}{8})^3 - 12\,(1\tfrac{1}{8} - 9x)^3 + 9\,(1\tfrac{1}{8} - 9x)^3$$

$$= 5\left(9x - \frac{9}{8}\right)^3 + 12\left(9x - \frac{9}{8}\right)^3 - 9\left(9x - \frac{9}{8}\right)^3$$

$$= 8\left(9x - \frac{9}{8}\right)^3 = \left[2\left(9x - \frac{9}{8}\right)\right]^3 = \left[9\left(2x - \frac{2}{8}\right)\right]^3$$

$$= 9^3\left(2x - \frac{1}{4}\right)^3 = 729\left(2x - \frac{1}{4}\right)^3.$$

$$(7x - 4)^5\left[\frac{11x + 2}{(7x - 4)^4} - \frac{8 - 3x}{(4 - 7x)^5}\right]$$

$$= (7x - 4)^5\left[\frac{11x + 2}{(7x - 4)^4} - \frac{8 - 3x}{-(7x - 4)^5}\right]$$

der 2. Bruch mit -1 erweitert

$$= (7x - 4)^5\left[\frac{11x + 2}{(7x - 4)^4} - \frac{3x - 8}{(7x - 4)^5}\right]$$

$$= (7x - 4)\,(11x + 2) - 3x + 8$$

$$= 11x\,(7x - 3).$$

9. Endigt sich die 1. Potenz einer ganzen Zahl

	auf	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9,

so endigt sich

die 2. Potenz	auf	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1,
„ 3. „	„	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9,
„ 4. „	„	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1.

Die 5., 9., 13, ... $(4n + 1)^{\text{te}}$ Pot. endigt sich wie die 1. Pot.,
„ 6., 10., 14., ... $(4n + 2)^{\text{te}}$ „ „ „ „ „ 2. „
„ 7., 11., 15., ... $(4n + 3)^{\text{te}}$ „ „ „ „ „ 3. „
„ 8., 12., 16., ... $4n^{\text{te}}$ „ „ „ „ „ 4. „

Die Zahlen jener Tabelle sind leicht gebildet, denn

$$3978^2 = 3978 \cdot 3978 = \ldots.4;$$

$$3978^3 = 3978^2 \cdot 3978 = (\ldots.4) \cdot (\ldots.8) = \ldots.2$$

u. s. w.

Anwendungen.

Keine Quadratzahl kann sich auf 2, 3, 7, 8 endigen.

Endigt sich eine Kubikzahl auf 3, so mufs die Kubikwurzel aus derselben sich auf 7 endigen.

$\sqrt[3]{314432}$? Weifs man, dafs die Wurzelbasis eine Kubikzahl ist, so mufs die gesuchte Kubikwurzel $= 68$ sein; denn

1) endigt sich nur $(\ldots . 8)^3$ auf 2,

2) ist $60^3 = 216000$, $70^3 = 343000$;

folglich 6 Zehner und 2 Einer.

§. 63. Division eines Polynom durch ein Monom.

1. Jedes Glied des Polynom ist durch das Monom zu dividieren (s. §. 13, 12).

Beispiele.

$$\frac{10a^2 + 6ab - 3ac}{15abc} = \frac{10a^2}{15abc} + \frac{6ab}{15abc} - \frac{3ac}{15abc}$$
$$= \frac{2a}{3bc} + \frac{2}{5c} - \frac{1}{5b}.$$

$-\frac{4a^2 + 5a - 6}{12a}$? Steht ein Minuszeichen vor dem Quotient, so denke man sich $-(\ldots .)$; daher:

$$= -\left(\frac{4a^2 + 5a - 6}{12a}\right) = -\left(\frac{a}{3} + \frac{5}{12} - \frac{1}{2a}\right)$$
$$= \frac{1}{2a} - \frac{5}{12} - \frac{a}{3}.$$

$\left(\frac{4a}{3} - \frac{5b}{6}\right) : -2a$? Zuerst $+\frac{4a}{3} : -2a$,

dann $-\frac{5b}{6} : -2a$, daher

$$= -\frac{4a}{3 \cdot 2a} + \frac{5b}{6 \cdot 2a} = \frac{5b}{12a} - \frac{2}{3}.$$

$\left(2\tfrac{1}{4} - \frac{x}{3} + \frac{5a}{2x}\right) : \frac{9ax}{8}$? Ist das dividierende Monom ein Bruch, so ist stets §. 13, 28, III, 1. Zus. anzuwenden.

$$= \left(\frac{9}{4} - \frac{x}{3} + \frac{5a}{2x}\right) \cdot \frac{8}{9ax} = \frac{2}{ax} - \frac{8}{27a} + \frac{20}{9x^2}.$$

$$(a - b) : -\frac{a}{b} = (a - b) \cdot -\frac{b}{a} = -b + \frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{a} - b$$

$$\text{oder } = b\left(\frac{b}{a} - 1\right).$$

$$\frac{a-b}{3b}+\frac{2a-b}{5b}-\frac{4a+7b}{15b}-\frac{a}{2b}+\frac{1}{15}$$
$$=\frac{a}{3b}-\frac{1}{3}+\frac{2a}{5b}-\frac{1}{5}-\frac{4a}{15b}-\frac{7}{15}-\frac{a}{2b}+\frac{1}{15}$$
$$=-\frac{a}{30b}.$$

$$(4a-11n)\left[\frac{6a-n}{3(4a-11n)}-\frac{a-2n}{2(11n-4a)}\right]$$
$$=(4a-11n)\left[\frac{6a-n}{3(4a-11n)}-\frac{2n-a}{2(4a-11n)}\right]$$
$$=\frac{6a-n}{3}-\frac{2n-a}{2}=2a-\frac{n}{3}-n+\frac{a}{2}$$
$$=\frac{5a}{2}-\frac{4n}{3}.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{(2a-3b)^2}{6ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{4a^2-12ab+9b^2}{6ab}$$
$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{2a}{3b}+2-\frac{3b}{2a}=\frac{a}{3b}+2-\frac{b}{2a}.$$

$$\frac{15ax-10a^2y}{7n}:5a=\frac{(15ax-10a^2y):5a}{7n} \quad \text{(s. §. 13, 22, 1. Zus.)}$$
$$=\frac{3x-2ay}{7n}.$$

2. $\frac{a-b-c+d}{-1}$? $+a:-1=-\frac{a}{1}=-a;$

$-b:-1=+\frac{b}{1}=+b$ u. s. w.

Daher $=-a+b+c-d.$

Die Division durch -1 verwandelt also die Glieder in die entgegengesetzten (ganz wie die Multiplication mit -1. Siehe auch §. 51, 5, a, Zus.).

3. $[2(a+b)+3c-4d]:(a+b)$? Man denke sich hier den Dividend nur zweigliederig, daher

$$=\frac{2(a+b)}{a+b}+\frac{3c-4d}{a+b}=2+\frac{3c-4d}{a+b}.$$

Anmerkung. $2+\frac{3c}{a+b}-\frac{4d}{a+b}$ würde ein unpraktisches Resultat geben.

$$\left[\frac{3(a-b)}{4(c+d)} - \frac{d}{3} - 1\right] : (a-b) = \left[\frac{3(a-b)}{4(c+d)} - \left(\frac{d}{3}+1\right)\right] : a-b)$$

$$= \frac{3}{4(c+d)} - \frac{\frac{d}{3}+1}{a-b}$$

$$= \frac{3}{4(c+d)} - \frac{d+3}{3(a-b)}.$$

$$\left[2a-3b+4c-(4a+3b)(2a-b)+7(b-2a)^2\right] : (2a-b)$$
$$= \left[2a-3b+4c-(4a+3b)(2a-b)+7(2a-b)^2\right]$$
$$: (2a-b)$$
$$= \frac{2a-3b+4c}{2a-b} - (4a+3b) + 7(2a-b)$$
$$= \frac{2a-3b+4c}{2a-b} + 10(a-b).$$

4. $(a^2+3a)(a-b)$ durch a dividiert $=(a+3)(a-b)$ (s. §. 13, 18!).

$33 \cdot \frac{6a-9b}{4}$ durch 3 dividiert $= 11 \cdot \frac{6a-9b}{4}$

oder $= 33 \cdot \frac{2a-3b}{4}$.

$(a^2+ab)(ab+2b^2)$ durch ab dividiert $=?$

Man dividiere den 1. Faktor durch a, den 2. durch b,

denn $\frac{(a^2+ab)(ab+2b^2)}{a \cdot b} = \frac{a^2+ab}{a} \cdot \frac{ab+2b^2}{b}$

$= (a+b)(a+2b)$.

5. $\frac{(12a-15b)^2}{9} = \left(\frac{12a-15b}{3}\right)^2$ (s. §. 57, 17, IV)

$= |(4a-5b)^2$.

$$\frac{(30a^2-55ab)^2}{25a^2} = \left(\frac{30a^2-55ab}{5a}\right)^2 = (6a-11b)^2.$$

$$\frac{16^2-14^2}{4} = 8^2-7^2; \text{ denn } \frac{16^2}{2^2} - \frac{14^2}{2^2}.$$

$$\frac{(ax-9x^3)^2}{9x^2} = \left(\frac{ax}{3x} - \frac{9x^3}{3x}\right)^2 = \left(\frac{a}{3} - 3x^2\right)^2.$$

$$\frac{(14a^6-12a^2)^3}{8a^6}=\frac{(14a^6-12a^2)^3}{(2a^2)^3}=\left\{\frac{14a^6-12a^2}{2a^2}\right\}^3$$
$$=(7a^4-6)^3.$$

§. 64. Verschiedene Anwendungen der Division eines Polynom durch ein Monom.

1. I. Änderungen des Produktes nach dem Satze

$$A\cdot B=An\cdot\frac{B}{n}\text{ (s. §. 13, 11, Zus.).}$$

Beispiele. $75\cdot 76$? Der 1. Faktor mit 4 multipliciert,
„ 2. „ durch 4 dividiert,
$=300\cdot 19=5700$.

$\frac{3x}{8}(12x-4)$? Der 1. Faktor mit 4 multipl.,
„ 2. „ durch 4 divid.,
$=\frac{3x}{2}(3x-2)$.

$35a\left(\frac{a}{2}-1\frac{1}{5}\right)$? Mit 10 verändert $=\frac{7a}{2}(5a-12)$.

$\left(2-\frac{3x}{7}\right)(21x-28)$? Mit 7 verändert $=(14-3x)(3x-4)$.

$\frac{27x}{20}\left(1\frac{1}{9}+\frac{5x}{6}\right)\left(1\frac{1}{6}-\frac{7x}{4}\right)$? Damit in den mehrteiligen Ausdrücken die Brüche verschwinden, ist der 2. Faktor mit 18, der 3. mit 12 zu multiplicieren, daher der 1. Faktor durch $18\cdot 12$ zu dividieren:

$=\frac{x}{160}(20+15x)(14-21x)$. Der 2. Faktor noch durch 5, der 3. durch 7 dividiert und dafür der 1. mit $5\cdot 7$ multipliciert (oder, was dasselbe ist, 5 und 7 ausgehoben):

$=\frac{7x}{32}(4+3x)(2-3x)$.

II. Dasselbe mit -1.

$(a-b)(c-d)$? Der 1. Faktor mit -1 multipl., der 2. durch -1 dividiert (s. §. 63, 2) $=(b-a)(d-c)$.

Ein Produkt bleibt also unverändert, wenn man die sämtlichen Glieder zweier Faktoren in die entgegengesetzten verwandelt.

$(1-5a-7a^2)(2-3b-4b^2)$
$= (7a^2+5a-1)(4b^2+3b-2).$

$(-a-b)(-a-2b) = (a+b)(a+2b).$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = (b-a)(b-a) = (b-a)^2.$
(Vergl. §. 62, 8, I).

III. Man kann einen der Faktoren eines Produkts mit -1 multiplicieren, wenn man das Vorzeichen des Produkts ändert. Man beseitigt mittelst dieses Satzes einen negativen Faktor.

Beweis. $a-b(c+d)(-e-f)$? Der 1. Faktor $-b$ mit -1 multipl., der 3. durch -1 dividiert
$= a+b(c+d)(e+f).$

$a-(b+c)(a-b-2c)$? Gedacht: $a-1\cdot(b+c)(a-b-2c)$ und nun den 1. Faktor -1 mit -1 multipl., den 3. durch -1 dividiert
$= a+1\cdot(b+c)(b+2c-a) = a+(b+c)(b+2c-a).$

Beispiele. $3(-a-b) = -3(a+b).$

$(2-3x)(3x-2) = -(3x-2)(3x-2) = -(3x-2)^2.$

$(a-2b+3c)(5a+4b-c)+2(2b-a-3c)(a-b+4c)$
$= (a-2b+3c)(5a+4b-c)$
$\quad -2(a-2b+3c)(a-b+4c)$
$= (a-2b+3c)[5a+4b-c-2(a-b+4c)]$
$= (a-2b+3c)(-3a+6b-9c)$
$= 3(a-2b+3c)(-a+2b-3c)$
$= -3(a-2b+3c)(a-2b+3c) = -3(a-2b+3c)^2.$

IV. Soll in $15x-7x^2$ der Faktor $5x$ ausgehoben werden, so könnte man entweder $1\cdot(15x-7x^2)$ setzen und nach I den 1. Faktor mit $5x$ multipl., den 2. Faktor (das Binom) durch $5x$ dividieren $= 5x\left(3-\frac{7x}{5}\right)$, oder §. 13, 12, Anmerk. anwenden

$$= 5x\cdot\frac{15x-7x^2}{5x} = 5x\left(3-\frac{7x}{5}\right).$$

$$4(a-b) = 4a\left(1-\frac{b}{a}\right).$$

$$1\tfrac{2}{3}-\frac{10a}{9} = 1\tfrac{2}{3}\cdot\frac{1\tfrac{2}{3}-\frac{10a}{9}}{1\tfrac{2}{3}} = \frac{5}{3}\left(1-\frac{2a}{3}\right).$$

$$\frac{x}{3}+2 = 1\cdot\left[\frac{x}{3}+2\right] = \frac{1}{3}\left[3\left(\frac{x}{3}+2\right)\right] = \frac{1}{3}(x+6).$$

$3(a-b)^2$? Der 1. Faktor mit a^2 multipl., der 2. Faktor durch a^2, d. h. die Basis des Quadrats durch a dividiert (s. §. 63, 5) $= 3a^2\left(1-\frac{b}{a}\right)^2$.

V. Jetzt läſst sich auch das Trinom ax^2+bx+c, in welchem a weder $+1$ noch -1 sein soll, in 2 binome Faktoren zerlegen. (Vergl. §. 60, 2).

Setzt man $x=\frac{y}{a}$, so ist $x^2=\frac{y^2}{a^2}$ und es geht damit

ax^2+bx+c über in

$$a\cdot\frac{y^2}{a^2}+b\cdot\frac{y}{a}+c=\frac{y^2}{a}+\frac{by}{a}+c$$

$$=\frac{1}{a}\left(y^2+by+ac\right)\ldots\ldots(\mathrm{Y})$$

Die Parenthese kann nun nach §. 60, 2 in das Produkt aus 2 binomen Faktoren verwandelt werden, wenn man 2 Zahlen m und n von der Beschaffenheit sucht, daſs $m\cdot n=ac$, $m+n=b$ ist. Es geht alsdann Y über in:

$$\frac{1}{a}(y+m)(y+n).$$

Weil aber $x=\frac{y}{a}$ und folglich $y=ax$ (s. §. 13, 5), so wird aus dem vorstehenden Ausdrucke die verlangte Form:

$$\frac{1}{a}(ax+m)(ax+n).$$

Das ganze Verfahren, ax^2+bx+c in 2 binome Faktoren zu zerlegen, läſst sich jetzt auf Grund der vorstehenden Ableitung in Kürze in folgender Weise aussprechen:

Man suche 2 Zahlen m und n so, daſs $m\cdot n=ac$ und $m+n=b$ ist. Alsdann ist

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{a}(ax+m)(ax+n).$$

1. Beispiel. $10x^2+29x-21$? Hier ist $a=10$, $b=29$, $c=-21$. Folglich wird $mn=ac=10(-21)=-210$ und $m+n=b=29$. Offenbar kann nur $m=35$ und $n=-6$ sein, denn

$$35(-6)=-210 \text{ und } 35+(-6)=29.$$

Daher ist der gesuchte Ausdruck:

$$= \frac{1}{a}(ax+m)(ax+n) = \frac{1}{10}(10x+35)(10x-6)$$
$$= \frac{10x+35}{5} \cdot \frac{10x-6}{2} = (2x+7)(5x-3).$$

2. Beispiel. $79x - 44x^2 + 45$?

Geordnet: $-44x^2 + 79x + 45 = -(44x^2 - 79x - 45)$ (siehe §. 60. 2, 2. Beisp.). Zunächst ist also $44x^2 - 79x - 45$ allein zu verwandeln.

Mit $a = 44,\ b = -79,\ c = -45,$
$mn = ac = 44(-45) = -1980,\ m+n = b = -79$
ergiebt sich $m = 20,\ n = -99;$
denn $20 \cdot (-99) = -1980,\ 20 + (-99) = -79.$

Folglich ist

$$44x^2 - 79x - 45 = \frac{1}{a}(ax+m)(ax+n)$$
$$= \frac{1}{44}(44x+20)(44x-99) = \frac{44x+20}{4} \cdot \frac{44x-99}{11}$$
$$= (11x+5)(4x-9).$$

Der gegebene Ausdruck daher:

$$= -(11x+5)(4x-9) \text{ oder}$$
$$= (11x+5)(9-4x).$$

2. Änderungen des Quotient.

I. Man kann entweder den Zähler oder den Nenner des Quotient mit -1 multiplicieren, wenn man das Vorzeichen des Quotient ändert.

Beweis. $$\begin{cases} +\frac{a}{b} = -\frac{-a}{+b} = -\frac{a \cdot -1}{b}. \\ +\frac{a}{b} = -\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b \cdot -1}. \end{cases}$$

Beispiele. $\frac{a+b}{-c-d} = -\frac{a+b}{c+d}.$

$$-\frac{1}{x-y} = +\frac{1}{-x+y} = \frac{1}{y-x}.$$

$$1 - \frac{-5}{x+1} = 1 + \frac{5}{x+1}.$$

$$\frac{1}{(a-b)(c-d)} = -\frac{1}{(b-a)(c-d)} \text{ oder}$$
$$= -\frac{1}{(a-b)(d-c)}.$$ (Vergl. §. 59, 1, VI, letztes Beisp.)

$1 + \frac{5}{2 - 3ab - 4cd}$? Da $2 - 3ab - 4cd$ im allgemeinen eher negativ als positiv sein wird, so hat man offenbar

$$1 - \frac{5}{3ab + 4cd - 2} \text{ zu setzen.}$$

$(a-b)\left[\frac{a+2b}{a-b} - \frac{3a-4b}{b-a} - 4\right]$?

Der 2. Bruch könnte zwar mit -1 erweitert werden, um den Nenner in $a - b$ zu verwandeln, da es sich aber leichter mit einem $+$ vor dem Bruche rechnen läfst, so setzt man:

$$(a-b)\left[\frac{a+2b}{a-b} + \frac{3a-4b}{a-b} - 4\right]$$
$$= a + 2b + 3a - 4b - 4(a-b) = 2b.$$

$$-\frac{1}{(a-b)^3} = -\frac{1}{-(b-a)^3} \text{ (s. §. 62, 8, II)} = +\frac{1}{(b-a)^3}.$$

Jedoch $-\frac{1}{(a-b)^2} = -\frac{1}{(b-a)^2}$ s. §. 62, 8, I.

Der Quotient $\frac{a-b}{c-d}$ kann jetzt hinsichtlich der Zeichen in dreierlei Weise umgeändert werden:

1) $-\frac{a-b}{d-c}$
2) $-\frac{b-a}{c-d}$ } nach vorstehendem Satze;

3) $+\frac{b-a}{d-c}$, d. h. durch Erweitern mit -1 (s. §. 59, 1, VI), wobei das Vorzeichen unverändert bleibt.

Zusatz. Aus vorstehendem Satze und aus §. 58, 3; §. 59, 1, VI; §. 63, 2; §. 64, 1, II u. III läfst sich nun hinsichtlich der Zeichenänderungen (in bezug auf multiplicierende und dividierende Zahlen und das Vorzeichen) folgende ganz allgemeine Regel ableiten:

A. Ein Ausdruck bleibt unverändert, wenn man in demselben 2, 4, 6, ..., allgemein: eine gerade Anzahl Zeichenänderungen vornimmt.

Beispiele. $\frac{3+x}{(4-x)(5-x)} - 1 = \frac{3+x}{(x-4)(x-5)} - 1.$

$$7 - \frac{4-a}{(5-b)(6-c)} = 7 + \frac{a-4}{(b-5)(c-6)}.$$

B. Macht man 1, 3, 5, ..., allgemein: eine ungerade Anzahl Zeichenänderungen, so wird der Ausdruck in den entgegengesetzten verwandelt. Ist daher

$$\frac{a-b}{(c-d)(e-f)} = -3, \text{ so mufs } \frac{b-a}{(d-c)(f-e)} = +3$$

sein.

$$(1-a)(2-a)(a+b)(b-a)$$

ist dem Ausdrucke

$$(a-1)(a-2)(a+b)(a-b) = (a-1)(a-2)(a^2-b^2)$$

entgegengesetzt.

Anmerkung. Die Regeln hinsichtlich der Zeichenänderungen wendet man an, um einen gegebenen Ausdruck durch Beseitigung negativer Faktoren und Parenthesen, negativer Zähler und Nenner eine brauchbarere Form, oder mit Rücksicht auf eine Vereinfachung eine bestimmte Gestalt zu geben.

II. **Kürzen** der Polynomien enthaltenden Brüche.

Dem Bruche kann durch Kürzen eine brauchbarere, übersichtlichere Form gegeben werden. Wollte man jedoch $\frac{6a+9}{15a-40}$ durch 3 kürzen, so erhielte man:

$$\frac{(6a+9):3}{(15a-4):3} = \frac{2a+3}{5a-\frac{4}{3}},$$

eine Form, die des Doppelbruches wegen höchst unpraktisch wäre. Folglich wird man Polynomien enthaltende Brüche nur dann kürzen, wenn alle Glieder des Zählers und Nenners einen gemeinsamen Faktor enthalten, durch den das Kürzen zu bewerkstelligen ist.

Beispiele.

In $\frac{60ab-40a^2}{80ay+100ab}$ ist $20a$ der gemeinsame Faktor aller Glieder. Daher $\frac{(60ab-40a^2):20a}{(80ay+100ab):20a} = \frac{3b-2a}{4y+5b}$.

$$\frac{7x^3-14x^4}{28x^3+56x^5} = \frac{(7x^3-14x^4):7x^3}{(28x^3+56x^5):7x^3}$$

$$= \frac{1-2x}{4+8x^2} = \frac{1-2x}{4(1+2x^2)}.$$

$\frac{15x-45y}{90(a+b)}$ durch 15 gekürzt $= \frac{x-3y}{6(a+b)}$ (s. §. 13, 18!).

$$\frac{12(18-24x)}{36+6x} \text{ durch 6 gekürzt} = \frac{12(3-4x)}{6+x}.$$

$$\frac{5x^2-7x^3}{(3x+2x^2)^2} = \frac{5x^2-7x^3}{x^2(3+2x)^2} = \frac{5-7x}{(3+2x)^2}.$$

$$\frac{20\cdot\frac{40}{21}-16}{7\cdot 24} \text{ durch 8 gekürzt} = \frac{20\cdot\frac{5}{21}-2}{7\cdot 3}$$

$$= \frac{20\cdot 5-2\cdot 21}{7\cdot 3\cdot 21} = \frac{58}{441}.$$

$$\frac{acx-bc}{ab-a^2x} = \frac{c(ax-b)}{a(b-ax)} = -\frac{c(ax-b)}{a(ax-b)} = -\frac{c}{a}.$$

$$\frac{10a^2-5b}{6b^2-24a^4} = \frac{5(2a^2-b)}{6(b^2-4a^4)} = -\frac{5(2a^2-b)}{6(4a^4-b^2)} \text{ (s. §. 60, 3, III)}$$

$$= -\frac{5(2a^2-b)}{6(2a^2+b)(2a^2-b)} = -\frac{5}{6(2a^2+b)}.$$

$$\left[\frac{a^2x^2-4y^2}{a-x} - \frac{(ax+2y)^2}{3}\right] : (ax+2y)$$

$$= \frac{(ax)^2-(2y)^2}{(a-x)(ax+2y)} - \frac{(ax+2y)^2}{3(ax+2y)}$$

$$= \frac{(ax+2y)(ax-2y)}{(a-x)(ax+2y)} - \frac{ax+2y}{3}$$

$$= \frac{ax-2y}{a-x} - \frac{ax+2y}{3}.$$

$$\frac{10a^2-6ab+45ac-27bc}{15a^2-9ab-20ac+12bc} = \frac{2a(5a-3b)+9c(5a-3b)}{3a(5a-3b)-4c(5a-3b)}$$

$$\text{(sogleich durch } 5a-3b \text{ gekürzt)} = \frac{2a+9c}{3a-4c}.$$

$$\frac{18a^2+27ab-14ad-21bd}{28a^2d-36a^3-63b^2d+81ab^2}$$

$$= \frac{9a(2a+3b)-7d(2a+3b)}{4a^2(7d-9a)-9b^2(7d-9a)}$$

$$= \frac{(9a-7d)(2a+3b)}{(4a^2-9b^2)(7d-9a)} = -\frac{2a+3b}{(2a+3b)(2a-3b)}$$

$$= -\frac{1}{2a-3b} = \frac{1}{3b-2a}.$$

$$\frac{a^2+3ab-28b^2}{a^2+10ab+21b^2}=\frac{(a-4b)(a+7b)}{(a+3b)(a+7b)} \quad \text{(s. §. 60, 2)}$$
$$=\frac{a-4b}{a+3b}.$$

$$\frac{10x^2-x-21}{28-57x-55x^2}=-\frac{10x^2-x-21}{55x^2+57x-28} \quad \text{(s. §. 60, 3, III)}$$
$$=-\frac{(2x-3)(5x+7)}{(11x-4)(5x+7)} \quad \text{(s. §. 64, 1, V)}$$
$$=-\frac{2x-3}{11x-4}=\frac{3-2x}{11x-4}.$$

$$\frac{50-32x^2}{(4x-5)^3}=\frac{2(25-16x^2)}{(4x-5)^3}=\frac{2(5-4x)(5+4x)}{(4x-5)^3}$$
$$=-\frac{2(4x-5)(4x+5)}{(4x-5)^3}=-\frac{2(4x+5)}{(4x-5)^2}$$
$$\left(\text{denn } \frac{2ab}{a^3}=\frac{2b}{a^2}!\right).$$

1. Zusatz. Oft läfst sich ein Quotient leichter berechnen, wenn man ihn zuvor durch Kürzen in einen Doppelbruch verwandelt.

Beispiel.

$$\frac{7a-6-(7a-6)^2}{11(7a-6)^2+24(7a-6)+14} \quad \text{(durch } 7a-6 \text{ gekürzt)}$$
$$=\frac{1-(7a-6)}{11(7a-6)+24+\frac{14}{7a-6}}=\frac{7-7a}{77a-42+\frac{14}{7a-6}}$$
$$\text{(durch 7 gekürzt)} =\frac{1-a}{11a-6+\frac{2}{7a-6}}.$$

Diesen Bruch erweitert man nun nicht mit $7a-6$, sondern berechnet, wenn für a ein specieller Wert gegeben ist, den Bruch $\frac{2}{7a-6}$ u. s. w.

2. Zusatz. $\frac{x+b}{x-c}$ geht mit $x=\infty$ über in $\frac{\infty+b}{\infty-c}=\frac{\infty}{\infty}$ (s. §. 18, 2 und §. 18, 9, I). Denselben Wert würde man für

$$\frac{ax}{b+x} \text{ und } \frac{a+bx+cx^2}{d+ex+fx^2}$$

erhalten, wenn man $x = \infty$ setzte. $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ und $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$ würden für $b = a$ übergehen in $\frac{a^2 - a^2}{a - a}$ und $\frac{a^3 - a^3}{a^2 - a^2}$, also in $\frac{0}{0}$.

Diese unbestimmten Werte $\frac{\infty}{\infty}$ und $\frac{0}{0}$ (s. §. 18, 9—12) sind offenbar unbrauchbar und es würde sich daher fragen, in welcher Weise die durch dieselben ausgedrückten endlichen Zahlen sich bestimmen lassen.

Es geschieht dies in folgender Weise:

I. $\frac{x + b}{x - c}$ durch x gekürzt $= \frac{1 + \frac{b}{x}}{1 - \frac{c}{x}}$. Setzt man jetzt $x = \infty$, so entsteht $\frac{1 + 0}{1 - 0}$ (s. §. 18, 4) $= 1$.

II. $\frac{ax}{b + x}$ durch x gekürzt $= \frac{a}{\frac{b}{x} + 1}$. Dieser Quotient wird für $x = \infty$: $\frac{a}{0 + 1} = a$.

III. $\frac{a + bx + cx^2}{d + ex + fx^2}$ durch x^2 gekürzt $= \frac{\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c}{\frac{d}{x^2} + \frac{e}{x} + f}$.

Setzt man hier $x = \infty$, so entsteht $\frac{0 + 0 + c}{0 + 0 + f} = \frac{c}{f}$.

IV. $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b}$ (s. §. 61, 2) $= a + b$. Jetzt $b = a$ gesetzt, giebt $a + a = 2a$.

V. $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{(a^2 + ab + b^2)(a - b)}{(a + b)(a - b)}$ (s. §. 61, 3)

$= \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$ und hier $b = a$ gesetzt:

$$\frac{a^2 + a \cdot a + a^2}{a + a} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}.$$

Soll allgemein: $\frac{a^n - b^n}{a^r - b^r}$ für $b = a$ bestimmt werden, so würde man sich diesen Quotient denken als:

$$\frac{(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})(a-b)}{(a^{r-1} + a^{r-2}b + a^{r-3}b^2 + \ldots + b^{r-1})(a-b)}$$

$$= \frac{a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}}{a^{r-1} + a^{r-2}b + a^{r-3}b^2 + \ldots + b^{r-1}}$$

$$= \frac{a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + \ldots + a^{n-1}}{a^{r-1} + a^{r-2}a + a^{r-3}a^2 + \ldots + a^{r-1}}$$

$$= \frac{na^{n-1}}{ra^{r-1}} = \frac{na^{n-r}}{r}.$$

Z. B. geht $\frac{a^{10} - b^{10}}{a^4 - b^4}$ für $b = a$ über in $\frac{10a^{10-4}}{4} = \frac{5a^6}{2}$.

Der Wert $\frac{0}{0}$ würde mithin immer durch Zerlegen des Zählers und Nenners in Faktoren bestimmt werden können. So geht z. B. $\frac{6x^2 - 11x - 10}{8x^2 - 34x + 35}$ für $x = 2\frac{1}{2}$ über in

$$\frac{6 \cdot \frac{25}{4} - 11 \cdot \frac{5}{2} - 10}{8 \cdot \frac{25}{4} - 34 \cdot \frac{5}{2} + 35} = \frac{37{,}5 - 27{,}5 - 10}{50 - 85 + 35} = \frac{0}{0}.$$

Um für diesen Fall den Wert des gegebenen Quotient zu bestimmen, denke man sich nach §. 64, 1, V:

$$\frac{(2x-5)(3x+2)}{(2x-5)(4x-7)} = \frac{3x+2}{4x-7}$$

und dies geht für $x = 2\frac{1}{2}$ über in $\frac{7\frac{1}{2} + 2}{10 - 7} = 3\frac{1}{6}$.

§. 65. **Vereinigung von Quotienten.**

(Addieren und Subtrahieren von Brüchen. — Unter gleichen Nenner bringen. — Reduktionen?)

1. Gleichnamige Brüche.

Umkehrung von §. 63: $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a - b + c}{m}$.

Eine Summe von mehreren Brüchen mit gleichen Nennern kann man also in einen Bruch verwandeln, wenn man aus allen Brüchen den gemeinsamen Nenner entfernt und den zurückbleibenden Ausdruck wieder durch denselben dividiert. (Vergl. §. 59, 2.)

Beispiele.

$$\frac{3a}{5b} - \frac{4a^2}{5b} - \frac{8a}{5b} - \frac{6a^2}{5b} = \frac{3a - 4a^2 - 8a - 6a^2}{5b}$$

$$= \frac{-5a - 10a^2}{5b} = \frac{-a - 2a^2}{b} \text{ (s. §. 64, II)}$$

$$= -\frac{a + 2a^2}{b} = -\frac{a(2a+1)}{b}.$$

$$\frac{3a - 4b}{7a - 6b} - \frac{11a - 9b}{7a - 6b} - \frac{6a - 7b}{7a - 6b} = ?$$

Um hinsichtlich der Zeichen keine Fehler zu machen, denke man sich:

$$\frac{3a - 4b}{7a - 6b} - \frac{(11a - 9b)}{7a - 6b} - \frac{(6a - 7b)}{7a - 6b}, \text{ daher:}$$

$$= \frac{3a - 4b - (11a - 9b) - (6a - 7b)}{7a - 6b}$$

$$= \frac{12b - 14a}{7a - 6b} = -\frac{14a - 12b}{7a - 6b} \text{ (s. §. 60, 3, III)}$$

$$= -\frac{2(7a - 6b)}{7a - 6b} = -2.$$

$$-\frac{2a}{7np} - \frac{5p + 4a}{7np} - \frac{2(p - 3a)}{7np} ?$$

Geht dem 1. Bruche ein Minuszeichen voraus, so denke man sich nach demselben eine Parenthese:

$$= -\left[\frac{2a}{7np} + \frac{5p + 4a}{7np} + \frac{2(p - 3a)}{7np}\right]$$

$$= -\frac{2a + 5p + 4a + 2p - 6a}{7np} = -\frac{7p}{7np} = -\frac{1}{n}.$$

$$-\frac{x - 5}{(2x - 9)^2} - \frac{3x + 11}{(2x - 9)^2} + \frac{24}{(2x - 9)^2} ?$$

Hier setzt man den mit dem Pluszeichen versehenen Bruch voran:

$$= \frac{24 - (x - 5) - (3x + 11)}{(2x - 9)^2} = \frac{18 - 4x}{(2x - 9)^2}$$

$$= -\frac{4x-18}{(2x-9)^2} \text{ (s. §. 64, 2, I)} = -\frac{2(2x-9)}{(2x-9)^2} = -\frac{2}{2x-9} = \frac{2}{9-2x}.$$

$$\left(\frac{m^2x-n^2x+2mny}{m^2+n^2}\right)^2+\left(\frac{n^2y-m^2y+2mnx}{m^2+n^2}\right)^2$$

$$= \frac{[(m^2-n^2)x+2mny]^2+[(n^2-m^2)y+2mnx]^2}{(m^2+n^2)^2}$$

$$= \frac{(m^2-n^2)^2x^2+4mn(m^2-n^2)xy+4m^2n^2y^2+(n^2-m^2)^2y^2+4mn(n^2-m^2)xy+4m^2n^2x^2}{(m^2+n^2)^2}$$

$$= \frac{[(m^2-n^2)^2+4m^2n^2]x^2+4mn[(m^2-n^2)+(n^2-m^2)]xy+[(n^2-m^2)^2+4m^2n^2]y^2}{(m^2+n^2)^2}$$

$$= \frac{(m^2+n^2)^2x^2+[(m^2-n^2)^2+4m^2n^2]y^2}{(m^2+n^2)^2} \text{ (s. §. 62, 2, Zus. und §. 62, 8, I)}$$

$$= \frac{(m^2+n^2)^2x^2+(m^2+n^2)^2y^2}{(m^2+n^2)^2} = x^2+y^2.$$

2. Ungleichnamige Brüche.

Nach §. 59, 1, III und §. 60, 3 suche man den Generalnenner und verwandle die gegebenen Brüche durch Erweitern in solche mit diesem Generalnenner, um die Aufgabe auf den vorstehenden 1. Satz zurückzuführen. Nach §. 13, 15, 2. Zus. ist die Zahl, mit welcher erweitert werden mufs, der Quotient aus dem Generalnenner und dem Nenner des gegebenen Bruches. Soll z. B. $\frac{2(x-1)}{5x(x+2)}$ in einen Bruch mit dem

Nenner $15\,ax^2(x^2-4)$ verwandelt werden, so wäre der Bruch mit

$$\frac{15\,ax^2(x^2-4)}{5\,x\,(x+2)} = \frac{15\,ax^2\,(x+2)\,(x-2)}{5x\,(x+2)} = 3\,ax\,(x-2)$$

zu erweitern und man erhielte:

$$\frac{2\,(x-1)\cdot 3\,ax\,(x-2)}{5\,x\,(x+2)\cdot 3\,ax\,(x-2)} = \frac{6\,ax\,(x^2-3x+2)}{15\,ax^2(x^2-4)}.$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + 1 = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} + \frac{bd}{bd} = \frac{ad-bc-bd}{bd}$$

$$= \frac{(a-b)\,d-bc}{bd}.$$

$a+\frac{b}{a}$ würde man nur in besonderer Absicht in

$$\frac{a^2}{a} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b}{a}$$

verwandeln; da z. B. $0{,}9876 + \frac{0{,}678}{0{,}9876}$ weit bequemer berechnet ist, als $\frac{0{,}9876\cdot 0{,}9876 + 0{,}678}{0{,}9876}$.

$$-\frac{11}{20\,a} + \frac{4}{15} - \frac{1}{12\,a} - \frac{3}{16} = \frac{4}{15} - \frac{11}{20\,a} - \frac{1}{12\,a} - \frac{3}{16}?$$

$16\cdot 3\cdot 5\cdot a = 240\,a$ der Generalnenner, daher:

$$= \frac{64\,a}{240\,a} - \frac{132}{240\,a} - \frac{20}{240\,a} - \frac{45\,a}{240\,a}$$

$$= \frac{64\,a - 132 - 20 - 45\,a}{240\,a} = \frac{19\,a - 152}{240\,a} = \frac{19\,(a-8)}{240\,a}.$$

$$\frac{2}{21} - \frac{5}{84\,b^2} - \frac{1}{14\,ab} + \frac{1}{6\,a} - \frac{5}{24\,b} - \frac{1}{4\,a}?$$

Generalnenner $= 8\cdot 3\cdot 7\cdot a\cdot b^2 = 168\,ab^2$, daher:

$$= \frac{16\,ab^2}{168\,ab^2} - \frac{10\,a}{168\,ab^2} - \frac{12\,b}{168\,ab^2} + \frac{28\,b^2}{168\,ab^2} - \frac{35\,ab}{168\,ab^2}$$

$$- \frac{42\,b^2}{168\,ab^2}$$

$$= \frac{16\,ab^2 - 10\,a - 12\,b + 28\,b^2 - 35\,ab - 42\,b^2}{168\,ab^2}$$

$$= \frac{16\,ab^2 - 35\,ab - 10\,a - 12\,b - 14\,b^2}{168\,ab^2}.$$

$$\frac{3^{\frac{a}{2b}-2\frac{1}{6}}}{3^{\frac{4a}{3b}+\frac{3}{4}}} = 3^{\frac{a}{2b}-2\frac{1}{6}-\frac{4a}{3b}-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{6a-26b-16a-9b}{12b}}$$

$$= 3^{\frac{-10a-35b}{12b}} = 3^{-\frac{10a+35b}{12b}}$$

$$= \frac{1}{3^{\frac{5(2a+7b)}{12b}}}.$$

$$3\tfrac{1}{2} - \frac{14x+y}{4x-6y} = \frac{7}{2} - \frac{14x+y}{2(2x-3y)} \quad \text{(s. §. 60, 3, I)}$$

$$= \frac{7(2x-3y)}{2(2x-3y)} - \frac{14x+y}{2(2x-3y)}$$

$$= \frac{14x-21y-14x-y}{2(2x-3y)} = \frac{-22y}{2(2x-3y)}$$

$$= \frac{-11y}{2x-3y} = \frac{11y}{3y-2x}.$$

$$\left(\frac{a-bx}{1-x}\right)^2 - \left(\frac{b-ax}{x-1}\right)^2 = \left(\frac{bx-a}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{b-ax}{x-1}\right)^2$$

$$= \frac{(bx-a)^2-(b-ax)^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{[bx-a+b-ax]\,[bx-a-(b-ax)]}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{[(b-a)x+b-a]\,[(b+a)x-(b+a)]}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(b-a)(x+1)\cdot(b+a)(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(b^2-a^2)(x+1)}{x-1}.$$

$$\frac{5x}{10x^2+15xy} + \frac{7x-2y}{6y^2-14x^2-17xy}?$$

Zunächst ist immer zu untersuchen, ob die gegebenen Brüche gekürzt werden können. Hier läfst sich der 1. Bruch durch $5x$ kürzen. Den 2. ordnet man vorläufig nach absteigenden Potenzen von x.

$$= \frac{1}{2x+3y} - \frac{7x-2y}{14x^2+17xy-6y^2}.$$

Jetzt ist der 2. Nenner nach §. 64, 1, V zu zerlegen.

$$= \frac{1}{2x+3y} - \frac{7x-2y}{(7x-2y)(2x+3y)}$$

$$= \frac{1}{2x+3y} - \frac{1}{2x+3y} = 0.$$

$$\frac{5a^2+4b^2}{3(a+2b)^2} - \frac{a+4b}{6a+12b} = \frac{5a^2+4b^2}{3(a+2b)^2} - \frac{a+4b}{6(a+2b)}$$

$$= \frac{2(5a^2+4b^2)}{6(a+2b)^2} - \frac{(a+4b)(a+2b)}{6(a+2b)(a+2b)}$$

$$= \frac{2(5a^2+4b^2)-(a+4b)(a+2b)}{6(a+2b)^2}$$

$$= \frac{9a^2-6ab}{6(a+2b)^2} = \frac{3a^2-2ab}{2(a+2b)^2} = \frac{a(3a-2b)}{2(a+2b)^2}.$$

$$\frac{5-6n}{3n-4} - \frac{7+3n}{6n+12} - \frac{3(4n-5)}{8-6n} - \frac{1-2n}{4n+8} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{5-6n}{3n-4} - \frac{7+3n}{6(n+2)} - \frac{12n-15}{2(4-3n)}$$

$$- \frac{1-2n}{4(n+2)} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{5-6n}{3n-4} - \frac{7+3n}{6(n+2)} + \frac{12n-15}{2(3n-4)}$$

$$- \frac{1-2n}{4(n+2)} + \frac{1}{12}.$$

Man addiere stets zunächst die Brüche für sich, welche einen kleinern Generalnenner geben. Hier ist also der 1. und 3. Bruch, desgleichen der 2. und 4. Bruch zu addieren:

$$= \left[\frac{5-6n}{3n-4} + \frac{12n-15}{2(3n-4)}\right] - \left[\frac{7+3n}{6(n+2)} + \frac{1-2n}{4(n+2)}\right]$$

$$+ \frac{1}{12}$$

$$= \frac{10-12n+12n-15}{2(3n-4)} - \frac{2(7+3n)+3(1-2n)}{12(n+2)}$$

$$+ \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{5}{2(3n-4)} - \frac{17}{12(n+2)}$$

$$= \frac{(3n-4)(n+2)}{12(3n-4)(n+2)} - \frac{6(n+2)\cdot 5}{12(3n-4)(n+2)}$$
$$- \frac{17(3n-4)}{12(3n-4)(n+2)}.$$

Dem Anfänger ist es nicht anzuraten, statt des vorstehenden Ausdrucks sogleich den nachfolgenden (die Brüche schon vereinigenden) zu schreiben, da er sich besser überzeugen kann, ob er richtig gerechnet hat. Durch Kürzen der vorstehenden Brüche müssen sich nämlich die Brüche des vorletzten Ausdrucks wieder ergeben. Es folgt nun:

$$\frac{3n^2 + 2n - 8 - 30(n+2) - 17(3n-4)}{12(3n-4)(n+2)}$$
$$= \frac{3n^2 - 79n}{12(3n-4)(n+2)} = \frac{n(3n-79)}{12(3n-4)(n+2)}.$$

$$1\tfrac{2}{3} - \frac{nx+18}{4x-12} + 2\tfrac{3}{4} - 5\tfrac{1}{12} = \frac{nx+18}{4(3-x)} - 1\tfrac{1}{2}$$
$$= \frac{nx+18-6(3-x)}{4(3-x)} = \frac{(n+6)x}{4(3-x)}.$$

$$\frac{5x^2-6}{(2x-6)^2} - \frac{x^2+18}{(9-3x)^2} + \frac{5+x}{12-4x} - \frac{1}{36}$$
$$= \frac{5x^2-6}{4(x-3)^2} - \frac{x^2+18}{9(3-x)^2} + \frac{5+x}{4(3-x)} - \frac{1}{36}$$
$$= \frac{5x^2-6}{4(x-3)^2} - \frac{x^2+18}{9(x-3)^2} - \frac{5+x}{4(x-3)} - \frac{1}{36}$$
$$= \frac{9(5x^2-6) - 4(x^2+18) - 9(x-3)(5+x) - (x-3)^2}{36(x-3)^2}$$
$$= \frac{31x^2-12x}{36(x-3)^2} = \frac{x(31x-12)}{36(x-3)^2}.$$

$\frac{1}{12(x-1)} - \frac{5}{24(x+1)} + \frac{1}{24}$? Den gemeinsamen Faktor aller Nenner kann man vorher ausheben:

$$= \frac{1}{12}\cdot\left[\frac{1}{x-1} - \frac{5}{2(x+1)} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{12}\left[\frac{2(x+1)}{2(x+1)(x-1)}\right.$$
$$\left. - \frac{5(x-1)}{2(x+1)(x-1)} + \frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)(x-1)}\right]$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{2x+2-5x+5+x^2-1}{2\left(x^2-1\right)}=\frac{x^2-3x+6}{24\left(x^2-1\right)}.$$

$$a-d-(a-d)\frac{a}{d}=(a-d)\left(1-\frac{a}{d}\right)=(a-d)\cdot\frac{d-a}{d}$$

$$=-(a-d)\cdot\frac{a-d}{d}=-\frac{(a-d)^2}{d}.$$

$$\frac{3}{2(a-b)^{n-1}}+\frac{a+2b}{3(a-b)^n}$$

$$=\frac{3\cdot 3(a-b)}{2(a-b)^{n-1}\cdot 3(a-b)}+\frac{2(a+2b)}{2\cdot 3(a-b)^n}$$

$$=\frac{9a-9b+2a+4b}{6(a-b)^n}=\frac{11a-5b}{6(a-b)^n}.$$

$$\frac{3}{a^2-a^2+a-1}+\frac{1}{a^2-1}+\frac{3}{a^2+1}-\frac{4}{a-1}$$

$$-\frac{3}{a^3+a^2+a+1}$$

$$=\frac{3(a+1)}{(a^3-a^2+a-1)(a+1)}+\frac{a^2+1}{\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right)}$$

$$+\frac{3\left(a^2-1\right)}{\left(a^2+1\right)\left(a^2-1\right)}-\frac{4\left(a^3+a^2+a+1\right)}{(a-1)\left(a^3+a^2+a+1\right)}$$

$$-\frac{3(a-1)}{\left(a^3+a^2+a+1\right)(a-1)}$$

$$=\frac{3a+3}{a^4-1}+\frac{a^2+1}{a^4-1}+\frac{3a^2-3}{a^4-1}-\frac{4a^3+4a^2+4a+4}{a^4-1}$$

$$-\frac{3a-3}{a^4-1}$$

$$=\frac{-4a^3-4a}{a^4-1}=\frac{-4a\left(a^2+1\right)}{\left(a^2+1\right)\left(a^2-1\right)}=\frac{-4a}{a^2-1}=\frac{4a}{1-a^2}.$$

$$\frac{7}{10+27a-28a^2}+\frac{1}{4a^2-17a+15}$$

$$=\frac{7}{(5-4a)(7a+2)}+\frac{1}{(4a-5)(a-3)}\quad\text{(s. §. 64, 1, V)}$$

$$=\frac{1}{(4a-5)(a-3)}-\frac{7}{(4a-5)(7a+2)}$$

$$=\frac{7a+2-7(a-3)}{(4a-5)(a-3)(7a+2)}=\frac{23}{(4a-5)(a-3)(7a+5)}.$$

$$\frac{1}{x(2-2x)^2}-\frac{1}{x(2+2x)^2}=\frac{1}{4x}\cdot\left[\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1+x)^2}\right]=\frac{1}{4x}\cdot\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)^2(1+x)^2}$$

$$=\frac{1}{4x}\cdot\frac{[1+x+1-x]\,[1+x-(1-x)]}{[(1-x)\,(1+x)]^2}=\frac{2\cdot 2x}{4x\cdot(1-x^2)^2}=\frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

$$bx^4+\left(a-\frac{bc}{d}\right)x^2-\frac{c}{d}\left(a-\frac{bc}{d}\right)+\frac{c^2}{d}\left(a-\frac{bc}{d}\right)\cdot\frac{1}{c+dx^2}$$

$$=bx^4+\left(a-\frac{bc}{d}\right)\left[x^2-\frac{c}{d}+\frac{c^2}{d(c+dx^2)}\right]$$

$$=bx^4+\frac{ad-bc}{d}\cdot\frac{dx^2(c+dx^2)-c(c+dx^2)+c^2}{d(c+dx^2)}$$

$$=bx^4+\frac{(ad-bc)x^4}{c+dx^2}=\frac{bx^4(c+dx^2)+(ad-bc)x^4}{c+dx^2}=\frac{dx^4(a+bx^2)}{c+dx^2}.$$

$$\frac{4x^3}{3b}-\frac{2ax^2}{b^2}+\frac{4a^2x}{b^3}-\frac{4a^3}{b^4}-\frac{1}{a+bx}\left(\frac{x^4}{3}-\frac{2ax^3}{3b}+\frac{2a^2x^2}{b^2}-\frac{4a^4}{b^4}\right)$$

$$=\frac{4b^3x^3-6ab^2x^2+12a^2bx-12a^3}{3b^4}-\frac{1}{a+bx}\cdot\frac{b^4x^4-2ab^3x^3+6a^2b^2x^2-12a^4}{3b^4}$$

$$=\frac{(4b^3x^3-6ab^2x^2+12a^2bx-12a^3)(a+bx)-b^4x^4+2ab^3x^3-6a^2b^2x+12a^4}{3b^4(a+bx)}$$

Nach dem Ausmultiplicieren erhält man $\frac{3b^4x^4}{3b^4(a+bx)}=\frac{x^4}{a+bx}$.

$$\frac{1}{1+a^{n-m}+a^{p-m}}+\frac{1}{1+a^{m-n}+a^{p-n}}+\frac{1}{1+a^{m-p}+a^{n-p}}?$$

Der 1. Bruch mit a^m, der 2. mit a^n, der 3. mit a^p erweitert, wobei z. B. $a^{n-m}\cdot a^m=a^{n-m+m}=a^n$. Daher

$$=\frac{a^m}{a^m+a^n+a^p}+\frac{a^n}{a^n+a^m+a^p}+\frac{a^p}{a^p+a^m+a^n}$$

$$=\frac{a^m+a^n+a^p}{a^m+a^n+a^p}=1.$$

$$\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{(b+c)(b+2c)}+\frac{1}{(b+2c)(b+3c)}+\frac{1}{(b+3c)(b+4c)}?$$

Vereinigt man nur die 2 ersten Brüche, so erhält man:

$$\frac{b+2c+b}{b(b+c)(b+2c)}+\frac{1}{(b+2c)(b+3c)}+\frac{1}{(b+3c)(b+4c)}$$

$$=\frac{2}{b(b+2c)}+\frac{1}{(b+2c)(b+3c)}+\frac{1}{(b+3c)(b+4c)}.$$

Vereinigt man hier wieder nur die beiden ersten Brüche, so erhält man:

$$\frac{3}{b(b+3c)}+\frac{1}{(b+3c)(b+4c)}=\frac{4}{b(b+4c)}.$$

Dieses Resultat, sowie der 2. und 5. Bruch vor demselben zeigen deutlich, dafs allgemein:

$$\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{(b+c)(b+2c)}+\frac{1}{(b+2c)(b+3c)}+\frac{1}{(b+3c)(b+4c)}+\ldots+\frac{1}{[b+(n-1)c][b+nc]}$$

$$=\frac{n}{b(b+nc)}.$$

Für $b=2$, $c=3$, $n=11$ würde man demnach erhalten:

$$\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\frac{1}{11\cdot14}+\frac{1}{14\cdot17}+\ldots+\frac{1}{32\cdot35}$$

$$=\frac{11}{2(2+11\cdot3)}=\frac{11}{70}.$$

§. 66. Division durch ein Polynom.

(Partialdivision.)

1. Die in §. 13, 29 entwickelte Partialdivision führte zu dem Satze:

$$\frac{D}{d} = q + \frac{D - dq}{d}.$$

Sollen nun auf Grund desselben 2 Polynomien durch einander dividiert und für den jedesmaligen Quotient (q) immer nur ein Glied gesucht werden, so wird es sich zunächst fragen, welches Glied das passendste ist.

Aus $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ folgt nach §. 12, 1, Zusatz:

$$\frac{ac + ad + bc + bd}{a + b} = c + d.$$

Da nun das 1. Glied des Dividend durch Multiplication des 1. Gliedes des Divisor und des 1. Gliedes des Quotient entstanden war, so mufs umgekehrt (s. §. 12, 1, Zus.) das 1. Glied des Dividend durch das 1. Glied des Divisor dividiert, das 1. Glied des Quotient geben. Zugleich ergiebt sich hieraus, dafs Dividend und Divisor nach gleichem Princip, hier von a aus, geordnet sein müssen.

Diese Bemerkungen in Verbindung mit §. 13, 29 führen zu der folgenden, vollständig erschöpfenden Regel:

> Um zwei Polynomien mittelst der Partialdivision durch einander zu dividieren, sind dieselben zunächst nach gleichem Princip, also beide nach ab- oder beide nach aufsteigenden Potenzen der Hauptgröfse, überhaupt streng nach §. 52, 14, I anzuordnen. Das **1. Glied** des gesuchten vielgliederigen **Quotient** findet man alsdann, wenn man das 1. Glied des Dividend durch das 1. Glied des Divisor dividiert. Dieses 1. Glied des Quotient multipliciert man mit dem ganzen Divisor und zieht das Produkt vom Dividend ab. Das 1. Glied des als Dividend zu betrachtenden Restes (s. 1. Teil, S. 49, 3. Zeile von unten) durch das 1. Glied des Divisor dividiert, giebt nun das **2. Glied des Quotient,** welches wieder mit dem ganzen Divisor multipliciert und von jenem 1. Rest subtrahiert wird. Das 1. Glied des neuen (zweiten) Restes, durch das 1. Glied des Divisor dividiert, giebt das **3. Glied des Quotient.** So setzt man die Division fort, bis entweder die Division aufgeht (der Rest $= 0$ wird, der Quotient also aus einer endlichen Anzahl von

Gliedern besteht), oder eine genügende Anzahl von Gliedern des Quotient berechnet ist.

1. Beispiel. $\frac{38ab + 24b^2 + 15a^2}{4b + 3a}$? Geordnet:

$$\begin{array}{l}
(15a^2 + 38ab + 24b^2) : (3a + 4b) = 5a + 6b \\
\underline{15a^2 + 20ab \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(A)} \\
\quad 18ab + 24b^2 \;.\;.\;.\;(B) \\
\quad \underline{18ab + 24b^2 \;.\;.\;.\;(C)} \\
\qquad\qquad 0.
\end{array}$$

Erklärung zu vorstehendem Schema.

Das 1. Glied $15a^2$ des gegebenen Dividend (nach §. 56) durch das 1. Glied $3a$ des Divisor dividiert, giebt das 1. Glied $5a$ des Quotient. Dieses Glied $5a$, mit dem ganzen Divisor $3a + 4b$ multipliciert und das Produkt (A) vom Dividend (nach §. 54, 2) subtrahiert, giebt den 1. Rest (B), welcher wieder in gleicher Weise wie der ursprüngliche Dividend durch den Divisor $3a + 4b$ zu dividieren ist, indem man das 1. Glied $18ab$ durch das 1. Glied $3a$ des Divisor dividiert und das Resultat $6b$ als 2. Glied des Quotient setzt. Dieses Glied $6b$ multipliciert man mit dem ganzen Divisor $3a + 4b$ und zieht das erhaltene Produkt (C) von jenem Rest (B) ab. Da der neue Rest $= 0$, so ist $5a + 6b$ der vollständige Quotient, der mit $3a + 4b$ multipliciert, den gegebenen 3gliedrigen Dividend geben mufs.

Anmerkung. Bei der Subtraktion der Partialprodukte zieht man immer nur so viel Glieder vom Dividend (resp. Rest) herunter, als bei der nächsten Division gebraucht werden.

2. Beispiel. $\frac{39xy + 10z^2 - 33yz + 28x^2 - 54y^2 - 34xz}{6y - 7x + 5z}$? Geordnet:

$$\begin{array}{l}
(28x^2 + 39xy - 34xz - 54y^2 - 33yz + 10z^2) : (-7x + 6y + 5z) = -4x - 9y + 2z \\
\underline{28x^2 - 24xy - 20xz} \\
\quad 63xy - 14xz - 54y^2 - 33yz \\
\quad \underline{63xy \qquad\quad - 54y^2 - 45yz} \\
\qquad - 14xz \qquad\quad + 12yz + 10z^2 \\
\qquad \underline{- 14xz \qquad\quad + 12yz + 10z^2} \\
\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}$$

Das 1. Glied $-4x$ des Quotient entstand aus $28x^2 : -7x$,
„ 2. „ $-9y$ „ „ „ „ $63xy : -7x$,
„ 3. „ $+2z$ „ „ „ „ $-14xz : -7x$.

3. Beispiel. $\dfrac{56a^2 + 22b^2 - 43b - 93ab + 15 + 59a}{7a - 2b + 3}$?

Ordnet man nach den bisher üblichen Regeln:

$$(15 + 59a + 56aa - 93ab - 43b + 22bb) : (3 + 7a - 2b),$$

so würde man, um das 3. Glied des Quotient zu bestimmen, $-77ab : 3$ zu dividieren haben. Dieser Quotient führt jedoch nicht zum Ziele und folglich ist nach der vom Verfasser gegebenen Regel (s. §. 52, 14, I) zu ordnen.

Setzt man die specielle Zahl $= 0$, $a = 1$, $b = 2$, so erhält man für:

$$\begin{matrix} 56a^2 + & 22b^2 - & 43b - & 93ab + & 15 + & 59a \\ 2, & 4, & 2, & 3, & 0, & 1. \end{matrix}$$ die Gliederwerte

Das 1. und 3. Glied mit $a = 1$, $b = 3$ geordnet giebt:

2, 3.

Mithin ist der Dividend nach den Zahlenwerten

$0 \quad 1 \quad \binom{2}{2} \quad \binom{2}{3} \quad 3 \quad 4$ zu ordnen:

$$\begin{array}{l} (15 + 59a + 56a^2 - 43b - 93ab + 22b^2) : (3 + 7a - 2b) = 5 + 8a - 11b. \\ \underline{15 + 35a \qquad\qquad - 10b} \\ \qquad 24a + 56a^2 - 33b - 93ab \\ \qquad \underline{24a + 56a^2 \qquad\quad - 16ab} \\ \qquad\qquad\qquad - 33b - 77ab + 22b^2 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{- 33b - 77ab + 22b^2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0. \end{array}$$

4. Beispiel.

$$\left(\frac{23}{30} + \frac{5a^2}{6} - \frac{83a^2}{216b} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{37b}{144} - \frac{b^2}{10a^2}\right) : \left(\frac{b}{4a} - \frac{3a}{2b} + \frac{10a}{9}\right)?$$

Mit $a = 1$, $b = 2$ erhält man die Gliederwerte:

0, 2, 0, -2, 2, 2; 1, -1, 1.

Die gleichen Glieder mit $a = 1$, $b = 3$ geordnet:

0 $\quad -1 \quad$ 2 $\quad$ 1

2 $\quad$ 3 $\quad$ 4;

Ordnet man die gegebenen Polynomien absteigend nach

$$\binom{2}{4}\ \binom{2}{3}\ \binom{2}{2}\ \binom{0}{0}\ \binom{0}{-1}\ -2;\quad \binom{1}{2}\ \binom{1}{1}\ -1$$

so erhält man:

$$\left[-\frac{b^2}{10a^2}-\frac{37b}{144}+\frac{5a^2}{6}+\frac{23}{30}-\frac{83a^2}{216b}-\frac{a^2}{b^2}\right]:\left(\frac{b}{4a}+\frac{10a}{9}-\frac{3a}{2b}\right)=-\frac{2b}{5a}+\frac{3a}{4}+\frac{2a}{3b}.$$

$$\begin{array}{l}
-\frac{b^2}{10a^2}-\frac{4b}{9}\phantom{+\frac{5a^2}{6}}+\frac{3}{5} \\
\hline
\phantom{-\frac{b^2}{10a^2}-}+\frac{3b}{16}+\frac{5a^2}{6}+\frac{1}{6}-\frac{83a^2}{216b} \\
\phantom{-\frac{b^2}{10a^2}-+}\frac{3b}{16}+\frac{5a^2}{6}\phantom{+\frac{1}{6}}-\frac{9a^2}{8b} \\
\hline
\phantom{-\frac{b^2}{10a^2}-+\frac{3b}{16}+\frac{5a^2}{6}}\frac{1}{6}+\frac{20a^2}{27b}-\frac{a^2}{b^2} \\
\phantom{-\frac{b^2}{10a^2}-+\frac{3b}{16}+\frac{5a^2}{6}}\frac{1}{6}+\frac{20a^2}{27b}-\frac{a^2}{b^2} \\
\hline
\phantom{-\frac{b^2}{10a^2}-+\frac{3b}{16}+\frac{5a^2}{6}\frac{1}{6}+\frac{20a^2}{27b}-}0.
\end{array}$$

Für das 1. Glied des Quotient: $-\frac{b^2}{10a^2}:\frac{b}{4a}=-\frac{b^2}{10a^2}\cdot\frac{4a}{b}=-\frac{2b}{5a}$.

" " 2. " " " $\frac{3b}{16}\cdot\frac{4a}{b}=\frac{3a}{4}$.

" " 3. " " " $\frac{1}{6}\cdot\frac{4a}{b}=\frac{2a}{3b}$.

5. Beispiel. $\frac{9b^6+16c^2-4a^2-24b^3c}{3b^3-4c+2a}$? Geordnet:

$$
\begin{array}{l}
(-4a^2+9b^6-24b^3c+16c^2):(2a+3b^3-4c)=-2a+3b^3-4c.\\
\underline{-4a^2-6ab^3+8ac}\\
\qquad 6ab^3-8ac+9b^6-24b^3c \;\ldots\ldots\; (R)\\
\qquad \underline{6ab^3 \qquad\quad +9b^6-12b^3c}\\
\qquad\qquad -8ac \qquad\quad -12b^3c+16c^2\\
\qquad\qquad \underline{-8ac \qquad\quad -12b^3c+16c^2}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

Da jeder Rest streng nach demselben Princip angeordnet werden mufs, wie die ursprünglichen Polynomien, so mufste hier der Rest R offenbar wieder von a bis c geordnet werden.

6. Beispiel.

$$\left\{\frac{32b^5}{135a^{11}}-\frac{375a^9}{128b^7}\right\}:\left\{\frac{a^1}{2b^2}-\frac{4b}{15a}\right\}?$$

Hier sind die Potenzen

$$\text{von a:}\quad a^{-11},\; a^9;\quad a^1,\quad a^{-1},$$

$$\text{von } b\text{:}\quad b^5,\quad b^{-7};\; b^{-2},\; b^1.$$

Damit in beiden Polynomien die Potenzen von a aufsteigen (von b absteigen), ist zu setzen:

$$\left\{\frac{32b^5}{135a^{11}}-\frac{375a^9}{128b^7}\right\}:\left\{-\frac{4b}{15a}+\frac{a^1}{2b^2}\right\}=-\frac{8b^4}{9a^{10}}-\frac{5b}{3a^5}-\frac{25}{8b^2}-\frac{375a^5}{64b^5}.$$

$$\underline{\frac{32b^5}{135a^{11}}-\frac{4b^2}{9a^6}}$$

$$\frac{4b^2}{9a^6}-\frac{375a^9}{128b^7}\quad\text{(immer wieder } a \text{ aufsteigend!)}$$

$$\underline{\frac{4b^2}{9a^6}-\frac{5}{6ab}}$$

$$+\frac{5}{6ab}-\frac{375a^9}{128b^7}$$

$$+\frac{5}{6\,ab}-\frac{375\,a^9}{128\,b^7}\ \text{(wiederholt)}$$

$$\frac{5}{6\,ab}-\frac{25\,a^4}{16\,b^4}$$

$$+\frac{25\,a^4}{16\,b^4}-\frac{375\,a^9}{128\,b^7}$$

$$\frac{25\,a^4}{16\,b^4}-\frac{375\,a^9}{128\,b^7}$$

$$0.$$

7. Beispiel.

$$\left[6\,a^2+5\,a(a-1)\,x-(12a^2+10\,a-1)x^2+(4\,a^2+8\,a+3)\,x^3\right]:\left[3\,a-(2\,a+1)\,x\right]=2\,a+(3\,a-1)\,x-(2\,a+3)\,x^2.$$

$$6\,a^2-2\,a\,(2\,a+1)\,x$$

$$3\,a\,(3\,a-1)\,x-(12\,a^2+10\,a-1)\,x^2$$

$$3\,a\,(3\,a-1)\,x-(6\,a^2+a-1)\,x^2$$

$$-3\,a\,(2\,a+3)\,x^2+(4\,a^2+8\,a+3)\,x^3$$

$$-3\,a\,(2\,a+3)\,x^2+(4\,a^2+8\,a+3)\,x^3$$

$$0.$$

8. Beispiel. $\dfrac{20\,a^2-45\,b^4}{14\,a+21\,b^2}$? Den gemeinsamen Faktor aller Glieder des Divisor stelle man stets heraus und dividiere nur durch den mit demselben multiplicierten zusammengesetzten Faktor. Daher:

$$=\frac{1}{7}\cdot\frac{20\,a^2-45\,b^4}{2\,a+3\,b^2}.$$

Für den 2. Faktor:

$$\begin{array}{l} (20a^2 - 45b^4):(2a + 3b^2) = 10a - 15b^2 \\ \underline{20a^2 + 30ab^2} \\ \qquad - 30ab^2 - 45b^4 \\ \qquad \underline{- 30ab^2 - 45b^4} \\ \qquad\qquad\qquad 0. \end{array}$$

Mithin ist der gegebene Ausdruck $= \frac{1}{7} \cdot (10a - 15b^2) = \frac{5}{7}(2a - 3b^2)$.

9. Beispiel. $\frac{12 + 15ab - 10a^2b^2 + 10a^3b^3 - 12a^4b^4}{18a^2 + 12a^4b^2}$

$$= \frac{1}{6a^2} \cdot \frac{12 + 15ab - 10a^2b^2 + 10a^3b^3 - 12a^4b^4}{3 + 2a^2b^2} ?$$

Zunächst:

$$\begin{array}{l} (12 + 15ab - 10a^2b^2 + 10a^3b^3 - 12a^4b^4):(3 + 2a^2b^2) = 4 + 5ab - 6a^2b^2. \\ \underline{12 \qquad\quad + 8a^2b^2} \\ \quad 15ab - 18a^2b^2 + 10a^3b^3 \\ \quad \underline{15ab \qquad\qquad + 10a^3b^3} \\ \qquad\quad - 18a^2b^2 \qquad - 12a^4b^4 \\ \qquad\quad \underline{- 18a^2b^2 \qquad - 12a^4b^4} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0. \end{array}$$

(Die gleichartigen Glieder sind stets richtig unter einander zu setzen!)

Die Aufgabe geht nun über in:

$$\frac{1}{6a^2}(4 + 5ab - 6a^2b^2) = \frac{2}{3a^2} + \frac{5b}{6a} - b^2.$$

2. Die Division wird oft bequemer, wenn man die Aufgabe zuvor durch das 1. Glied des Divisor kürzt, um dasselbe in 1 zu verwandeln.

Beispiel. $\left\{\frac{32b^5}{135a^{11}} - \frac{375a^9}{128b^7}\right\} : \left\{-\frac{4b}{15a} + \frac{a^4}{2b^2}\right\}$? (Siehe das vorstehende 6. Beisp.)

Dividend und Divisor durch $-\frac{4b}{15a}$ dividiert, oder also mit $-\frac{15a}{4b}$ multipliciert, giebt:

$$\left(-\frac{8b^4}{9a^{10}}+\frac{5625a^{10}}{512b^8}\right):\left(1-\frac{15a^5}{8b^3}\right)=-\frac{8b^4}{9a^{10}}-\frac{5b}{3a^5}\cdots\cdots$$
$$\frac{8b^4}{9a^{10}}+\frac{5b}{3a^5}$$
$$-\frac{5b}{3a^5}+\frac{5625a^{10}}{512b^8} \quad \text{u. s. w.}$$

3. Die Division kann sogar dadurch einfacher werden, dafs man Dividend und Divisor mit einem Polynom erweitert.

Beispiel. $\frac{2a^3-5a^2b+5ab^2-3b^3}{a^2-ab+b^2}$? Mit $a+b$ erweitert (s. §. 61, 3):

$$(2a^4-3a^3b+2ab^3-3b^4):(a^3+b^3)=2a-3b.$$
$$\begin{array}{l} 2a^4 \quad +2ab^3 \\ \hline -3a^3b \quad -3b^4 \\ -3a^3b \quad -3b^4 \\ \hline 0. \end{array}$$

4. Oft erkennt der Geübte sofort an der Aufgabe, dafs die Division aufgeht und welchen Quotient man erhalten mufs. So konnte man sich den Dividend des 5. Beispiels im 1. Satze sogleich in folgender Form denken:

$$-[4a^2-9b^6+24b^3c-16c^2]=-[(2a)^2-(3b^3-4c)^2]$$
$$=-(2a+3b^3-4c)(2a-3b^3+4c).$$

Dies durch $2a+3b^3-4c$ dividiert, giebt:

$$-(2a-3b^3+4c)=-2a+3b^3-4c.$$

Die in §. 61 gegebenen Produkte führen zu Quotienten, bei welchen das Aufgehen der Division und der durch dieselbe entstehende Quotient noch weit leichter ersichtlich sind. Da nämlich:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$$
$$(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)=a^4-b^4$$
$$(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots\ldots+b^n)(a-b)=a^{n+1}-b^{n+1}$$

und folglich auch:

$$(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots\ldots+b^{n-1})(a-b)=a^n-b^n,$$

so mufs auch umgekehrt:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$$

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

sein.

Oder: Die Division der Differenz zweier Potenzen mit gleichen und zwar ganzzahligen und positiven Exponenten durch die Differenz ihrer Basen geht stets auf.

$$\frac{1 - a^5}{1 - a}, \quad \frac{n^{20} - 32}{n^4 - 2}, \quad \frac{a^{12} - b^{24}}{a^3 - b^6}, \quad \frac{17^{13} - 6^{13}}{11}$$

müssen aufgehen, weil man sich diese Ausdrücke in der Form:

$$\frac{1^5 - a^5}{1 - a}, \quad \frac{(n^4)^5 - 2^5}{(n^4) - 2}, \quad \frac{(a^3)^4 - (b^6)^4}{a^3 - b^6}, \quad \frac{17^{13} - 6^{13}}{17 - 6}$$

denken kann.

Dieselben Produkte führen zu den Quotienten:

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b$$

$$\frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} = a - b \text{ u. s. w.}$$

Das Resultat hätte man hier wohl noch leichter durch Erweitern mit $a - b$ erhalten. In bezug auf den vorletzten Ausdruck z. B.

$$\frac{(a^3 - b^3)(a - b)}{(a^2 + ab + b^2)(a - b)} = \frac{(a^3 - b^3)(a - b)}{a^3 - b^3} = a - b.$$

8. Da $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ für jedes b aufgehen mufs, so mufs dies auch für $b = -c$ der Fall sein (s. §. 61, 4!)

Folglich gehen

$$\frac{a^2 - c^2}{a + c}, \quad \frac{a^3 + c^3}{a + c}, \quad \frac{a^4 - c^4}{a + c} \text{ u. s. w.}$$

auf und es ergeben sich folgende allgemeine Regeln:

I. Die Division der **Differenz** zweier Potenzen mit gleichen und **geradzahligen** Exponenten durch die **Summe** ihrer Basen geht auf.

Beispiel. $\frac{37^{10} - 14^{10}}{51}$ geht auf, denn $\frac{37^{10} - 14^{10}}{37 + 14}$.

II. Die Division der **Summe** zweier Potenzen mit gleichen und **ungeradzahligen** Exponenten durch die **Summe** ihrer Basen geht auf.

Beispiel. $\frac{20^9 + 11^9}{31}$ geht auf, denn $\frac{20^9 + 11^9}{20 + 11}$.

Vertauscht man hier Quotient und Divisor, so ergiebt sich zugleich:

$$\frac{a^3 + c^3}{a^2 - ac + c^2} = a + c,$$

$$\frac{a^4 - c^4}{a^3 - a^2 c + ac^2 - c^3} = a + c \text{ u. s. w.}$$

Zusatz. Mittelst der im 7. und 8. Satze gegebenen Quotienten lassen sich oft auch gewisse Produkte leichter bestimmen.

Beispiele.

$$(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) = \frac{a^3 - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^3 + 1}{a + 1} = \frac{a^6 - 1}{a^2 - 1}$$

$$= \frac{(a^2)^3 - 1}{a^2 - 1} = (a^2)^2 + a^2 + 1 = a^4 + a^2 + 1.$$

$$(a^3 + a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) = \frac{a^4 - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^3 + 1}{a + 1}$$

$$= \frac{a^4 - 1}{a^2 - 1} \cdot (a^3 + 1) = (a^2 + 1)(a^3 + 1) \text{ u. s. w.}$$

9. Geht die Division nicht auf, so erhält der Quotient unendlich viele Glieder, er wird eine sog. **unendliche Reihe**.

1. Beispiel.

$$4a^2 - 2a - 2 : 2a - 3 = 2a + 2 + \frac{2}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{9}{2a^3} \dots \textit{in inf.}$$

$$\begin{array}{l} 4a^2 - 6a \\ \hline \quad + 4a - 2 \\ \quad\;\; 4a - 6 \\ \hline \qquad\;\; 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
4 \text{ (wiederholt)} \\
4 - \frac{6}{a} \\
\hline
+\frac{6}{a} \\
\frac{6}{a} - \frac{9}{a^2} \\
\hline
+\frac{9}{a^2} \text{ u. s. w.}
\end{array}$$

Die unendliche Reihe deutet man durch Punkte, bestimmter durch Hinzufügung des Ausdrucks „*in inf.*" an (s. §. 18, 1).

2. Beispiel. $(a-b)^{-2} = \frac{1}{(a-b)^2} = \frac{1}{a^2 - 2ab + b^2}$.

$$1 \quad : a^2 - 2ab + b^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} + \frac{4b^3}{a^5} + \ldots .$$

$$\begin{array}{l}
1 - \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \\
\hline
+\frac{2b}{a} - \frac{b^2}{a^2} \\
\frac{2b}{a} - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{2b^3}{a^3} \\
\hline
+\frac{3b^2}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} \\
\frac{3b^2}{a^2} - \frac{6b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} \\
\hline
+\frac{4b^3}{a^3} - \frac{3b^4}{a^4} \text{ u. s. w.}
\end{array}$$

Dasselbe Resultat hätte man nach dem binomischen Lehrsatze (§. 62, 7) erhalten:

$$(a-b)^{-2} = a^{-2} + (-2)\, a^{-2-1}(-b) + \frac{(-2)(-2-1)}{1 \cdot 2}\, a^{-2-2}(-b)^2 + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, a^{-2-3}(-b)^3 + \ldots$$

$$= a^{-2} + 2a^{-3}b + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^{-4}b^2 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{-5}b^3 + \ldots.$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} + \frac{4b^3}{a^5} + \ldots.$$

3. Beispiel. $\frac{1}{1-a}$?

$$1 \quad : 1 - a = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots . \textit{ in inf.}$$

$$\begin{array}{l} 1 - a \\ \hline \quad + a \\ \quad\; a - a^2 \\ \hline \qquad + a^2 \\ \qquad\; a^2 - a^3 \\ \hline \qquad\quad + a^3 \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Es ist also

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + \ldots . \textit{ in inf.} \qquad \text{(Y)}$$

4. Beispiel. $\frac{1}{1+a}$?

Anstatt die Partialdivision anzuwenden, kann man in Y: $-a$ an die Stelle von a setzen. Man erhält:

$$\frac{1}{1-(-a)} = 1 + (-a) + (-a)^2 + (-a)^3 + \ldots., \text{ d. i.}$$

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \ldots . \textit{ in inf.} \qquad \text{(Z)}$$

1. Zusatz. Setzt man in Y: $a = \frac{1}{10}$, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \ldots., \text{ oder}$$

$$\frac{10}{10-1} = 1 + 0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + \ldots., \text{ oder}$$

$$\frac{10}{9} = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots. \qquad \text{(A)}$$

oder $1\frac{1}{9} = 1{,}111111 \ldots.$

Setzt man dagegen in Y: $a = 2$, so erhält man:

$$\frac{1}{1-2} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots., \text{ d. i.}$$

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots . \textit{ in inf.} \qquad \text{(B)}$$

Über dieses paradoxe Resultat wird der 14. Satz Aufklärung bringen.

2. Zusatz. Umgekehrt ist:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots = \frac{1}{1-a}$$

$$1 - a + a^2 - a^3 + \ldots = \frac{1}{1+a}.$$

Beide Formeln haben jedoch nur für $a < 1$ Geltung (siehe den Zusatz zum 14. Satz).

3. Zusatz. $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \ldots$ kann zur Division durch eine Zahl benutzt werden, die nur wenig kleiner als eine runde Zahl ist.

Beispiel.

$$\frac{14}{997} = \frac{14}{1000-3} = \frac{14}{1000\left(1 - \frac{3}{1000}\right)} = \frac{14}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{1000}}$$

$$= \frac{14}{1000}\left[1 + \frac{3}{1000} + \left(\frac{3}{1000}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$= 0{,}014\,[1 + 0{,}003 + 0{,}003^2 + 0{,}003^3 + \ldots]$$

$$= 0{,}014 \cdot 1{,}003009027081243 \ldots$$

$$= 0{,}0140421263791 \ldots$$

4. Zusatz. Die Formeln Y und Z kann man überhaupt benutzen, jeden Quotient mit mehrgliederigem Nenner ohne Partialdivision in eine Reihe zu verwandeln.

1. Beispiel.

$$\frac{d}{b-c} = \frac{d}{b\left(1 - \frac{c}{b}\right)} = \frac{d}{b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{c}{b}}$$

$$= \frac{d}{b}\left[1 + \frac{c}{b} + \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^3 + \ldots\right] \quad \text{(s. Y)}$$

$$= \frac{d}{b} + \frac{cd}{b^2} + \frac{c^2 d}{b^3} + \frac{c^3 d}{b^4} + \ldots$$

2. Beispiel.

$$\frac{3-2a}{4+5a} = \frac{3-2a}{4\left(1 + \frac{5a}{4}\right)} = \frac{3-2a}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5a}{4}}$$

$$=\left(\frac{3}{4}-\frac{a}{2}\right)\left[1-\frac{5a}{4}+\left(\frac{5a}{4}\right)^2-\left(\frac{5a}{4}\right)^3+\left(\frac{5a}{4}\right)^4-\ldots\right] \text{(s. Z)}$$

$$=\left(\frac{3}{4}-\frac{a}{2}\right)\left(1-\frac{5a}{4}+\frac{25a^2}{16}-\frac{125a^3}{64}+\frac{625a^4}{256}-\ldots\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{3}{4}-\dfrac{15a}{16}+\dfrac{75a^2}{64}-\dfrac{375a^3}{256}+\ldots \\ \quad-\dfrac{a}{2}+\dfrac{5a^2}{8}-\dfrac{25a^3}{32}+\ldots\end{cases}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{23a}{16}+\frac{115a^2}{64}-\frac{575a^3}{256}+\ldots$$

3. Beispiel.

$$\frac{7x}{3-2x+4x^2}=\frac{7x}{3\left(1-\dfrac{2x}{3}+\dfrac{4x^2}{3}\right)}$$

$$=\frac{7x}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{4x^2}{3}\right)}.$$

Setzt man in Y: $\frac{2x}{3}-\frac{4x^2}{3}$ an die Stelle von a, so ergiebt sich:

$$\frac{7x}{3}\left[1+\left(\frac{2x}{3}-\frac{4x^2}{3}\right)+\left(\frac{2x}{3}-\frac{4x^2}{3}\right)^2 \right.$$
$$\left. +\left(\frac{2x}{3}-\frac{4x^2}{3}\right)^3+\ldots\right]$$

$$=\frac{7x}{3}\left[1+\frac{2x}{3}-\frac{4x^2}{3}\right.$$
$$+\frac{4x^2}{9}-\frac{16x^3}{9}+\frac{16x^4}{9}$$
$$\left.+\frac{8x^3}{27}-\ldots\right]$$

$$=\frac{7x}{3}\left[1+\frac{2x}{3}-\frac{8x^2}{9}-\frac{40x^3}{27}\ldots\right]$$

$$=\frac{7x}{3}+\frac{14x^2}{9}-\frac{56x^3}{27}-\frac{280x^4}{81}\ldots$$

10. Die Partialdivision kann bei jedem Reste beendigt werden. Der Quotient ist jedoch nur dann vollständig, wenn man

den letzten Rest durch den ganzen Divisor dividiert und diesen Bruch (das sogenannte Supplement) den bisher durch die Partialdivision gefundenen Gliedern des Quotient hinzufügt. (S. §. 13, 29, 4. Zus).

Beispiel.

$$(7x^5 + 5x^4 - 14x^3 - 10x^2 + 3x - 10) : (x^2 - 2) = 7x^3 + 5x^2 + \frac{3x - 10}{x^2 - 2}.$$

$$\begin{array}{l} 7x^5 \quad - 14x^3 \\ \hline \quad + 5x^4 \quad - 10x^2 \\ \quad\;\; 5x^4 \quad - 10x^2 \\ \hline \qquad\qquad\qquad 3x - 10. \end{array}$$

Es mufs daher auch Quotient $\times$ Divisor = Dividend sein, d. i.

$$\left(7x^3 + 5x^2 + \frac{3x - 10}{x^2 - 2}\right) \cdot (x^2 - 2) = \text{Dividend } 7x^5 + 5x^4 - \ldots.$$

Folglich auch $(7x^3 + 5x^2) \cdot (x^2 - 2) + 3x - 10 =$ Dividend!

Multipliciert man also den Quotient ohne die aus dem letzten Reste entstehende Ergänzung mit dem Divisor und vermehrt das Produkt um den Rest, so mufs sich der Dividend ergeben.

11. Ist der Dividend von gleichem oder von gröfserem Gliederumfange als der Divisor, so eignet sich die unendliche Reihe, welche man bei nichtaufgehender Partialdivision erhält, oft für eine praktische Berechnung eben so wenig, als der gegebene, durch die Partialdivision nicht veränderte Quotient.

In diesem Falle ist der vorhergehende Satz anzuwenden, jedoch die Partialdivision nicht bei einem beliebigen Reste abzubrechen, sondern dann, wenn der Rest von kleinerem Gliederumfange ist, als der Divisor. (Siehe §. 57, 8, Anmerk.)

1. Beispiel. $x = \frac{6a^3 - 29a^2 + 31a - 9}{3a - 4}.$

$$
\begin{array}{l}
(6a^3 - 29a^2 + 31a - 9):(3a - 4) = 2a^2 - 7a + 1 + \frac{-5}{3a-4} \\
\underline{6a^3 - 8a^2} \\
\quad - 21a^2 + 31a \\
\quad \underline{- 21a^2 + 28a} \\
\qquad\qquad + 3a - 9 \\
\qquad\qquad \underline{\;\;3a - 4} \\
\qquad\qquad\quad - 5.
\end{array}
$$

Dieser Rest ist von kleinerem Umfange als der Divisor, daher ist hier die Partialdivision zu schliefsen, und es ist:

$$x = 2a^2 - 7a + 1 - \frac{5}{3a-4}.$$

Ist z. B. $a = 1{,}4987$, so ist offenbar $2 \cdot 1{,}4987^2 - 7 \cdot 1{,}4987 + 1 - \frac{5}{3 \cdot 1{,}4987 - 4}$ weit leichter berechnet, als der gegebene Ausdruck

$$\frac{6 \cdot 1{,}4987^3 - 29 \cdot 1{,}4987^2 + 31 \cdot 1{,}4987 - 9}{3 \cdot 1{,}4987 - 4}.$$

Sehr unpraktisch wäre hier die unendliche Reihe:

$$2a^2 - 7a + 1 - \frac{5}{3a} - \frac{20}{9a^2} - \frac{80}{27a^3} - \ldots,$$

bei welcher

$$2 \cdot 1{,}4987^2 - 7 \cdot 1{,}4987 + 1 - \frac{5}{3 \cdot 1{,}4987} - \frac{20}{9 \cdot 1{,}4987^2} - \frac{80}{27 \cdot 1{,}4987^3} \ldots\ldots$$

berechnet werden müfste.

2. Beispiel. $x = \dfrac{a - 2b - \dfrac{5a^2 + 4b^2}{3a - 2b}}{3a + b - \dfrac{2a^2 + b^2}{a + b}}$

[mit $(3a - 2b)\,(a + b)$ erweitert:]

$$=\frac{(-2a^2-8ab)(a+b)}{(a^2+4ab)(3a-2b)} \text{ (durch } a \text{ gekürzt:)}$$

$$=\frac{(-2a-8b)(a+b)}{(a+4b)(3a-2b)}=\frac{-2a^2-10ab-8b^2}{3a^2+10ab-8b^2}.$$

Jetzt ist die Partialdivision anzuwenden, die bei aufsteigenden Potenzen von a zu einem einfacheren Resultate führt, als bei absteigenden.

$$(-8b^2-10ab-2a^2):(-8b^2+10ab+3a^2)=1$$
$$\underline{-8b^2+10ab+3a^2}$$
$$-20ab-5a^2.$$

Dieser Rest ist von kleinerem Umfange als der Divisor, folglich ist die Partialdivision zu schliefsen.

$$x=1+\frac{-20ab-5a^2}{-8b^2+10ab+3a^2}=1-\frac{5a(a+4b)}{3a^2+10ab-8b^2}$$
$$=1-\frac{5a(a+4b)}{(a+4b)(3a-2b)}=1-\frac{5a}{3a-2b}.$$

3. Beispiel.

$$\frac{a^3-3ab+2c}{3(a^2-b)}$$ (siehe Aufgaben von Heis, §. 74, 75 δ).

Man setze zunächst $\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3-3ab+2c}{a^2-b}$.

Durch Partialdivision ergiebt sich:

$$a^3-3ab+2c:a^2-b=a+\frac{-2ab+2c}{a^2-b}.$$
$$\underline{a^3-ab}$$
$$-2ab+2c$$

Der gegebene Ausdruck wird also $=\frac{1}{3}\left[a-\frac{2(ab-c)}{a^2-b}\right]$.

12. Schematische Berechnung der Glieder des Quotient statt der vollständig ausgeführten Partialdivision.

I. Für 2gliederige Divisoren.

Die nach §. 60, 1 ausgeführte Multiplication des Produkts

$$(3x^3-7x^2+11x-2)(4x+5) \text{ ergiebt:}$$
$$12x^4-28x^3+44x^2-8x$$
$$\underline{\qquad\quad+15x^3-35x^2+55x-10}$$
$$=12x^4-13x^3+\ 9x^2+47x-10.$$

Wenn also in $(q_1 + q_2 + q_3 + \ldots)\,(d_1 + d_2)$ die beiden Polynomien nach gleichmäfsig fortschreitenden Potenzen einer Hauptgröfse angeordnet sind, so würden sich die in den Partialprodukten unter einander stehenden Glieder stets in 1 Glied zusammenziehen lassen (hier z. B. $44x^2 - 35x^2 = 9x^2$). Nennt man das 1. Glied des Produkts jener Polynomien D_1 (hier $12x^4$), das 2. Glied: D_2 (hier $-13x^3$), das 3. Glied: D_3 u. s. w., so würde also aus

$$\begin{array}{l} (q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots)(d_1 + d_2) \\ \hline d_1 q_1 + d_1 q_2 + d_1 q_3 + d_1 q_4 + \ldots \\ \qquad + d_2 q_1 + d_2 q_2 + d_2 q_3 + \ldots \\ \hline \end{array}$$

das Produkt $d_1 q_1 + (d_1 q_2 + d_2 q_1) + (d_1 q_3 + d_2 q_2) + (d_1 q_4 + d_2 q_3) + \ldots$

oder $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + \ldots$ entstehen.

Mithin ist

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & d_1 q_1 = D_1 \\ \text{II.} & d_1 q_2 + d_2 q_1 = D_2 \\ \text{III.} & d_1 q_3 + d_2 q_2 = D_3 \\ \text{IV.} & d_1 q_4 + d_2 q_3 = D_4. \end{array}$$

Da aber auch das Produkt, durch den einen Faktor dividiert, den andern Faktor geben mufs, so ist:

$$(D_1 + D_2 + D_3 + \ldots) : (d_1 + d_2) = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots$$

Diese Glieder q_1, $q_2 \ldots$ des Quotient lassen sich offenbar aus jenen Gleichungen I, II, III, IV bestimmen und zwar durch die Glieder D_1, $D_2 \ldots$ des Dividend und die Glieder d_1 und d_2 des Divisor.

Aus I folgt nämlich: $q_1 = \frac{D_1}{d_1}$ (s. §. 12, 1, Zus.).

„ II: $d_1 q_2 = D_2 - d_2 q_1$ oder $q_2 = \frac{D_2 - d_2 q_1}{d_1}$.

„ III: $d_1 q_3 = D_3 - d_2 q_2$ oder $q_3 = \frac{D_3 - d_2 q_2}{d_1}$.

„ IV: $d_1 q_4 = D_4 - d_2 q_3$ oder $q_4 = \frac{D_4 - d_2 q_3}{d_1} = \frac{D_4 + (-d_2) q_3}{d_1}$.

Das 4. Glied des gesuchten Quotient (q_4) erhält man also dadurch, dafs man zum 4. Gliede (D_4) des Dividend das Produkt aus dem entgegengesetzt genommenen 2. Gliede des Divisor und dem zuletzt berechneten 3. Gliede des Quotient $[=(-d_2)\,q_3]$ addiert und die Summe durch das 1. Glied (d_1) des Divisor dividiert.

Hieraus folgt, dafs man den Quotient von

$$\frac{12x^4 - 13x^3 + 9x^2 + 47x - 10}{4x + 5}$$

nämlich $3x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ schematisch in folgender Weise finden kann:

$D =$	$12,$	$-13,$	$9,$	$47,$	-10	[die Glieder des Dividend!]
$P =$		-15	$+35$	-55	$+10$	[der vorhergehende Quotient q multipliciert mit -5, dem entgegengesetzten 2. Gliede des Divisor.]
$S =$	12	-28	$+44$	-8	0	[Summe von D und P.] [Durch das 1. Glied 4 des Divisor dividiert]
$q =$	3	-7	$+11$	-2	0	

Der gesuchte Quotient mithin:

$$3x^3 - 7x^2 + 11x - 2.$$

2. Beispiel.

$$\left(6x^2 - 10x - 80 + \frac{17}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3} \ldots\right) : (2x - 9)$$

$D =$	$6,$	$-10,$	$-80,$	$+17,$	$-4,$	$+7, \ldots$	[Dividend]
$P =$		$+27$	$+\frac{153}{2}$	$-\frac{63}{4}$	$+\frac{45}{8}$	$+\frac{117}{16}$	[das vorhergehende q mult. mit $+9$ (s. Divisor)]
$S =$	6	$+17$	$-\frac{7}{2}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{13}{8}$	$+\frac{229}{16}$	$[= D + P]$
$q =$	3	$+\frac{17}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$+\frac{5}{8}$	$+\frac{13}{16}$	$+\frac{229}{32}.$	(:2 [s. Divisor])

Folglich der gesuchte Quotient

$$= 3x + \frac{17}{2} - \frac{7}{4x} + \frac{5}{8x^2} + \frac{13}{16x^3} + \frac{229}{32x^4} \ldots$$

Ist das 1. Glied des Divisor 1, so wird $S:1=S$, folglich fällt die letzte Zeile weg und die Zahlenreihe S repräsentiert zugleich q.

Z. B. $(-5x^4+3x^3-11x^2-20x+1):(x+4)$

$D = -5, \; +3, \; -11, \; -20, \; +1.$

$P = \qquad +20 \; -92 \; +412 \; -1568$ [das vorherg. q mult. mit -4 (s. Divisor)]

$S=q= \; -5 \; +23 \; -103 \; +392 \; -1567.$ Folgl. der gesuchte Quotient $= -5x^3+23x^2-103x+392-\frac{1567}{x}\ldots.$

II. Für Divisoren von mehr als 2 Gliedern.

Die Form ist hier folgende:

$$\frac{D_1+D_2+D_3+\ldots.}{d_1+d_2+d_3+\ldots.} = q_1+q_2+q_3\ldots. \quad \text{Folglich}$$

$$(d_1+d_2+d_3+d_4+\ldots.)(q_1+q_2+q_3+q_4+\ldots.)$$

$$\begin{aligned} d_1q_1+d_2q_1+d_3q_1+d_4q_1+\ldots. \\ +d_1q_2+d_2q_2+d_3q_2+\ldots. \\ +d_1q_3+d_2q_3+\ldots. \\ +d_1q_4+\ldots. \end{aligned}$$

$$= d_1q_1+(d_2q_1+d_1q_2)+(d_3q_1+d_2q_2+d_1q_3)+(d_4q_1+d_3q_2+d_2q_3+d_1q_4)+\ldots.$$

$$= D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + \ldots:$$

Daher ist:

$$\begin{aligned} d_1q_1 &= D_1 \\ d_2q_1+d_1q_2 &= D_2 \\ d_3q_1+d_2q_2+d_1q_3 &= D_3 \\ d_4q_1+d_3q_2+d_2q_3+d_1q_4 &= D_4 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$q_1 = \frac{D_1}{d_1}$$

$$q_2 = \frac{D_2-d_2q_1}{d_1}$$

$$q_3 = \frac{D_3 - d_2 q_2 - d_3 q_1}{d_1}$$

$$q_4 = \frac{D_4 - d_2 q_3 - d_3 q_2 - d_4 q_1}{d_1} = \frac{D_4 + (-d_2) q_3 + (-d_3) q_2 + (-d_4) q_1}{d_1}$$

Bezeichnet man also das entgegengesetzt genommene 2., 3., 4. Glied des Divisor mit I, II, III, ... das zuletzt berechnete Glied des Quotient mit I′, das vorhergehende mit II′ u. s. w., so hat man das neue Glied des Dividend um I · I′ + II · II′ + III · III′ + ... zu vermehren und die Summe durch das 1. Glied des Divisor zu dividieren, um das neue Glied des Quotient zu finden.

1. Beispiel.

$$(20x^7 - 3x^6 - 19x^5 + 64x^4 + 17x^3 + 25x^2 - 6x - 18) : (5x^3 + 8x^2 - 2x - 3) = ?$$

$D =$	20,	−3,	−19,	+64,	+17,	+25,	−6,	−18.	
$P =$		−32	+56	−72	+16	−48	0	0	= I · I′
			+8	−14	+18	−4	+12	0	= II · II′
				+12	−21	+27	−6	+18	= III · III′
$S =$	20	−35	45	−10	30	0	0	0	$S = D + P$ (:5 [1. Glied des Divisor]
$q =$	4	−7	9	−2	6	0	0	0	[· +3, +2, −8 (s. Divisor)] III II I

Für $q = -7$:	I′					Siehe die darüber stehenden Zahlen.
„ $q = 9$:	II′	I′				
„ $q = -2$:	III′	II′	I′			
„ $q = 6$:		III′	II′	I′		
„ $q = 0$:			III′	II′	I′ u. s. w.	

Der gesuchte Quotient daher $= 4x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 2x + 6$.

2. Beispiel.

$$(6+11x-74x^2+51x^3+54x^4):(3-8x+5x^3-x^3-7x^4).$$

$D=6,$	$11,$	$-74,$	$51,$	54				
$P=$	16	72	-32	-64	$+88$	$+\frac{1496}{3}$		$(\mathrm{I}\cdot\mathrm{I}')$
		-10	-45	$+20$	$+40$	-55		$(\mathrm{II}\cdot\mathrm{II}')$
			$+2$	$+9$	-4	-8		$(\mathrm{III}\cdot\mathrm{III}')$
				$+14$	$+63$	-28		$(\mathrm{IV}\cdot\mathrm{IV}')$
$S=6$	27	-12	-24	$+33$	$+187$	$+\frac{1223}{3}$		(:3 [1. Glied des Divisor]
$q=2$	9	-4	-8	$+11$	$+\frac{187}{3}$	$+\frac{1223}{9}$		$(\cdot \underset{\mathrm{IV}}{+7}, \underset{\mathrm{III}}{+1}, \underset{\mathrm{II}}{-5}, \underset{\mathrm{I}}{+8}$
Für $\frac{187}{3}$ z. B.	IV'	III'	II'	I'				

Der gesuchte Quotient daher:

$$=2+9x-4x^2-8x^3+11x^4+\frac{187x^5}{3}+\frac{1223x^6}{9}\ldots.$$

13. Die unendliche Reihe nennt man eine convergierende (convergente), wenn die Summe sämtlicher Glieder eine endliche Zahl ist. Sie ist eine divergierende (divergente), wenn die Summe der sämtlichen Glieder $=+\infty$ oder $=-\infty$ ist. So ist z. B.

$$1+0{,}1+0{,}01+0{,}001+0{,}0001+\ldots.$$

eine convergierende Reihe, da ihre Summe = der endlichen Zahl $1\frac{1}{9}$ ist (s. A im 9. Satze).

Ist in der Reihe $1+2+3+4+5+\ldots.$ *in inf.* jedes Glied um 1 gröfser als das vorhergehende, so ist dieselbe divergierend, weil dann offenbar die Summe der sämtlichen Glieder $=+\infty$ ist.

Die convergierenden Reihen sind wenig brauchbar, wenn die Glieder langsam convergieren, d. h. nur sehr langsam abnehmen, weil man dann ungemein viele Glieder berechnen und addieren müfste, um zu einem befriedigenden Resultate zu gelangen. Die Reihe:

$$1 + 0{,}99 + 0{,}99^2 + 0{,}99^3 + 0{,}99^4 + \ldots, \text{ d. i.}$$

$$1 + 0{,}99 + 0{,}9801 + 0{,}9703 + 0{,}9606 + 0{,}9510 + 0{,}9415 + 0{,}9321 + 0{,}9227 + 0{,}9135 + \ldots$$

ist z. B. eine solche langsam convergierende Reihe, bei der erst das 231. Glied in der 1. Decimalstelle frei von Einheiten ($= 0{,}09\ldots$) wird, und doch ist die Summe der ersten 230 Glieder erst $= 90$, während die Summe der ganzen Reihe (nach dem 2. Zus. im 9. Satze)

$$= \frac{1}{1 - 0{,}99} = \frac{1}{0{,}01} = 100 \text{ ist.}$$

Statt der langsam convergierenden unendlichen Reihe wird man daher immer den gleichbedeutenden geschlossenen (d. i. den aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehenden) Ausdruck benutzen.

Dagegen sind schnell convergierende Reihen dem geschlossenen Ausdrucke oft vorzuziehen.

Beispiel. Um den geschlossenen Ausdruck $\frac{4 - 7a}{1 - 3a + a^2}$ für $a = 0{,}01$ auf 6 Decimalstellen zu berechnen, müfste man folgende zeitraubende Rechnung ausführen:

$$\frac{4 - 7 \cdot 0{,}01}{1 - 3 \,.\, 0{,}01 + 0{,}01^2} = \frac{4 - 0{,}07}{1 - 0{,}03 + 0{,}0001} = \frac{3{,}93}{0{,}9701} = \frac{39300}{9701}$$
$$= 39300 : 9701 = 4{,}051128 \ldots.$$

Wendet man dagegen auf denselben Ausdruck die Partialdivision an, so erhält man:

$$\begin{array}{l} 4 - 7a \quad : 1 - 3a + a^2 = 4 + 5a + 11a^2 + 28a^3 + \ldots. \\ \underline{4 - 12a + 4a^2} \\ \quad 5a - 4a^2 \\ \quad \underline{5a - 15a^2 + 5a^3} \\ \qquad 11a^2 - 5a^3 \ldots. \end{array}$$

Setzt man in dieser unendlichen Reihe $a = 0{,}01$, so ergiebt sich sehr schnell:

$$\begin{aligned} &4 + 5 \cdot 0{,}01 + 11 \cdot 0{,}0001 + 28 \cdot 0{,}000001 + \ldots. \\ &= 4 + 0{,}05 + 0{,}0011 + 0{,}000028 + \ldots. \\ &= 4{,}051128 \ldots. \end{aligned}$$

14. Die divergente Reihe ist offenbar vollkommen unbrauchbar und daher wäre entweder die Kenntnis des gleichbedeutenden

geschlossenen Ausdrucks, oder die Kenntnis des Supplements einer solchen Reihe unbedingt nötig.

Wer würde erraten, dafs (s. B. im 9. Satz)

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots \textit{in inf.} = -1 \text{ ist?}$$

Führen wir daher für $\frac{1}{1-a}$ noch einmal die Partialdivision aus, vervollständigen aber den Quotient z. B. nach dem 5. Gliede durch das Supplement, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l}
1 \; : \; 1 - a = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \frac{a^5}{1-a}. \\
\underline{1 - a} \\
\quad + a \\
\quad \underline{a - a^2} \\
\qquad + a^2 \\
\qquad \underline{a^2 - a^3} \\
\qquad\quad + a^3 \\
\qquad\quad \underline{a^3 - a^4} \\
\qquad\qquad + a^4 \\
\qquad\qquad \underline{a^4 - a^5} \\
\qquad\qquad\quad + a^5.
\end{array}$$

Setzt man jetzt in

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \frac{a^5}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$

für a denselben Wert 2 (s. B im 9. Satze), so ergiebt sich

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \frac{2^5}{1-2} = \frac{1}{1-2}, \text{ d. i.}$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 - 32 = -1!$$

Zusatz. die aus $\frac{1}{1-a}$ entstehende Reihe

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots \textit{in inf.}$$

hatte also bei Benutzung von 5 Gliedern das Supplement $\frac{a^5}{1-a}$. Benutzte man unendlich viele Glieder, so würde das Supplement $= \frac{a^\infty}{1-a}$ sein. Ist nun $a < 1$, so ist nach §. 62, 7, 7. Zus. $a^\infty = 0$, folglich wird dann dieses Supplement $= \frac{0}{1-a} = 0$. Addiert man daher für $a < 1$ die Glieder $1 + a + a^2 + \ldots$ mittelst des Ausdrucks $\frac{1}{1-a}$, so mufs das Resultat vollkommen richtig sein, weil

man alsdann nur das Supplement 0 weggelassen hätte. Ist dagegen $a > 1$, diese Reihe also divergent (s. oben $1 + 2 + 4 + 8 \ldots$), so ist das aus $\frac{1}{1-a}$ berechnete Resultat falsch, weil das fehlende Supplement nie $= 0$, sondern stets eine sehr einflufsreiche Zahl ist.

15. Die Reihe convergiert nicht immer, wenn die Werte der Glieder fortwährend abnehmen.

So ist z. B. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$ (C)

eine divergierende Reihe, deren Summe $= \infty$.

Beweis. Es ist $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \ldots$$

(wenn $\frac{1}{n-1}$ und $\frac{1}{n+1}$ durch Partialdivision verwandelt werden)

$$= \frac{3}{n} + 2\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^7} + \ldots\right)$$

Folglich ist $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ um $2\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \ldots\right)$ gröfser als $3 \cdot \frac{1}{n}$.

Hier genügt es, zu wissen, dafs $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ gröfser als das 3fache des Mittelgliedes $\frac{1}{n}$ ist.

Setzt man nun $n = 3$, so ist also

$$\frac{1}{3-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3+1} > 3 \cdot \frac{1}{3} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1. \text{ Eben so ist}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > 3 \cdot \frac{1}{6}, \text{ d. i.} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} > 3 \cdot \frac{1}{9}, \text{ d. i.} > \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} > 3 \cdot \frac{1}{12}, \text{ d. i.} > \frac{1}{4} \text{ u. s. w.}$$

Daraus folgt, dafs der oben gegebene Ausdruck C, d. i.

$$1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}+\underbrace{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}}+\frac{1}{10}+\ldots \text{ gröfser ist als}$$

$$1+\quad 1 \quad+\quad \frac{1}{2} \quad+\quad \frac{1}{3} \quad+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$$

In gleicher Weise aber ist wieder

$$1+1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}+\frac{1}{7}+\ldots \text{ gröfser als}$$

$$1+1+\quad 1 \quad+\quad \underbrace{\frac{1}{2} \quad+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\ldots \text{ und dies wieder}$$

gröfser als

$$1+1+\quad 1 \quad+\quad 1 \quad+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

und so findet man, dafs C, nämlich:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots > 1+1+1+1+1+1+1+\ldots \textit{ in inf.}$$

$$\text{d. i.} > \infty \text{ (s. §. 18, 1).}$$

Folglich divergiert diese Reihe.

16. Die Reihe divergiert nicht immer, wenn die gegebenen Glieder fortwährend zunehmen.

So ist z. B. $10+50+166\frac{2}{3}+416\frac{2}{3}+833\frac{1}{3}+1388\frac{8}{9}+\ldots$

eine convergente Reihe, obgleich die Glieder zunehmen, wenn dieselbe aus

$$10+\frac{10^2}{1\cdot 2}+\frac{10^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{10^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{10^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{10^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots$$

entstanden ist, wobei die Zähler in den Potenzen von 10 fortschreiten und jeder Nenner das Produkt aus dem vorhergehenden Nenner und dem neuen Exponent von 10 ist.

Beweis. Berechnet man eine endliche Anzahl von Gliedern dieser Reihe, so mufs offenbar die Summe derselben eine endliche Zahl sein. Daher mufs auch die Summe der ersten 10 Glieder, also mit Einschlufs des Gliedes $\frac{10^{10}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots 10}$, eine endliche Zahl sein, die wir mit a bezeichnen wollen.

Die gegebene Reihe selbst läfst sich alsdann schreiben:

$$a+\frac{10^{11}}{1\cdot 2\ldots\ldots 10\cdot 11}+\frac{10^{12}}{1\cdot 2\ldots\ldots 12}+\frac{10^{13}}{1\cdot 2\ldots\ldots 13}+\ldots$$

$$=a+\frac{10^{10}}{1\cdot 2\ldots\ldots 10}\cdot\frac{10}{11}+\frac{10^{10}}{1\cdot 2\ldots\ldots 10}\cdot\frac{10\cdot 10}{11\cdot 12}$$

$$+\frac{10^{10}}{1\cdot 2\ldots\ldots 10}\cdot\frac{10\cdot 10\cdot 10}{11\cdot 12\cdot 13}+\ldots\ldots$$

$$=a+a\cdot\frac{10}{11}+a\cdot\frac{10\cdot 10}{11\cdot 12}+a\cdot\frac{10\cdot 10\cdot 10}{11\cdot 12\cdot 13}+\ldots\ldots$$

$$=a\left[1+\frac{10}{11}+\frac{10}{11}\cdot\frac{10}{12}+\frac{10}{11}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{10}{13}+\ldots\ldots\right]$$

Diese Reihe ist aber offenbar kleiner als die Reihe:

$$a\left[1+\frac{10}{11}+\frac{10}{11}\cdot\frac{10}{11}+\frac{10}{11}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{10}{11}+\ldots\ldots\right],$$

weil nach §. 13, 23, 1. Zus. und §. 32, 7, 1. Zus.:

$$\frac{10}{12}<\frac{10}{11},$$

$$\frac{10}{13}<\frac{10}{11} \quad \text{u. s. w.,}$$

folglich ist sie kleiner als:

$$a\left[1+\frac{10}{11}+\left(\frac{10}{11}\right)^2+\left(\frac{10}{11}\right)^3+\ldots\ldots\right]=a\cdot\frac{1}{1-\frac{10}{11}}$$

(s. 2. Zus. im 9. Satz)

$$=a\cdot\frac{11}{11-10}=a\cdot 11,$$ also kleiner als das 11fache jener endlichen Zahl a und mithin ist die Reihe convergent.

17. Die divergierende Reihe läfst sich gewöhnlich vermeiden, wenn man den gegebenen Ausdruck noch einmal mit entgegengesetzter Anordnung dividiert.

So ist z. B. $\frac{3-a}{1-2a-a^2}$

$$= 3 - a : 1 - 2a - a^2 = 3 + 5a + 13a^2 + 31a^3 + \ldots .$$
$$\underline{3 - 6a - 3a^2}$$
$$+ 5a + 3a^2$$
$$\underline{5a - 10a^2 - 5a^3}$$
u. s. w.

Für $a = \frac{1}{100}$ ist die Reihe sehr schnell convergierend, für $a = 100$ jedoch erhält man:

$$3 + 5 \cdot 100 + 13 \cdot 100^2 + 31 \cdot 100^3 + \ldots .$$
$$= 3 + 500 + 130000 + 31000000 + \ldots ,$$

also eine divergente Reihe.

Ordnet man nun die gegebenen Polynomien entgegengesetzt (nach absteigenden Potenzen von a), so erhält man:

$$- a + 3 : - a^2 - 2a + 1 = \frac{1}{a} - \frac{5}{a^2} + \frac{11}{a^3} - \frac{27}{a^4} \ldots .$$
$$\underline{- a - 2 + \frac{1}{a}}$$
$$5 - \frac{1}{a}$$
$$\underline{5 + \frac{10}{a} - \frac{5}{a^2}}$$
u. s. w.

Setzt man hier $a = 100$, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{100} - \frac{5}{100^2} + \frac{11}{100^3} - \frac{27}{100^4}$$
$$= 0{,}01 - 0{,}0005 + 0{,}000011 - 0{,}00000027 \ldots .$$

also eine convergente Reihe.

§. 67. Das gröfste gemeinsame Mafs und das kleinste gemeinsame Vielfache von Polynomien.

1. Das gröfste gemeinsame Mafs zweier Polynomien. Um dieses zu bestimmen, sind zunächst die beiden Polynomien streng nach einerlei Prinzip anzuordnen. Hierauf dividiert man das Polynom, welches den gröfseren Gliederumfang hat, durch das andere mittelst der Partialdivision, beendigt aber diese Division, sobald der Rest von kleinerem Gliederumfange ist, als der Divisor. Alsdann dividiert man in gleicher Weise den Divisor durch den Rest. Die Division des jedesmaligen Divisor durch den Rest setzt

man so lange fort, bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor ist das gröfste gemeinsame Mafs. (Vergl. §. 23, 14).

Sind die gegebenen Polynomien von gleichem Umfange, so könnte zwar ein beliebiges als Dividend genommen werden, man wird aber darauf sehen, dafs die Division hinsichtlich der Coefficienten eine möglichst einfache wird.

1. Beispiel. $\frac{a^2+5a-14}{a^2+4a-12}$ sei zu kürzen. Folglich ist zunächst das gröfste gemeinsame Mafs der beiden Polynomien zu suchen.

$$
\begin{array}{l}
a^2+5a-14 : a^2+4a-12 = 1 \\
\underline{a^2+4a-12} \\
\qquad\quad a-2.
\end{array}
$$

Dieser Rest ist von kleinerem Umfange als der Divisor, folglich ist nun letzterer durch den Rest zu dividieren.

$$
\begin{array}{l}
a^2+4a-12 : a-2 = a+6 \\
\underline{a^2-2a} \\
\qquad 6a-12 \\
\qquad \underline{6a-12} \\
\qquad\qquad 0.
\end{array}
$$

Da die Division aufging, so ist der letzte Divisor $a-2$ das gröfste gemeinsame Mafs des Zählers und Nenners des gegebenen Bruches. Derselbe daher durch $a-2$ gekürzt, giebt:

$$\frac{a+7}{a+6}.$$

2. Beispiel. $\frac{a^2-ab-20b^2}{a^2+3ab-4b^2}$?

$$
\begin{array}{l}
a^2+3ab-4b^2 : a^2-ab-20b^2 = 1 \\
\underline{a^2-ab-20b^2} \\
\qquad 4ab+16b^2.
\end{array}
$$

Dieser Rest ist von kleinerem Umfange, als der Divisor; folglich:

$$
\begin{array}{l}
a^2-ab-20b^2 : 4ab+16b^2 = \frac{a}{4b} - \frac{5}{4} \quad \ldots . (A) \\
\underline{a^2+4ab} \\
\quad -5ab-20b^2 \\
\quad \underline{-5ab-20b^2} \\
\qquad\quad 0.
\end{array}
$$

Das gröfste gemeinsame Mafs ist der letzte Divisor

$$4ab+16b^2.$$

Die Division der gegebenen Polynomien durch dasselbe geht mithin auf, jedoch entstünden z. B. bei $a^2 - ab - 20\,b^2 : 4\,ab + 16\,b^2$ unbequeme, gebrochene Glieder. Geht aber eine Division (durch ein Polynom) auf, so müfste sie auch dann noch aufgehen, wenn man den Divisor $4\,b$ mal so klein oder so grofs nehmen würde, nur erhielte man alsdann einen $4\,b$ mal so grofsen oder so kleinen Quotient (also $4\,b$ mal so grofse oder so kleine Glieder). Da es nun nicht auf die Gröfse des Quotient, sondern auf einen bequemen letzten Divisor (gröfstes gemeinsames Mafs) ankommt, so folgt hieraus, dafs man alle Dividenden, Divisoren und Reste, die bei einer solchen Kettendivision auftreten, stets mit einem beliebigen Monom multiplicieren, oder durch ein beliebiges Monom (z. B. durch das gemeinsame Mafs aller Glieder) dividieren kann, um einfache und bequeme Glieder zu erhalten.

In vorstehendem Beispiele würde man daher den Divisor (siehe A) durch $4\,b$ dividieren, und die Rechnung vereinfachte sich in folgender Weise:

$$\begin{array}{l} a^2 - ab - 20\,b^2 : a + 4\,b = a - 5\,b \\ \underline{a^2 + 4\,ab \qquad\qquad} \\ \qquad - 5\,ab - 20\,b^2 \\ \qquad \underline{- 5\,ab - 20\,b^2} \\ \qquad\qquad 0. \end{array}$$

Mithin ist der letzte Divisor $a + 4\,b$ das gröfste gemeinsame Mafs. Der gegebene Bruch durch dasselbe gekürzt, giebt

$$\frac{a - 5\,b}{a - b}.$$

3. Beispiel. $\dfrac{9\,a^3 + 5\,ab^2 + 2\,b^3}{12\,a^3 - 2\,a^2 b - 5\,ab^2 - b^3}.$

Da beide Polynomien von gleichem Umfange, so könnte man ein beliebiges als Divisor nehmen. Hier ist jedoch der Zähler in sofern einfacher, als ihm ein Glied $(a^2 b)$ fehlt. Daher:

$$12\,a^3 - 2\,a^2 b - 5\,ab^2 - b^3 : 9\,a^3 + 5\,ab^2 + 2\,b^3 = ?$$

Das 1. Glied des Quotient wäre hier $\dfrac{12\,a^3}{9\,a^3} = \dfrac{4}{3}$, weil aber gebrochene Glieder die Rechnung in hohem Grade erschweren, so multipliciert man auf Grund der im 2. Beispiele gegebenen Regel den Dividend mit 3.

$$\begin{array}{l} 36\,a^3 - 6\,a^2 b - 15\,ab^2 - 3\,b^3 : 9\,a^3 + 5\,ab^2 + 2\,b^3 = 4 \\ \underline{36\,a^3 \qquad\qquad + 20\,ab^2 + 8\,b^3} \\ \qquad - 6\,a^2 b - 35\,ab^2 - 11\,b^3. \end{array}$$

Da der Divisor von a^3 bis a^0, der Rest von a^2 bis a^0 geht, letzterer also von kleinerem Umfange ist, so ist nun der Divisor durch den Rest zu dividieren.

$$(9a^3 + 5ab^2 + 2b^3) : (-6a^2b - 35ab^2 - 11b^3) = ?$$

Auch hier ist der bequemern Rechnung wegen der Divisor mit -1 zu multiplicieren und durch b zu dividieren, der Dividend aber mit 2 zu multiplicieren.

$$\begin{array}{l} (18a^3 + 10ab^2 + 4b^3) : (6a^2 + 35ab + 11b^2) = 3a \\ \underline{\ \ 18a^3 + 105a^2b + 33ab^2\qquad} \\ \qquad -105a^2b - 23ab^2 + 4b^3. \end{array}$$

Dieser Rest ist von gleichem Umfange mit dem Divisor, daher ist die Division fortzusetzen, jedoch vorher der zu dividierende Rest durch b zu dividieren und mit -2 zu multiplicieren.

$$\begin{array}{l} (210a^2 + 46ab - 8b^2) : (6a^2 + 35ab + 11b^2) = 35 \\ \underline{\ \ 210a^2 + 1225ab + 385b^2} \\ \qquad -1179ab - 393b^2 \end{array}$$

Der Rest von kleinerem Umfange wird nun Divisor, kann aber zuvor durch $-b$ dividiert werden.

$$(6a^2 + 35ab + 11b^2) : (1179a + 393b) = ?$$

Noch ist zu untersuchen, ob der Divisor weiter vereinfacht, d. h. durch eine Zahl (den gemeinsamen Faktor aller Glieder) dividiert werden kann.

Da das gröfste gemeinsame Mafs von 1179 und 393 die letztere Zahl selbst ist, so ist also der Divisor durch 393 zu dividieren:

$$\begin{array}{l} (6a^2 + 35ab + 11b^2) : (3a + b) = 2a + 11b \\ \underline{\ \ 6a^2 + \ \ 2ab\qquad\qquad} \\ \qquad\quad 33ab + 11b^2 \\ \qquad\quad \underline{33ab + 11b^2} \\ \qquad\qquad\quad 0. \end{array}$$

Der gegebene Bruch durch das gröfste gemeins. Mafs $3a + b$ gekürzt:

$$= \frac{3a^2 - ab + 2b^2}{4a^2 - 2ab - b^2}.$$

4. Beispiel. $$\frac{6a^3 - a^2 - 22a + 15}{21a^4 + 25a^3 - 27a^2 + 21a - 20}.$$

$$(21a^4 + 25a^3 - 27a^2 + 21a - 20) : (6a^3 - a^2 - 22a + 15) = ?$$

Der Dividend mit 2 multipliciert:

$$(42a^4 + 50a^3 - 54a^2 + 42a - 40) : (6a^3 - a^2 - 22a + 15) = 7a$$
$$\underline{42a^4 - 7a^3 - 154a^2 + 105a}$$
$$57a^3 + 100a^2 - 63a - 40.$$

Der Rest (noch als Dividend) mit 2 multipliciert:

$$(114a^3 + 200a^2 - 126a - 80) : (6a^3 - a^2 - 22a + 15) = 19$$
$$\underline{114a^3 - 19a^2 - 418a + 285}$$
$$219a^2 + 292a - 365.$$

Der Rest $<$ Divisor; folglich:

$$(6a^3 - a^2 - 22a + 15) : (219a^2 + 292a - 365) = ?$$

Um die Zahl zu entdecken, durch welche etwa der Divisor dividiert werden könnte, sucht man entweder von 2 beliebigen Coefficienten (z. B. von 219 und 292) das gröfste gemeins. Mafs, oder man zerlegt irgend einen Coefficient desselben in Primfaktoren. Z. B. $365 = 5 \cdot 73$. Die Division durch 73 giebt:

$$(6a^3 - a^2 - 22a + 15) : (3a^2 + 4a - 5) = 2a - 3$$
$$\underline{6a^3 + 8a^2 - 10a}$$
$$-9a^2 - 12a + 15$$
$$\underline{-9a^2 - 12a + 15}$$
$$0.$$

Folglich ist $3a^2 + 4a - 5$ das gröfste gem. Mafs der gegebenen Polynomien.

5. Beispiel.

$$12x^4 + 17x^3 + 7x^2 + 37x - 10 \text{ und } 16x^4 + 16x^3 - 5x^2 + 48x - 12.$$

Das 1. Polynom mit 4 multipliciert:

$$(48x^4 + 68x^3 + 28x^2 + 148x - 40) : (16x^4 + 16x^3 - 5x^2 + 48x - 12) = 3$$
$$\underline{48x^4 + 48x^3 - 15x^2 + 144x - 36}$$
$$20x^3 + 43x^2 + 4x - 4.$$

Der Divisor mit 5 multipliciert und als Dividend gesetzt:

$$(80x^4 + 80x^3 - 25x^2 + 240x - 60) : (20x^3 + 43x^2 + 4x - 4) = 4x$$
$$\underline{80x^4 + 172x^3 + 16x^2 - 16x}$$
$$-92x^3 - 41x^2 + 256x - 60.$$

Der Dividend mit -5 multipliciert:

$$\begin{array}{l}(460x^3+205x^2-1280x+300):(20x^3+43x^2+4x-4)=23\\ \underline{460x^3+989x^2+\quad 92x-\quad 92}\\ \quad -784x^2-1372x+392.\end{array}$$

Der durch -4 dividierte Rest ist nun als Divisor zu benutzen:

$$(20x^3+43x^2+4x-4):(196x^2+343x-98)=?$$

Es ist $98=2\cdot 7\cdot 7$ u. s. w., daher der Divisor durch $7\cdot 7$ dividiert:

$$\begin{array}{l}(20x^3+43x^2+4x-4):(4x^2+7x-2)=5x+2\\ \underline{20x^3+35x^2-10x}\\ \qquad\quad 8x^2+14x-4\\ \qquad\quad \underline{8x^2+14x-4}\\ \qquad\qquad\qquad 0.\end{array}$$

$4x^2+7x-2$ mithin das gesuchte gröfste gemeins. Mafs.

6. Beispiel. $1+8b^3$ und $4+b-14b^2$.

$$\begin{array}{l}(1+8b^3):(4+b-14b^2)=?\quad \text{Dafür:}\\ (4+32b^3):(4+b-14b^2)=1\\ \underline{4+b-14b^2}\\ \quad -b+14b^2+32b^3\end{array}$$

mit -4 multipliciert und durch b dividiert:

$$\begin{array}{l}(4-56b-128b^2):(4+b-14b^2)=1\\ \underline{4+\quad b-\quad 14b^2}\\ \quad -57b-114b^2\ (< \text{Divisor!})\end{array}$$

Der neue Divisor durch $-57b$ dividiert:

$$\begin{array}{l}(4+\quad b-14b^2):(1+2b)=4-7b\\ \underline{4+8b}\\ \quad -7b-14b^2\\ \quad \underline{-7b-14b^2}\\ \qquad\qquad 0.\end{array}$$

Folglich $1+2b$ das gröfste gemeins. Mafs.

7. Beispiel.

$$18x^6-39x^5+6x^4-51x^2+30x-24 \text{ und}$$
$$40x^6-124x^5+128x^4-112x^3+20x-48.$$

Das 1. Polynom durch 3, das 2. durch 4 dividiert:

$$(6x^6 - 13x^5 + 2x^4 - 17x^2 + 10x - 8) : (10x^6 - 31x^5 + 32x^4 - 28x^3 + 5x - 12)?$$

Das 1. Polynom mit 5 multipliciert:

$$(30x^6 - 65x^5 + 10x^4 - 85x^2 + 50x - 40) : (10x^6 - 31x^5 + 32x^4 - 28x^3 + 5x - 12) = 3$$
$$\underline{30x^6 - 93x^5 + 96x^4 - 84x^3 + 15x - 36}$$
$$28x^5 - 86x^4 + 84x^3 - 85x^2 + 35x - 4.$$

Der mit 14 multiplicierte Divisor als Dividend:

$$(140x^6 - 434x^5 + 448x^4 - 392x^3 + 70x - 168) : (28x^5 - 86x^4 + 84x^3 - 85x^2 + 35x - 4) = 5x$$
$$\underline{140x^6 - 430x^5 + 420x^4 - 425x^3 + 175x^2 - 20x}$$
$$-\ 4x^5 + 28x^4 + 33x^3 - 175x^2 + 90x - 168.$$

Mit -7 multipliciert:

$$(28x^5 - 196x^4 - 231x^3 + 1225x^2 - 630x + 1176) : (28x^5 - 86x^4 + 84x^3 - 85x^2 + 35x - 4) = 1$$
$$\underline{28 \quad - 86 \quad + 84 \quad - 85 \quad + 35 \quad - 4}$$
$$-110x^4 - 315x^3 + 1310x^2 - 665x + 1180.$$

Der Rest durch -5 dividiert und als Divisor benutzt, der Divisor mit 11 multipliciert:

$$(308x^5 - 946x^4 + 924x^3 - 935x^2 + 385x - 44) : (22x^4 + 63x^3 - 262x^2 + 133x - 236) = 14x$$
$$\underline{308 \quad + 882 \quad - 3668 \quad + 1862 \quad - 3304}$$
$$-1828x^4 + 4592x^3 - 2797x^2 + 3689x - 44.$$

Mit -11 multipliciert:

$$(20108x^4 - 50512x^3 + 30767x^2 - 40579x + 484) : (22x^4 + 63x^3 - 262x^2 + 133x - 236) = 914.$$
$$\underline{20108 \quad + 57582 \quad - 239468 \quad + 121562 \quad - 215704}$$
$$-108094x^3 + 270235x^2 - 162141x + 216188.$$

Der Rest durch -54017 dividiert und als Divisor benutzt:

$$(22x^4 + 63x^3 - 262x^2 + 133x - 236) : (2x^3 - 5x^2 + 3x - 4) = 11x + 59$$
$$\begin{array}{rrrrr} 22 & -55 & +33 & -44 & \\ \hline & 118x^3 & -295x^2 & +177x & -236 \\ & 118 & -295 & +177 & -236 \\ \hline & & & & 0. \end{array}$$

Folglich $2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ das gröfste gemeins. Mafs.

8. Beispiel.

$$(2a^2 - 3a - 2)x^2 + (5a^2 - 9a + 3)x - 3a^2 - 7a + 20 \text{ und}$$
$$(a^2 - 4)x^2 + (7a^2 - 8a - 8)x + 12a^2 - 23a + 5.$$

Es mag hier das 1. Polynom durch das 2. dividiert werden. Hätten nun $2a^2 - 3a - 2$ und $a^2 - 4$ keinen gemeinsamen Faktor, so müfste das 1. Polynom zuvor mit $a^2 - 4$ multiplieiert werden, wenn die hier besonders unangenehmen Brüche vermieden werden sollen. Die Rechnung würde jedoch auch dann noch sehr zusammengesetzt. Mithin ist zunächst zu untersuchen, ob $2a^2 - 3a - 2$ und $a^2 - 4$ einen gemeinsamen Faktor haben:

$$\begin{array}{l} 2a^2 - 3a - 2 : a^2 - 4 = 2 \\ 2a^2 \qquad\quad - 8 \\ \hline \qquad -3a + 6. \end{array}$$

Der durch -3 dividierte Rest als Divisor:

$$(a^2 - 4) : (a - 2) = a + 2.$$

Folglich $a - 2$ der gemeinsame Faktor der Coefficienten von x^2.

Da nun $2a^2 - 3a - 2 : a - 2 = 2a + 1$
$a^2 - 4 : a - 2 = a + 2,$

so läfst sich jetzt die Division der gegebenen Polynomien schreiben:

$$(2a+1)(a-2)x^2+(5a^2-9a+3)x-3a^2-7a+20:(a+2)(a-2)x^2+(7a^2-8a-8)x$$
$$+12a^2-23a+5=?$$

Folglich genügt es, das 1. Polynom mit $a+2$ zu multiplicieren, wenn der Quotient ganz werden soll. Daher:

$$(2a+1)(a^2-4)x^2+(\ 5a^3+\ a^2-15a+6)x-(\ 3a^3+13a^2-6a-40):(a^2-4)x^2+(7a^2-8a-8)x$$
$$+(12a^2-23a+5)=2a+1.$$
$$\underline{(2a+1)(a^2-4)x^2+(14a^3-9a^2-24a-8)x+(24a^3-34a^2-13a+5)}$$
$$(-9a^3+10a^2+9a+14)x-(27a^3-21a^2-19a-35).$$

Der mit -1 multiplicierte Rest als Divisor benutzt:

$$(a^2-4)x^2+(7a^2-8a-8)x+(12a^2-23a+5):(9a^3-10a^2-9a-14)x$$
$$+(27a^3-21a^2-19a-35)=?\ .\ .\ .\ .\ .\ (A)$$

Hier ist zunächst zu untersuchen, ob die beiden 4gliederigen Polynomien des Divisor einen gemeinsamen mehrgliederigen Faktor haben, durch den derselbe alsdann zu dividieren wäre.

$$(27a^3-21a^2-19a-35):(9a^3-10a^2-9a-14)=3$$
$$\underline{27a^3-30a^2-27a-42}$$
$$9a^2+\ 8a+\ 7$$

$$(9a^3-10a^2-9a-14):(9a^2+8a+7)=a-2$$
$$\underline{9a^3+\ 8a^2+7a}$$
$$-18a^2-16a-14$$
$$\underline{-18a^2-16a-14}$$
$$0.$$

Mithin kann in A der Divisor (d. h. jeder polynome Coefficient desselben) durch $9a^2 + 8a + 7$ dividiert werden und A geht über in:

$$\begin{array}{l} (a^2-4)x^2 + (7a^2-8a-8)x + (12a^2-23a+5) : [(a-2)x + (3a-5)] = (a+2)x + (4a-1) \\ \underline{(a^2-4)x^2 + (3a^2+a-10)x} \\ \qquad (4a^2-9a+2)x + (12a^2-23a+5) \\ \qquad \underline{(4a^2-9a+2)x + (12a^2-23a+5)} \\ \qquad\qquad\qquad 0. \end{array}$$

Der letzte Divisor $(a-2)x + (3a-5)$ ist mithin das gröſste gemeinsame Maſs der beiden gegebenen Polynomien.

2. Ist das gröſste gemeinsame Maſs von 3 Polynomien: A, B, C zu suchen, so bestimmt man zuerst das gröſste gemeinsame Maſs von A und $B = M$, hierauf das gröſste gemeinsame Maſs von M und $C = m$. Alsdann ist m das gesuchte Maſs (s. §. 23, 18).

3. Ist das gröſste gemeinsame Maſs der Polynomien A und $B = m$ und zwar $A : m = a$, $B : m = b$, so ist also $A = am$, $B = bm$ und folglich ist abm das kleinste gemeinsame Vielfache von A und B, da die gröſste Potenz von $a = a$, von $b = b$, von $m = m$ ist.

Um daher das kleinste gemeinsame Vielfache (den kleinsten gemeinsamen Dividuus) von 2 Polynomien zu suchen, hätte man zunächst nach dem 1. Satze das gröſste gemeinsame Maſs derselben zu bestimmen, alsdann jedes der gegebenen Polynomien durch dieses Maſs zu dividieren. Das Produkt der beiden Quotienten mit jenem gemeinsamen Maſse multipliciert, giebt das gesuchte kleinste gemeinsame Vielfache.

1. Beispiel. Es sei von $9a^3 + 5ab^2 + 2b^3$ und $12a^3 - 2a^2b - 5ab^2 - b^3$ das kleinste gemeinsame Vielfache zu suchen.

Zunächst findet man als gröſstes gemeinsames Maſs der beiden Polynomien: $3a + b$ (s. das 3. Beisp. im 1. Satze).

Nun ist

$$(9a^3 + 5ab^2 + 2b^3) : (3a + b) = 3a^2 - ab + 2b^2;$$
$$(12a^3 - 2a^2b - 5ab^2 - b^3) : (3a + b) = 4a^2 - 2ab - b^2.$$

Folglich ist das gesuchte kleinste gemeinsame Vielfache

$$= (3a + b)(3a^2 - ab + 2b^2)(4a^2 - 2ab - b^2).$$

2. Beispiel.

$$\frac{4a + 15}{20a^2 + 27a - 14} - \frac{6a + 1}{30a^2 - 67a + 22} \text{ zu addieren!}$$

Zunächst ist der Generalnenner der Brüche, d. h. das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Nenner zu suchen. Daher:

$$20a^2 + 27a - 14 : 30a^2 - 67a + 22 = ?$$

Dafür (mit 3 multipliciert):

$$60a^2 + 81a - 42 : 30a^2 - 67a + 22 = 2$$
$$\underline{60a^2 - 134a + 44}$$
$$215a - 86$$

durch 43 dividiert und als Divisor benutzt:

$$(30a^2 - 67a + 22) : (5a - 2) = 6a - 11$$
$$\underline{30a^2 - 12a}$$
$$-55a + 22.$$

Da $5a - 2$ das gröfste gemeinsame Mafs und

$$20a^2 + 27a - 14 : 5a - 2 = 4a + 7$$
$$30a^2 - 67a + 22 : 5a - 2 = 6a - 11,$$

so kann die Aufgabe geschrieben werden:

$$\frac{4a + 15}{(5a - 2)(4a + 7)} - \frac{6a + 1}{(5a - 2)(6a - 11)}$$
$$= \frac{(4a + 15)(6a - 11)}{(5a - 2)(4a + 7)(6a - 11)} - \frac{(6a + 1)(4a + 7)}{(5a - 2)(6a - 11)(4a + 7)}$$
$$= \frac{24a^2 + 46a - 165 - (24a^2 + 46a + 7)}{(5a - 2)(4a + 7)(6a - 11)}$$
$$= \frac{-172}{(5a - 2)(4a + 7)(6a - 11)} = \frac{172}{(5a - 2)(4a + 7)(11 - 6a)}.$$

§. 68. Eigenschaften der Zahlen. Zahlentheorie.

(Ergänzung des §. 23.)

1. Es ist $100 : 13$ nicht teilbar. Setzt man beliebige Zahlen z. B. 6 oder 11 als Quotienten, so erhält man nach §. 13. 29:

$$\frac{100}{13} = 6 + \frac{100 - 13 \cdot 6}{13} = 6 + \frac{22}{13},$$
$$\frac{100}{13} = 11 + \frac{100 - 13 \cdot 11}{13} = 11 + \frac{-43}{13}.$$

100 : 13 giebt also die Reste:

$$\begin{aligned} 100 - 13 \cdot \ 6 &= 22 \\ 100 - 13 \cdot \ 7 &= \ 9 \\ 100 - 13 \cdot \ 8 &= - \ 4 \\ 100 - 13 \cdot \ 9 &= -17 \\ 100 - 13 \cdot 10 &= -30 \\ 100 - 13 \cdot 11 &= -43 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Die Reste, welche man bei der Division 100 : 13 erhält, sind also in $100 - 13k$ enthalten, wenn k irgend eine ganze (posit. oder negat.) Zahl bedeutet.

Anstatt: „100 giebt durch 13 dividiert den Rest 22 (oder -43 u. s. w.)" drückt man sich in der Zahlentheorie auch aus:

„22 ist ein Rest (*Residuum*) von 100 nach dem Modul 13."

Abgekürzt: $\quad res.\ 100\ (mod\ 13) = 22 \ . \ . \ . \ . \ . \ (A)$

Da die sämtlichen Reste von 100 nach dem Modul 13 in $100 - 13k$ enthalten sind (s. oben), so kann man auch schreiben:

$$res.\ 100\ (mod\ 13) = 100 - 13\,k.$$

Allgemein: Die Reste von a nach dem Modul m sind $a - mk$.

Abgekürzt: $\quad res.\ a\ (mod\ m) = a - mk.$

Ist r ein bestimmter Rest von a nach dem Modul m, so schreibt man:

$$res.\ a\ (mod\ m) = r. \quad \text{(Vergl. oben A).}$$

1. Beispiel. Die Reste von 37 nach dem Modul 7 sind $37 - 7k$. Daher z. B.

$$\begin{aligned} &= 37 - 7 \cdot 0 = 37 \\ &= 37 - 7 \cdot 1 = 30 \\ &= 37 - 7 \cdot 5 = \ 2 \\ &= 37 - 7 \cdot 6 = - \ 5 \\ &= 37 - 7 \cdot 7 = -12 \text{ u. s. w.} \\ \text{aber auch } &= 37 - 7\,(-1) = 44 \\ &= 37 - 7\,(-2) = 51 \text{ u. s. w.,} \end{aligned}$$

denn nach §. 13, 29 ist

$$\frac{37}{7} = -2 + \frac{37 - 7\,(-2)}{7} = -2 + \frac{51}{7},$$

also 51 ein Rest.

Hier ist 2 der kleinste positive Rest von 37 nach dem Modul 7,
$ -5$ „ „ negative „ „ „ „ „ „ „.

Man schreibt dies: *res. min.* 37 (*mod* 17) $= \begin{cases} +12 \\ -5. \end{cases}$

(Abkürzung von: *residuum minimum* = kleinster Rest.)

2. Beispiel. Die Reste von 49 nach dem Modul 13 sind $49 - 13k$.
Daher z. B.

$$\begin{aligned} 49 - 13 \cdot 0 &= 49 \\ 49 - 13 \cdot 2 &= 23 \\ 49 - 13 \cdot 3 &= 10 \\ 49 - 13 \cdot 4 &= -3 \\ 49 - 13 \cdot 5 &= -16 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es ist also 10 der kleinste positive Rest von 49 nach dem Modul 13,
$ -3$ „ „ negative „ „ „ „ „ „ „.

Oder: *res. min.* 49 (*mod* 13) $= \begin{cases} +10 \\ -3. \end{cases}$

Nichtreste von 37 nach dem Modul 7 sind mithin z. B.:

12, 11, 10, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 1, 0, —1, —2, —3, —4, —6, —7, —8
u. s. w.

1. Zusatz. Giebt eine Zahl a nach dem Modul m den kleinsten positiven Rest r (also $r < m$), so ist

$$\frac{a}{m} = k + \frac{r}{m} \text{ oder [mit } m \text{ mult. (§. 10, 10) u. dann}$$

r nach §. 8, 1, Zus. bestimmt:] $\quad r = a - mk \quad$ (wie oben) . . . . . (B)

Nimmt man nun den Quotient um 1 gröfser, also $k + 1$ statt k, so erhält man den Rest:

$$a - m(k+1) = (a - mk) - m \text{ [d. i. nach vorst. Gleichung B]}$$
$$= r - m \text{ [negative Zahl, da } r < m] = -(m - r).$$

Eine Zahl a, die also nach dem Modul m den kleinsten positiven Rest r giebt, hat auch den negativen Rest $-(m - r)$, bei welchem die absolute Zahl $m - r$ gleichfalls $< m$ ist.

Beispiel. Eine Zahl a, die nach dem Modul 17 den Rest 13 giebt, mufs auch den negativen Rest

$$-(17 - 13) = -4$$

haben.

Probe:

$$\frac{98}{17} = 5 + \frac{98 - 17 \cdot 5}{17} = 5 + \frac{13}{17} \text{ (Rest} = 13).$$

$$\frac{98}{17} = 6 + \frac{98 - 17 \cdot 6}{17} = 6 + \frac{-4}{17} \text{ (Rest} = -4).$$

2. Zusatz. Da k jede positive oder negative Zahl bedeuten kann, so lassen sich die Reste von a nach dem Modul m auch $a + mk$ schreiben; oder:

$$res.\ a\ (mod\ m) = a + mk.$$

Beispiel. $res.\ 37\ (mod\ 7) = 37 + 7k$.

Setzt man hier $k = -5$, so erhält man:

$$res.\ 37\ (mod\ 7) = 37 + 7(-5) = 2, \text{ wie oben!}$$

2. Giebt eine Zahl a durch 13 dividiert den Rest 5, so kann man dies nach §. 13, 29 schreiben:

$$\frac{a}{13} = k + \frac{5}{13},$$

wo k irgend eine ganze Zahl ist. Dies mit 13 multipl.:

$$a = 13k + 5.$$

Oder: Die Zahlen, welche nach dem Modul 13 den Rest 5 geben, haben die Form $13k + 5$.

Beispiele.

Die Zahlen $13 \cdot 10 + 5 = 135$
$13 \cdot (-6) + 5 = -73$

müssen nach dem Modul 13 den Rest 5 geben.

Probe:

$$\frac{135}{13} = 10 + \frac{5}{13}$$

$$\frac{-73}{13} = -6 + \frac{5}{13}.$$

Allgemein: Ist a eine Zahl, die nach dem Modul m den Rest r giebt, so ist:

$$\frac{a}{m} = k + \frac{r}{m}, \text{ folglich (mit } m \text{ multipl.):}$$

$$a = mk + r.$$

Mithin können die Zahlen, welche nach dem Modul m einen bestimmten Rest r geben, „$mk + r$" (oder nach §. 23, 7 auch: $V_m + r$) geschrieben werden.

1. Zusatz.

Umgekehrt: Ist $a = km + r$, so gilt:

$$res.\ a\ (mod\ m) = r.$$

Beispiel.

$123 = 17 \cdot 7 + 4$, folglich: $res.\ 123\ (mod\ 7) = 4$.

2. Zusatz. Sind k, k', p ganze Zahlen, so haben die Zahlen

$$km + r = a \text{ und } k'm + r = b$$

nach dem Modul m gleiche Reste (den Rest r).

Ist nun k' um p gröſser oder kleiner als k, so gehen die vorstehenden Zahlen über in:

a und $(k \pm p)\,m + r$, oder
a und $km + r \pm pm$, oder, da
$km + r = a$ ist:
a und $a \pm pm$.

Eine Zahl hat also mit einer andern, die um ein Vielfaches des Modul gröſser oder kleiner ist als jene, nach demselben Modul gleiche Reste. Oder:

Ist $A = Qd + B$, also A um ein Vielfaches von d gröſser als B, so giebt $\frac{A}{d}$ denselben Rest wie $\frac{B}{d}$. (Vergl. auch $\frac{A}{d} = Q + \frac{B}{d}$ mit §. 12, 29, 3. Zus.)

Beispiel.

100 und $100 + 13k$, z. B. 100 und $100 + 13 \cdot 8 = 204$, haben nach dem Modul 13 gleiche Reste.

Probe: $100 : 13 = 7$, Rest 9;
$204 : 13 = 15$, Rest 9.

Anmerkung. Haben daher a und $b = a + km$ denselben Rest r, so ist $b - a = a + km - a = km = V_m$ (s. §. 23, 7), oder $b - a$ ist durch m teilbar.

Ist die Differenz zweier Zahlen (wie vorstehend $b - a$) durch m teilbar, giebt also jede nach dem Modul m denselben Rest (r), so schreibt man dies auch:

$$a \equiv b\ (mod\ m),$$

gelesen: „a congruent b nach dem Modul m“.

Eine solche „Congruenz“ bedeutet mithin, daſs $a - b$ durch m teilbar, oder $a - b$ ein Vielfaches von m, oder $\frac{a - b}{m}$ eine ganze Zahl ist.

Beispiele.

$31 \equiv 11\ (mod\ 5)$; denn $31 - 11$ durch 5 teilbar.

$-7 \equiv 29\ (mod\ 9)$; denn $-7 - 29 = -36$ durch 9 teilbar.

3. Giebt a nach dem Modul m den positiven Rest r ($< m$),
so giebt $-a$ „ „ „ „ „ „ „ $m-r$
und $pm-a$ „ „ „ „ denselben posit. „ $m-r$.

Beispiele.

100 giebt nach dem Mod. 7 den pos. Rest 2

$$\left(\frac{100}{7} = 14 + \frac{2}{7}\right);$$

-100 giebt nach dem Mod. 7 den pos. Rest $7-2=5$

$$\left(\frac{-100}{7} = -15 + \frac{5}{7}\right);$$

$19 \cdot 7 - 100 = 33$ giebt nach dem Mod. 7 den pos. Rest $7-2=5$

$$\left(\frac{33}{7} = 4 + \frac{5}{7}\right).$$

Beweis. $a = km + r$ (s. oben), folglich (mit -1 mult.)

$$-a = (-k)m - r = [(-k-1)m + m] - r, \text{ d. i.}$$

$$-a = (-k-1)m + (m-r).$$

Nach Satz 2, 2. Zusatz aber hat $-a + pm$, d. i. $pm - a$ denselben Rest wie $-a$, also auch denselben Rest $m-r$.

4.

Die Reste von 37 nach dem Mod. 7 sind .... 16, 9, 2, -5, -12, ...;
„ „ „ 49 „ „ „ 13 „ .... 23, 10, -3, -16, ...
(s. die beiden Beispiele des 1. Satzes).

Es ist also der „absolut kleinste Rest“ von 37 nach dem Modul 7 die Zahl 2, weil von allen Resten nur dieser die kleinste absolute Zahl hat. Der absolut kleinste Rest von 49 nach dem Mod. 13 ist -3, weil dieser von allen Resten die kleinste absolute Zahl hat.

Die kleinsten positiven Reste von a nach dem Modul 6 sind 1, 2, 3, 4, 5. Hat aber die Zahl a die positiven Reste

3 4 5,

so hat sie (nach dem 1. Zus. des 1. Satzes) auch resp. die negativen Reste: $-(6-3)$, $-(6-4)$, $-(6-5)$, d. i.

-3, -2, -1.

Statt der Reste 1, 2, 3, 4, 5 kann man also

die Reste $\begin{cases} 1, 2, 3. \\ \quad\quad\; -3, -2, -1 \end{cases}$ setzen,

so dafs der absolut kleinste Rest nach dem Modul 6 (gerade Zahl!) nicht gröfser als 3 $\left(=\frac{6}{2}\right)$ sein kann.

Die kleinsten positiven Reste von a nach dem Modul 11 sind: 1, 2, 3, ... 9, 10. Hat aber die Zahl a die positiven Reste

5, 6, 7,

so mufs sie auch resp. die negativen Reste:

$$-(11-5),\ -(11-6),\ -(11-7), \ldots, \text{ d. i.}$$
$$-6, \quad -5, \quad -4 \quad \text{haben.}$$

Statt der Reste:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

kann man also die Reste:

1, 2, 3, 4, 5, —5, —4, —3, —2, —1

setzen, so dafs der absolut kleinste Rest nach dem Modul 11 (ungerade Zahl!) nicht gröfser als 5 $\left(<\frac{11}{2}\right)$ sein kann.

Allgemein: Die absolut kleinsten Reste nach dem geradzahligen Modul m sind in der Zahlenreihe

$$1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots, \frac{m-2}{2},\ \frac{m}{2} \text{ enthalten.}$$

Die absolut kleinsten Reste aller Zahlen nach dem ungeradzahligen Modul m sind in der Zahlenreihe

$$1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots, \frac{m-3}{2},\ \frac{m-1}{2} \text{ enthalten.}$$

5. Allgemeine Theorie der Kettendivision.

Auf die Zahlen a und b mag die fortgesetzte Division (siehe §. 23, 14) angewandt werden. Hierbei mögen die Quotienten so gewählt werden, dafs die Reste stets die absolut kleinsten sind. Schematisch würde man also erhalten:

$$a:b=q_1 \text{ (der 1. Quot.)}$$
$$bq_1 \text{ subtr.}$$
$$\ldots\ldots:(a-bq_1) \text{ (1. Rest!)}$$

Der Kürze wegen mögen die Quotienten der Reihe nach mit $q_1, q_2, q_3 \ldots$, die Reste mit $r_1, r_2, r_3 \ldots$, der letzte Rest mit r_k bezeichnet werden, so dafs

a durch b dividiert den kleinsten Rest r_1,
b „ r_1 „ „ „ „ r_2,
r_1 „ r_2 „ „ „ „ r_3 giebt
u. s. w.

Somit gestaltet sich das Schema:

$$\begin{array}{r}
a : b = q_1 \\
b q_1 \text{ subtr.} \\
\hline
b : r_1 = q_2 \\
r_1 q_2 \text{ subtr.} \\
\hline
r_1 : r_2 = q_3 \\
r_2 q_3 \\
\hline
r_2 : r_3 = q_4 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
\hline
r_{k-3} : r_{k-2} = q_{k-1} \quad (C) \\
r_{k-2} q_{k-1} \\
\hline
r_{k-2} : r_{k-1} = q_k \quad (B) \\
r_{k-1} q_k \\
\hline
r_{k-1} : r_k = q_{k+1} \quad (A) \\
r_k q_{k+1} \\
\hline
0.
\end{array}$$

Da die Division durch r_k aufging, so ist (siehe A) der letzte Dividend r_{k-1} = Quotient $\times$ Divisor $= q_{k+1} \cdot r_k$, folglich ist der vorletzte Rest r_{k-1} (siehe B) ein Vielfaches des letzten Restes r_k (siehe A). Nun aber ist (siehe B): Minuend r_{k-2} = Subtrahend + Rest $= r_{k-1} q_k + r_k$, und da beide Zahlen r_{k-1} und r_k Vielfache von r_k sind, so ist (nach §. 23, 9) auch die Summe

$$r_{k-1} q_k + r_k,$$

d. i. (siehe C) r_{k-2} ein Vielfaches von r_k. Eben so ist

$$r_{k-3} = r_{k-2} q_{k-1} + r_{k-1},$$

und da r_{k-2} und r_{k-1} Vielfache von r_k sind, so ist auch r_{k-3} ein Vielfaches von r_k. Setzt man dies rückwärtsschreitend fort, so findet man zuletzt, daſs b und a Vielfache des letzten Restes (resp. des letzten Divisor) r_k sind, oder daſs a und b die Zahl r_k als gemeinsames Maſs haben.

Ferner ist (s. §. 23, 9) jedes Maſs von a und b auch ein Maſs von $a - b q_1$, d. i. von r_1, jedes Maſs von b und r_1 ein Maſs von $b - r_1 q_2$, d. i. von r_2 u. s. w. So findet man zuletzt, daſs jedes Maſs von a und b auch ein Maſs des letzten Restes (des letzten Divisor) r_k sein muſs, folglich können a und b kein gröſseres

gemeinsames Mafs als r_k haben. Mithin ist der letzte Divisor r_k nicht blofs ein gemeinsames Mafs von a und b, sondern das gröfste gemeinsame Mafs dieser beiden Zahlen.

6. Besondere Arten von Zahlen (Ergänzung zu §. 22).

I. Unter „Keilzahl" versteht man das Produkt dreier Primzahlen.

Beispiel. $5 \cdot 11 \cdot 13 = 715$.

II. Ungerad ungerade Zahl (*impariter impar*) ist das Produkt zweier ungeraden Zahlen.

Beispiel. $9 \cdot 13 = 117$.

III. Gerad gerade Zahl (*pariter par*) ist eine solche, die sich bis auf 1 halbieren läfst (also eine Potenz von 2). Z. B. 32.

IV. Ungerad gerade Zahl (*pariter impar* oder *impariter par*) ist eine Zahl, deren Hälfte ungerade ist. Z. B. 14.

V. Eine Zahl ist eine vollkommene (*numerus perfectus*), wenn sie gleich der Summe aller ihrer Mafse ist, sie selbst ausgeschlossen. Z. B. 28, denn $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Lehrsatz. Ist $2^n - 1$ eine Primzahl, so ist $(2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$ eine vollkommene Zahl.

Beweis. Der 1. Faktor $(2^n - 1)$ enthält, da er Primzahl ist, nur die Mafse 1 und $2^n - 1$, der 2te (2^{n-1}) aber die Mafse 1, 2, 2^2, 2^3, ... 2^{n-1}.

Multipliciert man daher nach §. 25, 3 jede der beiden Zahlen des nachstehenden ersten Faktors mit jeder der n Zahlen des 2. Faktors

$$[1 + (2^n - 1)]\,[1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}] \ \ldots \ (Z)$$

so erhält man sämtliche Zahlen (Mafse), die in $(2^n - 1) \cdot 2^{n-1}$ aufgehen.

Die letzte dieser Zahlen ist hierbei das Produkt aus der letzten Zahl des 1. Faktor und der letzten Zahl des 2. Faktor, also

$$= (2^n - 1) \cdot 2^{n-1}.$$

Dies ist aber die gegebene Zahl selbst.

Ist nun die Summe der sämtlichen, auf diese Weise bestimmten Zahlen ohne diese letzte = der gegebenen Zahl, so ist die gegebene Zahl eine vollkommene.

Um aber die Summe dieser Zahlen (die gegebene selbst inbegriffen) zu bestimmen, ist es nicht nötig, sie einzeln zu addieren, vielmehr mufs das berechnete Produkt Z diese Summe unmittelbar

geben. [Denn bildet man z. B. aus $(a+b)(c+d)$ die 4 Zahlen $ac+bc+ad+bd$, so mufs selbstverständlich das Produkt

$$(a+b)(c+d)$$

die Summe dieser 4 Zahlen sein.]

Das Produkt Z aber ist, weil sich im 1. Faktor $+1-1$ hebt:

$$=2^n(1+2+2^2+\ldots.2^{n-1})=2^n(2^n-1) \text{ [s. §. 61, 3, 2. Zus.]}$$

Da hiervon jene letzte Zahl (d. i. die gegebene Zahl selbst) abzuziehen ist, so ist die Summe der übrigen Mafse:

$$=2^n(2^n-1)-(2^n-1)2^{n-1}=(2^n-1)(2^n-2^{n-1})$$
$$=(2^n-1)\cdot 2^{n-1}(2-1)=(2^n-1)\cdot 2^{n-1}.$$

Dieser Ausdruck aber ist = der gegebenen Zahl, folglich ist dieselbe eine vollkommene Zahl.

VI. Eine Zahl ist eine abundante oder überfliefsende Zahl (*numerus abundans*), wenn die Summe aller Mafse ohne die Zahl selbst gröfser als die Zahl ist.

Beispiele.

12, denn $1+2+3+4+6>12$.
42, „ $1+2+3+6+7+14+21>42$.

$6n$ ist eine abundante Zahl; denn die (nach §. 25, 3) aus $(1+2)(1+3)(1+n)$ gebildeten Zahlen geben summiert:

$$3\cdot 4\cdot(1+n)=12+12n.$$

Da aber die Zahl $6n$ selbst nicht inbegriffen sein soll, so ist die Summe aller übrigen Mafse $=12+12n-6n=6n+12$, also noch um 12 gröfser als die Zahl selbst. Ist n eine Produktzahl, so wird die Summe sogar noch gröfser.

VII. Ist die Summe der Mafse der Zahl a = der Zahl b und die Summe der Mafse der Zahl b = der Zahl a, bei welchen Summen die Zahlen selbst ausgeschlossen sind, so sind a und b amicable, befreundete oder Freundschafts-Zahlen.

Beispiel. 220 und 284; denn:

die Mafse von 220 sind 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, und die Summe derselben = 284;

die Mafse von 284 = 1, 2, 4, 71, 142, und die Summe derselben = 220.

Lehrsatz. Die beiden Zahlen:

a. $2^{n+1}\cdot(18\cdot 2^{2n}-1)$

und b. $2^{n+1}\cdot(3\cdot 2^n-1)(6\cdot 2^n-1)$

sind stets Freundschaftszahlen, wenn

$$3\cdot 2^n-1,\ 6\cdot 2^n-1 \text{ und } 18\cdot 2^{2n}-1$$

Primzahlen sind.

Beweis. Um die Teiler der Zahl a zu finden, hat man zu berücksichtigen, daſs dieselben aus 2 Faktoren:

1) 2^{n+1} und

2) $18 \cdot 2^{2n} - 1$ (Primzahl) bestehen.

Nach §. 25, 3 erhält man mithin die Teiler aus

$$\left[1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n + 2^{n+1}\right] \cdot \left[1 + \left(18 \cdot 2^{2n} - 1\right)\right].$$

Durch die Multiplication der beiden Faktoren erhält man die Summe der Teiler. Sie ist daher:

$$= \left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n+1}\right) \cdot 18 \cdot 2^{2n}$$
$$= 18 \cdot 2^{2n} \cdot \left(2^{n+2} - 1\right). \quad \text{(Siehe §. 61, 3, 2. Zus.)}$$

Da jedoch die Zahl a ausgeschlossen sein soll, so ist die Summe der übrigen Teiler der Zahl a:

$$= 18 \cdot 2^{2n}\left(2^{n+2} - 1\right) - 2^{n+1}\left(18 \cdot 2^{2n} - 1\right)$$
$$= 18 \cdot 2^{2n}\left[2^{n+2} - 1 - 2^{n+1}\right] + 2^{n+1}$$
$$= 18 \cdot 2^{2n}\left[2 \cdot 2^{n+1} - 1 - 2^{n+1}\right] + 2^{n+1}$$
$$= 18 \cdot 2^{2n}\left(2^{n+1} - 1\right) + 2^{n+1}.$$

Diese Summe aber ist der Zahl b gleich, denn diese ist:

$$= 2^{n+1}\left(3 \cdot 2^n - 1\right)\left(6 \cdot 2^n - 1\right) = 2^{n+1}\left(18 \cdot 2^{2n} - 9 \cdot 2^n + 1\right)$$
$$= 18 \cdot 2^{3n+1} - 9 \cdot 2^{2n+1} + 2^{n+1}$$
$$= 18 \cdot 2^{2n} \cdot 2^{n+1} - 9 \cdot 2 \cdot 2^{2n} + 2^{n+1}$$
$$= 18 \cdot 2^{2n}\left(2^{n+1} - 1\right) + 2^{n+1} \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

Die Teiler der Zahl b ergeben sich nach §. 25, 3 aus ihren Faktoren: 2^{n+1}, $3 \cdot 2^n - 1$, $6 \cdot 2^n - 1$, wovon die beiden letzten Primzahlen sind, durch

$$\left[1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n+1}\right]\left[1 + \left(3 \cdot 2^n - 1\right)\right]\left[1 + \left(6 \cdot 2^n - 1\right)\right]$$

und da nicht die Teiler selbst gesucht werden, sondern nur ihre Summe, so ist diese das Produkt der 3 Faktoren:

$$= \left(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n+1}\right) \cdot 3 \cdot 2^n \cdot 6 \cdot 2^n$$
$$= 18 \cdot 2^{2n} \cdot \left(2^{n+2} - 1\right).$$

Da jedoch die Zahl b selbst ausgeschlossen ist, so mag diese noch in der Form A abgezogen werden. Die Summe der übrigen Teiler ist daher:

$$= 18 \cdot 2^{2n}\left(2^{n+2} - 1\right) - \left[18 \cdot 2^{2n}\left(2^{n+1} - 1\right) + 2^{n+1}\right]$$
$$= 18 \cdot 2^{2n}\left[\left(2 \cdot 2^{n+1} - 1\right) - \left(2^{n+1} - 1\right)\right] - 2^{n+1}$$
$$= 18 \cdot 2^{2n} \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1}$$
$$= 2^{n+1}\left(18 \cdot 2^{2n} - 1\right) = \text{der Zahl a.}$$

VIII. Eine Produktzahl, die zu einer andern Produktzahl prim ist, heifst: *numerus primus ad alterum.* Z. B. 36 in bezug auf 55.

7. Eine von den 3 ganzen Zahlen $a+b$, $a-b$, ab ist immer durch 2 teilbar.

Beweis. Ist a oder b gerade, so ist der Satz selbstverständlich. Sind beide ungerade, und zwar $a = 2n+1$, $b = 2r+1$, so ist $a+b = 2n+1+2r+1 = 2n+2r+2 = 2(n+r+1)$ wegen des Faktor 2 eine gerade Zahl, aber auch

$$a-b = 2n+1-(2r+1) = 2(n-r)$$

gerade.

8. Eine von den 3 Zahlen $a+b$, $a-b$, ab ist immer durch 3 teilbar.

Beweis.

1. Fall. Ist a oder $b = 3n$, so ist $ab = 3bn$ oder $= 3an$, folglich durch 3 teilbar.

2. Fall. $a = 3n+1$, $b = 3r+1$. Dann ist $a-b = (3n+1)-(3r+1) = 3(n-r)$, folglich durch 3 teilbar.

3. Fall. $a = 3n+1$, $b = 3r+2$. Dann ist

$$a+b = 3n+1+3r+2 = 3n+3r+3 = 3(n+r+1),$$

folglich durch 3 teilbar.

4. Fall. $a = 3n+2$, $b = 3r+1$. Dann ist

$$a+b = 3(n+r+1)!$$

5. Fall. $a = 3n+2$, $b = 3r+2$. Dann ist

$$a-b = 3(n-r)!$$

Anmerkung. Mit $a = 3n \pm 1$, $b = 3r \pm 1$ kann der Beweis abgekürzt werden (vergl. den 10. Satz).

9. $ab(a^2-b^2)$ ist stets durch 6 teilbar, denn in $ab(a+b)(a-b)$ mufs eine Zahl durch 2, aber auch eine Zahl durch 3 teilbar sein (siehe 7. und 8. Satz).

10. $ab(a^4-b^4)$ ist stets durch 30 teilbar.

Beweis. $ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ ist nach dem 9. Satze durch 6 teilbar. Es fragt sich also, ob die Zahl auch durch 5 teilbar sei. Ist nun a oder b durch 5 teilbar (also a oder b von der Form $5n$), so ist die Teilbarkeit durch 5 selbstverständlich. Mithin ist nur noch nachzuweisen, dafs die Zahl auch durch 5 teilbar ist, wenn a oder b die Form $5n \pm 1$ oder $5n \pm 2$ hat. Nach dem 4. Satze sind hierin die Formen $5n+3$ und $5n+4$ enthalten, da z. B. $5n+3 = 5(n'-1)+3 = 5n'-2$.

Setzt man allgemein $a = 5n + r$, $b = 5n + r'$, wo r und $r' = 1, 2, -1, -2$ sein können, so wird

$$a^2 \pm b^2 = (5n + r)^2 \pm (5n + r')^2$$
$$= 25n^2 + 10nr + r^2 \pm 25n^2 \pm 10nr' \pm r'^2, \text{ d. i.}$$
$$a^2 \pm b^2 = V_5 + (r^2 \pm r'^2) \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

Ist nun $r = \pm k$, $r' = \pm k$, so ist $r^2 - r'^2 = k^2 - k^2 = 0$, folglich A durch 5 teilbar. Ist z. B. $a = 5n - 2$, $b = 5n + 2$, also $r = -2$, $r' = +2$, so ist

$$r^2 - r'^2 = (-2)^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0.$$

Ist aber $r = \pm 1$, $r' = \pm 2$ oder $r = \pm 2$, $r' = \pm 1$, so ist

$$r^2 + r'^2 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 = 5,$$

folglich A durch 5 teilbar.

Ist aber A, d. h. entweder $a^2 + b^2$ oder $a^2 - b^2$ durch 5 teilbar, so mufs es die gegebene Zahl sein.

11. $ab(a^6 - b^6)$ ist stets durch 42 teilbar.

Beweis. Nach dem 9. Satze ist

$$ab(a^6 - b^6) = ab(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$$

durch 6 teilbar. Mithin ist noch zu zeigen, dafs die gegebene Zahl auch durch 7 teilbar ist. Ist a oder b durch 7 teilbar, a oder b also von der Form $7n$, so ist die Teilbarkeit selbstverständlich.

Ist aber a oder b von der Form $7n \pm 1$, $7n \pm 2$, $7n \pm 3$, so ist nachzuweisen, dafs dann $a^6 - b^6 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$, also entweder $a^3 + b^3$ oder $a^3 - b^3$ durch 7 teilbar sein mufs.

Setzt man allgemein $a = 7n + r$, $b = 7n' + r'$, wo r und $r' = 1, 2, 3, -1, -2, -3$ sein können, so wird

$$a^3 \pm b^3 = (7n + r)^3 \pm (7n + r')^3.$$

Da nun die 3. Potenz von $7n + r$ oder $7n + r'$ in den 3 ersten Gliedern den Faktor 7, im letzten Gliede r^3, resp. r'^3 haben mufs, so geht $a^3 \pm b^3$ über in $(V_7 + r^3) \pm (V_7 + r'^3)$, d. i.

$$a^3 \pm b^3 = V_7 + (r^3 \pm r'^3) \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

Ist nun $r = \pm k$, $r' = \pm k$, so ist entweder $r^3 + r'^3$ oder $r^3 - r'^3 = k^3 - k^3 = 0$ und folglich ist A durch 7 teilbar. Ist z. B. $a = 7n - 2$, $b = 7n + 2$, also $r = -2$, $r' = +2$ und mithin $k = 2$, so ist (siehe A):

$$a^3 + b^3 = V_7 + [(-2)^3 + 2^3] = V_7 + (-8 + 8) = V_7.$$

Ist $r = \pm 2$, $r' = \pm 1$ oder $r = \pm 1$, $r' = \pm 2$, so nimmt entweder $r^3 + r'^3$ oder $r^3 - r'^3$ die Form $\pm(2^3 - 1^3) = \pm 7$ an und A ist durch 7 teilbar.

Ist $r = \pm 3$, $r' = \pm 1$ oder $r = \pm 1$, $r' = \pm 3$, so ist entweder $r^3 + r'^3$ oder $r^3 - r'^3 = \pm(3^3 + 1^3) = \pm 28$.

Ist endlich $r = \pm 3$, $r' = \pm 2$ oder $r = \pm 2$, $r' = \pm 3$, so ist entweder $r^3 + r'^3$ oder $r^3 - r'^3 = \pm(3^3 + 2^3) = \pm 35$.

12. $a(a+1)(2a+1)$ ist stets durch 6 teilbar.

Beweis. Eine der Zahlen a und $a+1$ ist immer durch 2 teilbar. Ferner ist eine der Zahlen $a(a+1)(a+2)$ durch 3 teilbar. Ist es nun a und $a+1$ nicht, so mufs es $a+2$ und folglich auch $2(a+2)$ sein. Ist aber $2(a+2)$ durch 3 teilbar, so ist es auch $2(a+2) - 3$, d. i. $2a+1$.

13. $p^2 - 1$ ist stets durch 12 teilbar, wenn p nicht durch 2 oder 3 teilbar ist.

Beweis. Da p nicht durch 2 teilbar sein soll, so hat es die Form $2n+1$ und es ist

$$p^2 - 1 = (2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n,$$

also durch 4 teilbar.

Da ferner p nicht durch 3 teilbar, so hat es entweder die Form $3n+1$ oder $3n-1$; dann aber ist

$$p^2 - 1 = (3n \pm 1)^2 - 1 = 9n^2 \pm 6n + 1 - 1 = 3n(3n \pm 2),$$

folglich durch 3 teilbar.

Die Zahl $p^2 - 1$ ist also stets durch 4 und 3, mithin durch 12 teilbar.

14. Die Summe von 2 auf einander folgenden Potenzen einer Zahl ist stets durch das Produkt aus dieser Zahl und der um 1 gröfseren teilbar.

Beispiel. $2^n + 2^{n+1}$ ist sets durch $2 \cdot 3 = 6$,
$3^n + 3^{n+1}$ „ „ „ $3 \cdot 4 = 12$,
$7^n + 7^{n+1}$ „ „ „ $7 \cdot 8 = 56$ teilbar.

Beweis. $a^n + a^{n+1} = a^n(1+a) = a(a+1) \cdot a^{n-1}$.

15. Ist a prim zu b, so können die beiden Zahlen

$$a^2 + abx + b^2y \text{ und } a + bz$$

von den Zahlen, die gröfser als 1 sind, nur die Zahl $y + z(z - x)$,

oder irgend eines ihrer Mafse, als gemeinsamen Faktor haben (Satz von Schurig).

Beispiel. Die Zahlen $a^2 + 5ab - 7b^2$ und $a + 8b$, wo $x = 5$, $y = -7$, $z = 8$, können (aufser 1) nur die Zahl

$$-7 + 8(8 - 5) = -7 + 8 \cdot 3 = 17$$

als gemeinsamen Faktor haben und keine andere Zahl. Setzt man beliebig $a = 10$, $b = 3$, so ist

$$a^2 + 5ab - 7b^2 = 10^2 + 5 \cdot 10 \cdot 3 - 7 \cdot 3^2 = 187$$

und $a + 8b = 10 + 8 \cdot 3 = 34$. Beide Zahlen 187 und 34 haben in der That nur 17 als gemeinsamen Faktor!

Beweis. Man wende auf die gegebenen Ausdrücke die Kettendivision an:

$$\begin{array}{l} a^2 + abx + b^2y : a + bz = a + b(x - z) \\ \underline{a^2 + abz} \\ \quad ab(x - z) + b^2y \\ \quad \underline{ab(x - z) + b^2z(x - z)} \\ \qquad b^2[y + z(z - x)]. \end{array}$$

Da nun das gemeinsame Mafs von 2 Zahlen auch immer ein gemeinsames Mafs aller bei der Kettendivision vorkommenden Dividenden, Divisoren und Reste sein mufs (s. §. 23, 14, 1. Zus.), so kann das gemeinsame Mafs jener gegebenen Zahlen nur ein gemeinsames Mafs von $a + bz$ und $b^2[y + z(z - x)]$ sein. b kann dies nicht sein, weil a prim zu b ist (s. $a + bz$ mit Rücksicht auf §. 23, 11), folglich kann es nur die Zahl $y + z(z - x)$ und keine andere sein.

Zusatz. Ist a prim zu b, so können die Zahlen $a^2 - ab + b^2$ und $a + b$ nur die Zahl $1 + 1 \cdot [1 - (-1)]$, d. i. 3, und keine andere Zahl als gemeinsamen Faktor haben.

16. Ist $z = a + bx + cx^2$ für $x = m$ (beliebige ganze Zahl) eine Primzahl $= p$, so ist z für $x = m + pk$, wo k eine beliebige ganze, von 0 verschiedene Zahl ist, durch p teilbar.

Beweis. Setzt man $x = m + pk$, so wird:

$$z = a + b(m + pk) + c(m + pk)^2, \text{ d. i.}$$

$$z = a + bm + cm^2 + bpk + 2cmpk + cp^2k^2 \quad .\ .\ .\ .\ (\mathrm{A})$$

Da nun $z = a + bx + cx^2$ für $x = m$ in $a + bm + cm^2 = p$ übergehen soll, so wird aus A:

$$z = p + bpk + 2cmpk + cp^2k^2, \text{ d. i.}$$

$$z = p\left(1 + bk + 2cmk + cpk^2\right)$$

und z ist mithin durch p teilbar.

Es kann daher wohl der Ausdruck

$$a + bx + cx^2 \text{ für } x = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots.$$

bis zu einer ziemlich grofsen Zahl lauter Primzahlen geben, diese Zahlenreihe für x mufs aber nach obigem Satze stets eine begrenzte sein, d. h. man wird bald genug auf einen für x zu substituierenden Wert kommen, der $a + bx + cx^2$ in eine Produktzahl verwandelt.

So findet man z. B. für $z = 41 + x + x^2$ stets Primzahlen, wenn man $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots.$ setzt. Unser Lehrsatz zeigt nun, für welches x das hier gegebene Trinom eine Produktzahl werden mufs. Setzt man nämlich $x = 0$ (also $m = 0$), so wird

$$z = 41 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0^2 = 41,$$

mithin z eine Primzahl ($p = 41$), und folglich mufs z, d. i.

$$41 + x + x^2 \text{ für } x = m + pk = 0 + 41k,$$

also auch für $x = 0 + 41 \cdot 1 = 41$ durch $p = 41$ teilbar sein. In der That geht $41 + x + x^2$ für $x = 41$ in $41 + 41 + 41^2$ über, ein Ausdruck, der offenbar durch 41 teilbar ist.

1. Zusatz. Ist $z = a + bx + cx^2$ für $x = 0$ eine Primzahl, also $z = a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 = a$ eine Primzahl, so mufs z für $x = a$ durch a teilbar sein, denn es ist alsdann:

$$z = a + ba + ca^2 = a(1 + b + ac).$$

Da nun z. B. $z = 41 + x + x^2$ für $x = 0$ die Primzahl 41 giebt, so mufs z für $x = 41$ durch 41 teilbar sein.

2. Zusatz. Ist $b + cx = a$, so geht $z = a + bx + cx^2$ über in $a + (b + cx)x = a + ax = a(1 + x)$ und mithin mufs z durch a teilbar sein.

So mufs z. B. $41 + x + x^2$, wo $a = 41$, $b = 1$, $c = 1$ für $b + cx = a$, d. i. für $1 + 1 \cdot x = 41$, also für $x = 40$ durch $a = 41$ teilbar sein. In der That ist alsdann

$$z = 41 + 40 + 40^2 = 41 + 40(1 + 40) = 41 + 40 \cdot 41$$
$$= 41 \cdot (1 + 40),$$

folglich durch 41 teilbar.

$41 + x + x^2$ kann mithin nur noch für $x = 0$ bis $x = 39$ lauter Primzahlen geben.

17. Bedeuten a, b, c Primzahlen und ist $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma = k^m$, so ist jede der Zahlen α, β, γ durch m teilbar.

Beispiel. 2, 3, 5 sind Primzahlen und $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 360^2$, folglich mufs jeder jener Exponenten 6, 4 oder 2 durch den Exponent 2 der rechten Seite teilbar sein.

Beweis. Enthält die Zahl k: n Faktoren a, ist also k von der Form $a^n d$, so ist $k^m = (a^n d)^m = a^{mn} d^m$ und k^m enthält demnach mn $(=\alpha)$ Faktoren a. Da mn durch m teilbar, so ist also α durch m teilbar.

18. Ist jede der n Zahlen $a, b, c, d \ldots$ durch k teilbar, so ist das Produkt jener n Zahlen durch k^n teilbar.

Beweis. Ist $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$, ..., so ist

$$abcd \ldots = ka' \cdot kb' \cdot kc' \ldots = k^n \cdot a' \cdot b' \cdot c' \ldots,$$

folglich durch k^n teilbar.

Beispiel. Jede der 4 Zahlen 10, 14, 18, 22 ist durch 2 teilbar, folglich mufs $10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22$ durch 2^4, d. i. durch 16 teilbar sein.

19. Ist eine Zahl p durch k teilbar, so ist jede Potenz von p durch eine gleichhohe Potenz von k teilbar.

Beweis. Es sei $p = ka$, folglich ist

$$p^n = (ka)^n = k^n a^n$$

und mithin durch k^n teilbar.

20. Die Summe etlicher Zahlen $a, b, c, d \ldots$ ist durch eine Zahl k nur dann teilbar, wenn die Summe der Reste, welche bei der Division der einzelnen Zahlen $a, b, c, d \ldots$ durch k entstehen, durch k teilbar ist.

Beispiel. 18 : 7, Rest = 4; 22 : 7, Rest = 1; 37 : 7, Rest = 2. Da nun die Summe der Reste, d. i. $4 + 1 + 2 = 7$ durch 7 teilbar ist, so mufs $18 + 22 + 37$ durch 7 teilbar sein.

Beweis. Es sei $\frac{a}{k} = m$ mit dem Reste a', folglich

$$\frac{a}{k} = m + \frac{a'}{k} \text{ oder}$$

$$a = mk + a' \text{ (s. auch den 2. Satz).}$$

Eben so: $b = nk + b'$, $c = pk + c'$ u. s. w.

Damit wird

$$\begin{aligned} a + b + c \ldots &= mk + a' + nk + b' + pk + c' + \ldots \\ &= (m + n + p \ldots) k + (a' + b' + c' + \ldots) \end{aligned}$$

Ist nun $a' + b' + c' + \ldots$ durch k teilbar, d. i.

$$a' + b' + c' \ldots = Sk, \text{ so ist:}$$

$$\begin{aligned} a + b + c \ldots &= (m + n + p \ldots) k + Sk \\ &= (m + n + p \ldots + S) k, \end{aligned}$$

also durch k teilbar.

Anmerkung. Auf diesen Satz gründen sich die in §. 24 enthaltenen Regeln der Teilbarkeit.

21. Das Produkt etlicher Zahlen $a, b, c, d \ldots$ ist durch eine Zahl k nur dann teilbar, wenn das Produkt der Reste, welche bei der Division der Zahlen $a, b, c \ldots$ durch k entstehen, durch k teilbar ist.

Beispiel. 50 : 12, Rest 2; 15 : 12, Rest 3; 26 : 12, Rest 2.

Da das Produkt der Reste: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ durch 12 teilbar ist, so mufs $50 \cdot 15 \cdot 26$ durch 12 teilbar sein.

Beweis.

$a = mk + a'$ (wie im 20. Satze), $b = nk + b'$, $c = pk + c'$, ...

Nun ist
$$a \cdot b = (mk + a')(nk + b')$$
$$= mnk^2 + (a'n + b'm)k + a'b'$$
$$= (mnk + a'n + b'm)k + a'b'$$
die Form also:
$$ab = Mk + a'b'.$$

Ferner ist $ab \cdot c = (Mk + a'b') \cdot (pk + c')$, d. i. (der Form nach) $abc = N \cdot k + a'b'c'$.

In gleicher Weise findet man:
$$abcde \ldots = Pk + a'b'c'd'e' \ldots$$

Ist nun $a'b'c' \ldots$ durch k teilbar, d. i. $a'b'c' \ldots = Rk$, so ist
$$abcde = Pk + Rk = (P + R)k,$$
also durch k teilbar.

22. Ist a prim zu bc, so ist auch a prim zu b (oder a prim zu c).

Beweis. Wäre a nicht prim zu b, sondern hätten a und b das gemeinsame Mafs m, so dafs $a = \alpha m$, $b = \beta m$, so würden sich die Zahlen a und bc durch αm und βmc darstellen lassen. Beide hätten alsdann das gemeinsame Mafs m und folglich wäre a nicht prim zu bc (gegen die Voraussetzung).

23. Ist ac durch b teilbar, a nicht durch b teilbar, so ist c durch b teilbar. Oder: Ist a prim zu b und b ein Mafs von ac, so ist b ein Mafs von c.

Beispiel. Ist $159 \cdot 266$ durch 38 teilbar, 38 prim zu 159, so mufs 266 durch 38 teilbar sein.

I. Specieller Beweis in bezug auf vorst. Beispiel.

Da 38 prim zu 159, so mufs die Kettendivision als letzten Rest (Divisor) 1 geben.

$$
\begin{array}{l}
159:38=4 \\
152 \\
\hline
38:\ 7=5 \\
35 \\
\hline
7:\ 3=2 \\
6 \\
\hline
3:1=3 \\
3 \\
\hline
0.
\end{array}
$$

Es ist also $159-38\cdot 4=7$ (1. Rest),
$38-\ 7\cdot 5=3$ (2. „),
$7-\ 3\cdot 2=1$ (letzter Rest).

Diese Gleichungen mit 266 multipliciert (nach §. 11, 10):

$$159\cdot 266-38\cdot 4\cdot 266=7\cdot 266; \;.\;.\;.\;.\; (A)$$
$$38\cdot 266-\ 7\cdot 5\cdot 266=3\cdot 266; \;.\;.\;.\;.\; (B)$$
$$7\cdot 266-\ 3\cdot 2\cdot 266=1\cdot 266;$$

oder, da der letzte Rest bei relativen Primzahlen stets 1 sein mufs:

$$7\cdot 266-3\cdot 2\cdot 266=266 \;.\;.\;.\;.\; (C)$$

Nun ist nach der Annahme $159\cdot 266$ durch 38 teilbar, $38\cdot 4\cdot 266$ aber wegen des Faktor 38 auch durch 38 teilbar, folglich ist (nach §. 23, 8) auch:

$159\cdot 266-38\cdot 4\cdot 266$, d. i. (s. A)
$7\cdot 266$ durch 38 teilbar . . . . (D).

Da nun $38\cdot 266$ wegen 38, aber auch $7\cdot 5\cdot 266$ (siehe D) durch 38 teilbar, so mufs auch:

$38\cdot 266-7\cdot 5\cdot 266$, d. i. (s. B)
$3\cdot 266$ durch 38 teilbar sein . . . . (E).

Endlich ist $7\cdot 266$, aber auch $3\cdot 2\cdot 266$ (siehe E) durch 38 teilbar, folglich auch:

$7\cdot 266-3\cdot 2\cdot 266$, d. i. (siehe C) 266 durch 38 teilbar.

II. Allgemeiner Beweis.

$a:b=q_1$, Rest r_1, (s. 5. Satz), d. i. $a-bq_1=r_1$;
$b:r_1=q_2$, „ r_2, d. i. $b-r_1q_2=r_2$
$r_1:r_2=q^3$, „ r_3, d. i. $r_1-r_2q_2=r_3$
.
.
.
.
$r_{k-2}:r_{k-1}=q_k$, Rest 1 (letzte Gleichung), d. i.
$r_{k-2}-r_{k-1}q_k=1.$

Diese Gleichungen mit c multipliciert:

$$ac - bq_1 c = r_1 c \quad . \; . \; . \; . \; (A)$$
$$bc - r_1 q_2 c = r_2 c \quad . \; . \; . \; . \; (B)$$
$$r_1 c - r_2 q_3 c = r_3 c \quad . \; . \; . \; . \; (C)$$
$$\vdots$$
$$r_{k-2} c - r_{k-1} q_k c = c \quad . \; . \; . \; . \; (K;\ \text{letzte Gleichung}).$$

Da der Annahme zufolge ac durch b teilbar und $bq_1 c$, des Faktor b wegen durch b teilbar, so ist auch (s. §. 23, 8):

$ac - bq_1 c$, d. i. (s. A.)
$r_1 c$ durch b teilbar . . . . . (M)

Da ferner bc durch b teilbar, $r_1 q_2 c$ durch b teilbar (siehe M), so ist auch:

$bc - r_1 q_2 c$, d. i. (s. B)
$r_2 c$ durch b teilbar . . . . (N)

Nun ist $r_1 c$, desgleichen $r_2 q_3 c$ durch b teilbar (s. N), folglich ist auch:

$r_1 c - r_2 q_3 c$, d. i. (s. C)
$r_3 c$ durch b teilbar.

So weist man nach, dafs alle Glieder der noch auf C folgenden Gleichungen durch b teilbar sind, folglich sind es auch die Glieder $r_{k-2} c$ und $r_{k-1} q_k c$, und mithin ist

$$r_{k-2} c - r_{k-1} q_k c,$$

d. i. (siehe K) c durch b teilbar.

24. Derselbe Satz allgemeiner:

Sind a und b relative Primzahlen und ist sowohl ac als auch b durch m teilbar, so mufs c durch m teilbar sein.

Beispiel. Sind 437 und 45 relative Primzahlen und ist jede der beiden Zahlen 437·78 und 45 durch 3 teilbar, so müssen 78 und 45 durch 3 teilbar sein.

Beweis. Ist m ein gemeinsames Mafs von ac und b, so ist m auch ein Mafs von $bq_1 c$, d. i. (siehe den allgemeinen Beweis des 23. Satzes) m ein Mafs von $r_1 c$ u. s. w.

So beweist man zuletzt, dafs m ein Mafs von c sein mufs.

25. Ist sowohl a als auch c prim zu b, so mufs ac prim zu b sein.

Beweis. Hätten ac und b ein gemeinsames Mafs (> 1), so müfste dieses auch ein gemeinsames Mafs von ac und $bq_1 c$, also

ein Mafs von $ab - bq_1 c$, d. i. von $r_1 c$ (siehe A im allgem. Beweis des 23. Satzes), folglich auch ein Mafs von bc und $r_1 q_2 c$, mithin ein Mafs von $bc - r_1 q_2 c$, d. i. von $r_2 c$ sein (siehe B) u. s. w., zuletzt müfste jenes gemeinsame Mafs auch ein Mafs von c sein (s. K). Dieses Mafs wäre also dann ein Mafs von c und b, was unmöglich ist, weil c prim zu b sein soll.

26. Derselbe Satz allgemeiner:

Ist jede der Zahlen $a, b, c, d \ldots$ prim zu k, so mufs auch das Produkt jener Zahlen, $abcd \ldots$, prim zu k sein.

Beweis. Sind a und b prim zu k, so ist nach dem 25. Satze ab prim zu k. Ist nun sowohl ab als auch c prim zu k, so mufs nach demselben Satze abc prim zu k sein u. s. w.

27. Das Produkt P mehrerer Zahlen $a, b, c, d \ldots$ ist durch eine Primzahl p nur dann teilbar, wenn wenigstens eine jener Zahlen durch p teilbar ist.

Beweis. Da dieser Satz schon aus dem 26. hervorgeht, so mag hier ein 2. Beweis aufgeführt werden.

a lasse durch p dividiert den Rest a', so dass

$$a = pm + a',$$

eben so $$b = pn + b',$$

$$c = pq + c' \text{ u. s. w.},$$

folglich ist: $$P = abc = Qp + a'b'c' \ldots \text{ (vergl. den 21. Satz).}$$

Soll nun P durch p teilbar sein, so müfste es auch $a'b'c' \ldots$ sein. Nun kann aber

1) p nicht unter den Faktoren $a', b', c' \ldots$ vorkommen, weil diese Zahlen (als Reste einer Division durch p) kleiner als p sein müssen;

2) kann p nicht durch Verbindung kleinerer in $a', b', c' \ldots$ u. s. w. enthaltenen Faktoren entstehen, weil p eine Primzahl ist.

Folglich ist das Produkt $a'b'c' \ldots$ und mithin auch P nur dann durch p teilbar, wenn einer jener Reste $= 0$ ist, d. h. wenn einer der Faktoren $a, b \ldots$ durch p teilbar ist.

28. Potenzen der Zahl p sind durch Zahlen $a, b, c \ldots$ nicht teilbar, wenn diese prim zu p sind.

Beweis. Ist p prim zu a, so ist nach dem 25. und 26. Satze auch pp, dann ppp und zuletzt p^n prim zu a, folglich ist p^n nicht durch a teilbar. In bezug auf b u. s. w. ist der Beweis derselbe.

29. Ist jede der Zahlen $A, B, C \ldots$ prim zu jeder der Zahlen $a, b, c \ldots$, so ist auch das Produkt $ABC \ldots$ prim zu dem Produkte $abc \ldots$, z. B. AB prim zu abc.

Beweis. Da A prim zu a, B prim zu a, so ist (nach dem 25. Satze) AB prim zu a;

ferner ist	A prim zu b,	B prim zu b,	folglich	AB prim zu	b;
nun „	a „ „ AB,	b „ „ AB,	„	ab „ „	AB;
ferner	AB „ „ a,	C „ „ a,	„	ABC „ „	a
und	AB „ „ b,	C „ „ b,	„	ABC „ „	b.
Da nun	a prim zu ABC,	b prim zu ABC,	so ist	ab prim zu	ABC;
ferner	A „ „ c,	B „ „ c,	folglich	AB „ „	c;
	AB „ „ c,	C „ „ c,	„	ABC „ „	c;
	c „ „ ABC,	ab „ „ ABC,	„	abc „ „	ABC

u. s. w.

Beispiel. Jede der Zahlen 3, 7, 13 ist prim zu jeder der Zahlen 5, 11 und 17. Folglich ist $3 \cdot 7 \cdot 13$ prim zu $5 \cdot 11 \cdot 17$, oder $3 \cdot 13$ prim zu $5 \cdot 11$ u. s. w.

30. Ist x prim zu y, so ist auch x^m prim zu y^n, insbesondere x^n prim zu y^n.

Beweis. Nach dem 29. Satze ist $ABCD \ldots$ prim zu $abc \ldots$, wenn jeder Faktor des 1. Produkts prim zu jedem des andern. Setzt man nun

$$A = B = C = D \ldots = x, \quad a = b = c \ldots = y,$$

so entsteht:

$$xxxx \ldots \text{ prim zu } yyy \ldots$$

z. B. x^4 „ „ y^3,

x^5 „ „ y^5.

Zusatz. Ist daher $\frac{a}{b}$ ein Bruch, bei welchem a prim zu b ($\frac{a}{b}$ also ein irreducibler Bruch), so kann $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, d. i. $\frac{a^n}{b^n}$ weder eine ganze Zahl sein, noch sich kürzen lassen, weil a^n prim zu b^n sein mufs.

2. Zusatz. Ist jede der Zahlen $a, b, c, \ldots$ prim zu p, so ist daher auch jede der Zahlen a^k, b^m, $c^n \ldots$ prim zu p^1, d. i. zu p und folglich (nach dem 26. Satz) das Produkt $a^k b^m c^n \ldots$ prim zu p.

31. Umkehrung: Ist a^m prim zu b^n, so ist a prim zu b. Insbesondere: Ist a^n prim zu b^n, so ist a prim zu b. Oder: Ist a^n prim zu b, so ist auch a prim zu b.

Beweis. Hätten a und b ein gemeinsames Mafs (>1), so hätten (nach dem 30. Satze) auch a^n und b^n dasselbe gemeinsame Mafs, was gegen die Voraussetzung.

32. Bedeuten a, b, c relative Primzahlen und ist abc eine n^{te} Potenz einer Zahl, z. B. $=k^n$, so sind a, b, c ebenfalls n^{te}, aber nicht höhere Potenzen.

Beweis. Ist $a=\alpha^n$, α eine Primzahl, so ist α^n prim zu b und c, weil a prim zu b und c, und folglich ist auch α prim zu b und c (s. 31. Satz). Mithin können b und c: α nicht enthalten. Daher kann auch in $\alpha^n bc$ $\left(=abc=k^n\right)$: α nicht öfter als $n$mal vorkommen.

33. Haben a^m und b^n ein gemeinsames Mafs (>1), so müssen a und b ein gemeinsames Mafs (>1) haben.

Beweis. Hätten a und b kein gemeinsames Mafs, so wäre auch (siehe 30. Satz) a^m prim zu b^n, was gegen die Voraussetzung.

34. Ist a durch b und auch durch c teilbar, b aber prim zu c, so ist a durch das Produkt bc teilbar.

Beweis. Ist a durch b teilbar, so kann man $a=bm$ setzen. Da nun a durch c, d. i. bm durch c teilbar und b prim zu c ist, so mufs (nach Satz 23) m durch c teilbar sein. Da nun $\frac{m}{c}$ teilbar, so ist auch $\frac{b}{b}\cdot\frac{m}{c}$, d. i. $\frac{bm}{bc}$ oder $\frac{a}{bc}$ teilbar.

35. Ist a durch b, c, d, e teilbar und sind b, c, d, e unter sich relative Primzahlen, so ist a durch $bcde$ teilbar.

Beweis. a ist nach dem 34. Satze durch (bc), nach der Voraussetzung aber auch durch d teilbar, folglich ist (s. Satz 34) a durch $(bc)\cdot d$, d. i. durch bcd teilbar u. s. w.

36. Ist a durch b und c teilbar und haben b und c ein gröfseres gemeinsames Mafs als 1, so mufs a nicht unbedingt durch bc teilbar sein.

Beweis. Ist das gemeinsame Mafs von b und $c=m$ (>1), so dafs $b=\beta m$, $c=\gamma m$, so ist der Voraussetzung zufolge sowohl $\frac{a}{\beta m}$, als auch $\frac{a}{\gamma m}$ teilbar. Wäre nun a durch bc, d. i. durch

$\beta m \cdot \gamma m$ oder $\beta\gamma m^2$ teilbar, so müſste a also auch durch βm^2 und γm^2 teilbar sein, während doch nur a durch βm und γm teilbar sein soll. (Vergl. §. 23, 19).

Beispiel. 120 ist durch 6 und durch 8, nicht aber durch 6 · 8, d. i. durch 48 teilbar.

37. Dividiert man 2 Zahlen a und b durch ihr gröſstes gemeinsames Maſs, so sind die Quotienten relative Primzahlen.

Beweis. Ist $a = mx$, $b = my$ und wären x und y keine relativen Primzahlen, hätten sie vielmehr das gemeinsame Maſs n, so daſs z. B. $x = nx'$, $y = ny'$, so wäre

$$a = m \cdot x = m \cdot nx' = mnx' \text{ und}$$
$$b = m \cdot y = m \cdot ny' = mny'.$$

Dann aber hätten die Zahlen a und b: mn als gröſstes gemeinsames Maſs, was gegen die Annahme, daſs nur m das gröſste gemeinsame Maſs sein soll.

Beispiel. Das gröſste gemeinsame Maſs von 48 und 84 ist 12, folglich müssen $\frac{48}{12}$ und $\frac{84}{12}$, d. i. 4 und 7, relative Primzahlen sein.

38. Das gröſste gemeinsame Maſs von a und b bleibt auch das gröſste gemeinsame Maſs von b und ac (oder von b und $\frac{a}{c}$), wenn c prim zu b ist.

Beispiel. 90 und 70 haben das gröſste gemeinsame Maſs 10, folglich haben 3 · 90 und 70 (oder $\frac{90}{3}$ und 70) noch immer 10 als gröſstes gemeinsames Maſs, weil 3 prim zu 70 ist.

Beweis. Ist m das gröſste gemeinsame Maſs von a und b, daher $a = mx$, $b = my$, so sind (nach Satz 37) x und y relative Primzahlen. Da nun c prim zu b $(= my)$, so ist auch (s. Satz 22) c prim zu y und weil auch x prim zu y, so ist (nach Satz 25) cx prim zu y, folglich ist m das gröſste gemeinsame Maſs von cmx und my, d. i. von ac und b.

39. Jede Produktzahl läſst sich nur auf eine einzige Art in einfache Faktoren (immer nur als Produkt derselben Primzahlen) darstellen.

Beispiel.

$$360 = 36 \cdot 10 = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

1. Beweis (in bezug auf vorstehendes Beispiel).

Durch eine andere Zerlegung als die vorstehende kann z. B. der Faktor 2 nicht weniger oft oder öfter in 360 vorkommen. Denn käme er z. B. 4mal darin vor, so müſste 360 durch

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, \text{ d. i. } \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \text{ oder } \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2}$$

teilbar sein, was nach dem 25. Satze unmöglich ist. Da ferner nach demselben Satze $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ durch keine von 2, 3 und 5 verschiedene Primzahl teilbar sein kann, so kann in 360 keine andere Primzahl als 2, 3 und 5 vorkommen.

2. (allgemeiner) Beweis.

Es sei die gegebene Produktzahl $P = a^m b^n c^p$, so kann sie nach dem 27. Satze nicht ein Produkt anderer Primfaktoren als a, b, c sein. Sie kann aber auch nicht mehr noch weniger als die angedeutete Anzahl dieser einzelnen Primzahlen (a, b, c) enthalten, denn wäre $a^m b^n c^p = a^q b^r c^s$ und z. B. $q < m$, so müſste auch (jene Gleichung durch a^q dividiert):

$$\frac{a^m b^n c^p}{a^q} = b^r c^s, \text{ d. i.}$$

$$a^{m-q} b^n c^p = b^r c^s$$

sein, was nach Satz 28 unmöglich ist.

40. Eine Produktzahl a ist durch eine Zahl b nur dann teilbar, wenn die sämtlichen Faktoren von b in a vorkommen und wenn jeder dieser Faktoren in a wenigstens eben so oft als in b vorkommt. Oder:

> Jede Produktzahl a ist allein durch die in ihr enthaltenen Primfaktoren a, b, c und durch alle aus denselben zu bildenden Produkte teilbar.

Beweis. Nach Satz 25 kann ein Produkt von mehreren Primzahlen nicht durch eine von denselben verschiedene Primzahl teilbar sein.

Beispiel. $360 \left(= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5\right)$ ist durch $24 \left(= 2^3 \cdot 3\right)$, nicht aber durch $48 \left(= 2^4 \cdot 3\right)$ und nicht durch $63 \left(= 3^2 \cdot 7\right)$ teilbar.

41. Jede Zahl ist entweder eine Primzahl oder durch eine Primzahl teilbar.

Beweis.

Wäre a keine Primzahl, sondern durch b teilbar,
wäre ferner b „ „ „ „ c „
„ „ c „ „ „ „ d „ u. s. w.,

so wäre also a gröfser als b, b gröfser als c, c gröfser als d u. s. w. Diese Reihe $a, b, c, d \ldots$ kann aber nicht unendlich sein, sondern mufs mit einer Primzahl aufhören (weil selbst zwischen a und der kleinsten Primzahl 2 nur eine endliche Anzahl von Zahlen liegt), dann aber ist (siehe §. 23, 12) jede der Zahlen d, c, b, a durch diese Primzahl teilbar.

42. Liegt die Zahl a zwischen n^2 und $(n+1)^2$, und ist sie durch die Primzahlen, welche in der Zahlenreihe $2, 3, \ldots n$ enthalten sind, nicht teilbar, so ist sie eine Primzahl.

Beweis. Wäre a durch eine Primzahl, die $> n$, z. B. durch die Primzahl $n+p$ teilbar, so wäre $a = (n+p)r$ und mithin müfste a durch r teilbar sein. Nun ist

$$r = \frac{a}{n+p} \text{ und da } a < (n+1)^2, \text{ so ist}$$

$$r < \frac{(n+1)^2}{n+p} \quad \left[\text{Da nun } \frac{(n+1)^2}{n+1} = n+1\right.$$

$$\text{folglich } \frac{(n+1)^2}{n+2} < n+1 \text{ und desto mehr}$$

$$\left.\frac{(n+1)^2}{n+3} < n+1 \text{ u. s. w., so ist}\right]$$

$$r < n+1,$$

also wäre r eine der Zahlen $2, 3 \ldots n$, d. h. a wäre durch eine dieser Zahlen teilbar, was gegen die Voraussetzung ist, und mithin kann a nicht durch eine Primzahl teilbar sein, die $> n$. (Vergl. §. 24, 21).

Beispiel. 4877 liegt zwischen

$$69^2 \ (=4761) \text{ und } 70^2 \ (=4900)$$

und ist durch keine der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13 bis 67 teilbar, folglich mufs die gegebene Zahl eine Primzahl sein.

43. Sind m und n zwei absolute Primzahlen, so giebt es $(m-1)(n-1)$ Zahlen, welche kleiner als mn und zu mn relative Primzahlen sind.

Beispiel. 11 und 19.

Es giebt $(11-1)(19-1) = 10 \cdot 18 = 180$ Zahlen, welche kleiner als $11 \cdot 19 = 209$ und prim zu 209 sind.

Beweis. Von den Zahlen $1, 2, 3$ bis mn sind die $n-1$ Zahlen $1 \cdot m, 2m, 3m \ldots$ bis $(n-1)m$ durch m teilbar und kleiner als mn. Eben so sind die $m-1$ Zahlen $1 \cdot n, 2n, 3n \ldots$ bis $(m-1)n$ kleiner als mn und gleichfalls nicht relativ prim zu mn. Aufserdem ist 1 nicht relativ prim zu mn. Es giebt also $n-1$ Zahlen, dann $m-1$ Zahlen und endlich die Zahl 1, welche kleiner als mn und nicht relativ prim zu ma sind. Folglich giebt es:

$$\begin{aligned} &mn-(n-1)-(m-1)-1 \\ &= mn-m-n+1 \\ &= m(n-1)-(n-1) \\ &= (m-1)(n-1) \text{ Zahlen,} \end{aligned}$$

welche relativ prim zu mn sind.

44. Allgemeiner:

Ist die Zahl N durch die Primzahlen $a, b, c \ldots$ teilbar, so giebt es

$$\frac{N}{abc\ldots\ldots} \cdot (a-1)(b-1)(b-1)\ldots\ldots$$

Zahlen, welche kleiner als N und prim zu N sind. (Satz von Gaufs).

Beweis.

I. Unter den Zahlen 1, 2, 3 bis N sind die Zahlen a, $2a$, $3a \ldots\ldots \frac{N}{a} \cdot a$, deren Anzahl $= \frac{N}{a}$, durch a teilbar, folglich giebt es $N - \frac{N}{a} = \frac{N}{a}(a-1)$ Zahlen, die nicht durch a teilbar sind.

II. In den durch b teilbaren Zahlen: $b, 2b, 3b \ldots\ldots - \frac{N}{b} \cdot b$ giebt es nun eben so viele durch a nicht teilbare Zahlen, als es in der Reihe $1, 2, 3 \ldots\ldots \frac{N}{b}$ giebt, weil b prim zu a ist, also der Faktor b aus jener Reihe weggelassen werden kann. Da es nun von $1, 2, 3 \ldots$ bis N: $\frac{N}{a}(a-1)$ Zahlen giebt, die nicht durch a teilbar sind, so giebt es $\left(\frac{N}{b}\right.$ an die Stelle von N gesetzt$\left.\right)$ in der Reihe $1, 2, 3 \ldots\ldots \frac{N}{b}$: $\frac{\frac{N}{b}}{a}(a-1) = \frac{N}{ab}(a-1)$ Zahlen, die durch a nicht teilbar sind. In den durch b teilbaren Zahlen: $b, 2b, 3b, \ldots\ldots N$ giebt es also $\frac{N}{ab}(n-1)$ Zahlen, die durch a nicht teilbar sind. In den durch b nicht teilbaren Zahlen mufs es aber eben so viele, nämlich $\frac{N}{ab}(a-1)$ Zahlen geben, die durch b teilbar sind, denn es sind dies dieselben Zahlen $b, 2b \ldots\ldots$ Will man nun die Anzahl der Zahlen haben, welche von 1 bis N nicht durch a und b teilbar sind, so hat man offenbar von den durch a nicht teilbaren Zahlen, deren Anzahl $\frac{N}{a}(a-1)$, noch die

$\frac{N}{ab}(a-1)$ Zahlen abzuziehen, welche durch b teilbar sind. Mithin giebt es

$$\frac{N}{a}(a-1)-\frac{N}{ab}(a-1)=\frac{N}{ab}[b(a-1)-(a-1)]$$
$$=\frac{N}{ab}(a-1)(b-1)$$

Zahlen, die durch a und b nicht teilbar sind.

III. In gleicher Weise ergiebt sich, daſs unter den durch a und b nicht teilbaren Zahlen eben so viele durch c teilbare Zahlen giebt, als es in der Reihe $c, 2c, 3c, \ldots \frac{N}{c}\cdot c$ durch a und b nicht teilbare Zahlen giebt. Aber eben so viele durch a und b nicht teilbare Zahlen enthält die Reihe $1, 2, 3 \ldots \frac{N}{c}$, weil c prim zu a und b ist. Mithin sind noch

$$\frac{\frac{N}{c}}{ab}(a-1)(b-1)=\frac{N}{abc}(a-1)(b-1)$$

Zahlen abzuziehen. Folglich giebt es

$$\frac{N}{ab}(a-1)(b-1)-\frac{N}{abc}(a-1)(b-1)$$
$$=\frac{N}{abc}[c(a-1)(b-1)-(a-1)(b-1)]$$
$$=\frac{N}{abc}(a-1)(b-1)(c-1)$$

Zahlen, die durch a, b und c nicht teilbar sind u. s. w. u. s. w.

Beispiel. In $90=2\cdot 3^2\cdot 5$ giebt es

$$\frac{90}{2\cdot 3\cdot 5}(2-1)(3-1)(5-1)=3\cdot 1\cdot 2\cdot 4=24$$

Zahlen, die < 90 und prim zu 90 (also nicht durch 2, 3, 5 teilbar) sind. Es sind dies: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 89.

Zusatz. Besteht p aus denselben Primfaktoren wie pr, so muſs die Anzahl der Zahlen, welche prim zu pr sind, $r$mal so groſs sein, als die Anzahl der Zahlen, welche prim zu p sind.

Beispiel. $3240=2^3\cdot 3^4\cdot 5$ und $90=2\cdot 3^2\cdot 5$ bestehen aus denselben Primfaktoren 2, 3, 5. Da es nun in

$$3240: \quad \frac{3240}{2\cdot 3\cdot 5}(2-1)(3-1)(5-1)$$

Zahlen giebt, die prim zu 3240 sind, so mufs diese Anzahl offenbar:

$$\frac{3240}{2\cdot 3\cdot 5}(2-1)(3-1)(5-1):\frac{90}{2\cdot 3\cdot 5}(2-1)(3-1)5(-1)$$

$$=\frac{3240}{90},\ \text{d. i.}$$

$$\frac{2^3\cdot 3^4\cdot 5}{2\cdot 3^2\cdot 5}=2^2\cdot 3^2=36\,\text{mal so grofs sein.}$$

45. In einem Produkt $ABC\ldots.$ mögen

M		N
α der Faktoren durch	die Primzahl	a
α' „ „ „		a^2
α'' „ „ „		a^3 u. s. w.,
β „ „ „	die Primzahl	b
β' „ „ „		b^2 u. s. w.,
γ „ „ „	die Primzahl	c u. s. w.

teilbar sein.

Ferner mögen in dem Produkte $A'B'C'\ldots.$ durch dieselben Potenzen (siehe senkrecht unterhalb N) mindestens eben so viele Faktoren teilbar sein (die Zahlen M für $A'B'C'\ldots.$. also entweder gröfser als die Zahlen M für ABC oder gleich denselben), dann ist das Produkt $A'B'C'\ldots.$ durch $ABC\ldots.$ teilbar, auch wenn die Anzahl der Faktoren jenes Produkts $A'B'C'\ldots.$ kleiner sein sollte. (Satz von Gaufs).

Beispiel.

In 100, 140, 350 sind		in 14, 20, 50, 175 sind	
M	N	M	N
3 Faktoren durch	2	3 Faktoren durch	2
2 „ „	2^2	1 Faktor „	2^2
3 „ „	5	3 Faktoren „	5
2 „ „	5^2	2 „ „	5^2
2 „ „	7	2 „ „	7 teilbar.

Da für dieselben Potenzen unterhalb N das M links nicht kleiner als rechts ist, so mufs $100\cdot 140\cdot 350$ durch $14\cdot 20\cdot 50\cdot 175$ teilbar sein.

Beweis.

In $ABC\ldots.$ seien

α Faktoren durch a, jedoch nicht durch a^2,
α' „ „ a^2, „ „ „ a^3,
α'' „ „ a^3, „ „ „ a^4 teilbar.

Dann sind $\alpha + \alpha' + \alpha''$ Faktoren durch a,
$\alpha' + \alpha''$ „ „ a^2,
α'' „ „ a^3 teilbar

und das Produkt enthält im ganzen $\alpha + 2\alpha' + 3\alpha''$ Faktoren a.

Eben so seien in $A' B' C' \ldots$.
α_0 Faktoren durch a, jedoch nicht durch a^2,
α_1 „ „ a^2, „ „ „ a^3,
α_2 „ „ a^3, „ „ „ a^4 teilbar.

und es sei $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ nicht $< \alpha + \alpha' + \alpha''$
$\alpha_1 + \alpha_2$ „ $< \alpha' + \alpha''$
α_2 „ $< \alpha''$

folglich ist $\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ nicht $< \alpha + 2\alpha' + 3\alpha''$, d. h. $A' B' C'$ enthält **mindestens** eben so viel Faktoren a als ABC.

Eben so enthält

$A' B' C'$ mindestens eben so viel Faktoren b als ABC,
$A' B' C'$ „ „ „ „ „ c „ „ .

Daher ist $A' B' C'$ durch ABC teilbar. (Vergl. den Beweis zum 1. Beisp. des §. 27).

46. Sind unter den n Zahlen: $1, 2, 3 \ldots n$ b Zahlen durch m teilbar, so sind in den n Zahlen:

$$a, a+1, a+2, \ldots [a+(n-1)]$$

entweder b oder $b+1$ Zahlen durch m teilbar. (Satz von Gaufs).

Beispiel. Von den Zahlen $1, 2, 3 \ldots 32$ sind 6 durch 5 teilbar, nämlich 5, 10, 15, 20, 25, 30. Vermehrt man die gegebenen Zahlen 1 bis 32 um irgend eine Zahl, so müssen von der neuen Zahlenreihe 6 oder 7 Zahlen durch 5 teilbar sein. Um 27 vermehrt erhält man 28, 29, ... 59, von welchen Zahlen 6 durch 5 teilbar sind.

Vermehrt man die gegebenen Zahlen um 38, so erhält man 39, 40, 41, ... 70, wovon 7 Zahlen durch 5 teilbar sind.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $n = bm$ oder um etwas gröfser als bm, jedoch noch nicht $(b+1)m = bm + m$. Mithin kann man

$$n = bm + d \ldots\ldots (A)$$

setzen, wo $d < m$, also eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots (m-1)$ ist.

Dividiert man ferner a durch m so, dafs man im Falle des Nichtaufgehens nicht die unmittelbar in $\frac{a}{m}$ enthaltene ganze Zahl als Quotient nimmt, sondern die um 1 höhere ganze Zahl γ, um einen negativen Rest zu erhalten, der $< m$ ist, so erhält man:

$$\frac{a}{m} = \gamma - \frac{r}{m} \text{ oder}$$

$$a = \gamma m - r, \ldots\ldots (B)$$

wo also $r < m$ ist, aber auch $= 0$ sein kann.

Da nun $a + r = \gamma m$, so ist $a + r$ die 1. durch m teilbare Zahl der Reihe a, $a + 1$, $a + 2, \ldots$.

Addiert man zu dieser 1. Zahl $a + r$ die Zahl m, so erhält man die 2. durch m teilbare Zahl. Es ist also:

$$a + r + m = \gamma m + m \quad \text{die 2.,}$$
$$a + r + 2m = \gamma m + 2m \quad \text{„ 3.,}$$
$$\vdots$$
$$a + r + (b - 1)m = \gamma m + (b - 1)m = \gamma m + bm - m \ldots\ldots (C)$$

die b^{te} durch m teilbare Zahl der Reihe

$$a, a + 1, a + 2 \ldots\ldots (a + n - 1).$$

Weil aber (s. A.) $n = bm + d$, so ist die letzte Zahl dieser Reihe:

$$\begin{aligned} a + n - 1 &= a + bm + d - 1, \text{ oder (s. B)} \\ &= \gamma m - r + bm + d - 1 \\ &= \gamma m + bm - m + (m + d - 1 - r) \text{ d. i. (s. C)} \end{aligned}$$

$$a + n - 1 = \text{der } b^{\text{ten}} \text{ durch } m \text{ teilb. Zahl} + [m + d - 1 - r] \ldots (D)$$

Da $m > r$ und $d \gtreqless 0$, so ist [ ] nicht negativ. Ist nun dieser Ausdruck [ ] $= 0$, so geht D über in:

$$a + n - 1 = \text{der } b^{\text{ten}} \text{ durch } m \text{ teilbaren Zahl} + 0, \text{ d. h.}$$

die letzte Zahl $a + n - 1$ ist die b^{te} durch m teilbare Zahl der Reihe $a, a + 1, \ldots\ldots (a + n - 1)$.

Es kann aber auch $d \gtreqless 1 + r$ sein, dann ist

$$[m + r - 1 - d] \gtreqless m$$

und D geht über in $a + n - 1 =$ der b^{ten} durch m teilbaren Zahl, $+$ eine Zahl, die $\gtreqless m$ ist, folglich kommt zur b^{ten} durch m teilbaren Zahl noch eine, die $b + 1^{\text{te}}$ durch m teilbare Zahl hinzu.

Jedoch ist eine $b + 2^{\text{te}}$ unmöglich, weil [ ] am gröſsten wird, wenn d am gröſsten und r am kleinsten, d. i. $d = m - 1$ und $r = 0$ ist. Alsdann geht D über in:

$$\begin{aligned} a + n - 1 &= \text{der } b^{\text{ten}} \text{ durch } m \text{ teilb. Zahl} + [m + m - 1 - 1 - 0] \\ &= \text{„ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „} + 2m - 2 \end{aligned}$$

und es ist die letzte Zahl $a + n - 1$ immer noch um 2 kleiner als die $b + 2^{\text{te}}$ Zahl.

1. Zusatz. Dem vorstehenden Satze zufolge muſs jede Zahl, die in $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n$ enthalten ist, eben so oft oder sogar noch

einmal mehr in $a(a+1)\ldots(a+n-1)$ enthalten sein, folglich mufs das Produkt $a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)$ durch $1\cdot 2\cdot 3\ldots n$ teilbar sein. Eben so mufs

$$\frac{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

teilbar sein, weil auch hier der Zähler aus n auf einander folgenden Zahlen besteht.

Beispiel. $\frac{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 21}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ mufs teilbar sein.

2. Zusatz. Ist $n > a+b+c+\ldots$, so ist:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{(1\cdot 2\ldots a)(1\cdot 2\ldots b)(1\cdot 2\ldots c)\ldots} \text{ teilbar.}$$

Beispiel.
$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11}{(1\cdot 2\ldots 5)\cdot(1\cdot 2\ldots 4)\cdot(1\cdot 2)}, \text{ d. i.}$$
$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2}$$
mufs teilbar sein, weil $5+4+2=11$.

Beweis. Auch wenn n nicht $>$, sondern nur $= a+b+c$ ist, kann
$$1\cdot 2\ldots n = 1\cdot 2\ldots(a+b+c) \text{ gedacht werden als}$$
$$1\cdot 2\cdot 3\ldots a\cdot(a+1)(a+2)\ldots(a+b)\cdot(a+b+1)\ldots(a+b+c)$$
[z. B. $1\cdot 2\cdot 3\ldots(8+5+2)$
$= 1\cdot 2\cdot 3\ldots 8\cdot(8+1)\cdot(8+2)\cdot(8+3)\cdot(8+4)(8+5)\cdot(8+5+1)(8+5+2)$],
dann aber ist
$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots a(a+1)(a+2)\ldots(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+c)}{1\cdot 2\ldots a\cdot 1\cdot 2\ldots b\cdot 1\cdot 2\ldots c}$$
$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots a}{1\cdot 2\ldots a}\cdot\frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+b)}{1\cdot 2\ldots b}\cdot\frac{(a+b+1)\ldots(a+b+c)}{1\cdot 2\ldots c},$$
jeder dieser 3 Brüche aber ist nach dem 1. Zusatze teilbar.

3. Zusatz. $a(a+1)(a+2)$ mufs für die gerade Zahl a stets durch 24 teilbar sein. Denn in

$$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = 2\cdot 2\cdot \frac{n(2n+1)(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

ist 4 und im Zähler aufserdem $2\cdot 3$ enthalten (s. auch den 12. Satz).

47. Ist d prim zu p, so sind die Reste $r_1, r_2, r_3 \ldots . r_p$, welche entstehen, wenn jede der p Zahlen einer in gleicher Differenz d fortschreitenden Reihe, z. B.

$d, 2d, 3d, \ldots . pd$ oder allgemeiner $a, a+d, a+2d, \ldots . [a+(p-1)d]$

durch p dividiert wird, alle unter einander verschieden.

Beispiel. 11 ist prim zu 7, folglich müssen die 7 Zahlen:

$$18,\ 18+11,\ 18+2\cdot 11,\ 18+3\cdot 11,\ 18+4\cdot 11,\ 18+5\cdot 11,\ 18+6\cdot 11, \text{ d. i.}$$
$$18,\quad 29,\quad 40,\quad 51,\quad 62,\quad 73,\quad 84$$

durch 7 dividiert, lauter verschiedene Reste geben, nämlich ($18:7=2$, Rest 4; $29:7=4$, Rest 1 . . . ., oder):

$$4,\quad 1,\quad 5,\quad 2,\quad 6,\quad 3,\quad 0.$$

Beweis. Angenommen, es könnten in der allgemeinen Reihe

$$a,\ a+d,\ a+2d, \ldots .$$

von p auf einander folgenden Zahlen, 2 Zahlen $a+md$ und $a+nd$ (wo also sowohl m als auch $n<p$) durch p dividiert, denselben Rest r geben, so wäre

$$\frac{a+md}{p} = q' + \frac{r}{p} \quad (q' \text{ irgend eine ganze Zahl als Quotient})$$
$$\frac{a+nd}{p} = q'' + \frac{r}{p}$$

oder: $a+md = q'p+r$

$a+md = q'p+r$ (wiederholt)

$a+nd = q''p+r$ subtr.:

$(m-n)d = (q'-q'')p$ und folglich

$$\frac{(m-n)d}{p} = q'-q''.$$

$\frac{(m-n)d}{p}$ müfste also der ganzen Zahl $q' - q''$ gleich sein, was unmöglich ist, da d prim zu p und $m-n$ durch p nicht teilbar sein kann, weil $m - n < p$. Folglich sind gleiche Reste unmöglich.

Zusatz. Da p verschiedene Reste vorhanden sind und jeder Rest $< p$ ist, so müssen dieselben offenbar mit den Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots . (p-1)$ identisch sein. Selbstverständlich treten sie nicht in dieser Ordnung der natürlichen Zahlenreihe auf. (Vergl. die Reste 4, 1, 5 .... im vorst. Beisp.)

48. Ist p eine Primzahl und a prim zu p, so ist $a^{p-1} - 1$ durch p teilbar. (Fermat's Lehrsatz — 1640).

1. Beispiel. 4 ist prim zu 3 und 3 eine Primzahl, folglich ist $4^{3-1} - 1$, d. i. $4^2 - 1$ oder 15 durch 3 teilbar.

2. Beispiel. 7 ist eine Primzahl, 5 prim zu 7, folglich ist $5^{7-1} - 1$, d. i. $5^6 - 1$ oder 15624 durch 7 teilbar.

3. Beispiel. 64 ist prim zu 47, 47 eine Primzahl, folglich ist $64^{47-1} - 1$, d. i. $64^{46} - 1$ durch 47 teilbar.

Beweis. a gebe durch p dividiert den Rest r_1, so dafs also

$$\frac{a}{p} = q + \frac{r_1}{p} \text{ oder}$$

$$a = qp + r_1 \text{ oder (wenn ein Vielfaches}$$

von p mit V_p bezeichnet wird — siehe §. 23, 7):

$$a = V_p + r_1.$$

Eben so gebe $2a$ durch p dividiert den Rest r_2 u. s. w.

Folglich ist:

$$\begin{aligned} a &= V_p + r_1 \\ 2a &= V_p + r_2 \\ 3a &= V_p + r_3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ (p-1)a &= V_p + r_{p-1} \end{aligned}$$

Multipliciert man diese Gleichungen nach §. 11, 10, Zus. und behandelt man hierbei die Vielfachen von p in derselben Weise, wie die Vielfachen von k im Beweise zum 21. Satze, so erhält man:

$$a \cdot 2a \cdot 3a \ldots . \cdot (p-1)a = V_p + [r_1 r_2 r_3 \ldots . r_{p-1}], \text{ d. i.}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (p-1) \cdot a^{p-1} = V_p + [r_1 r_2 r_3 \ldots . r_{p-1}].$$

Nach dem 47. Satze aber ist

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \ldots \ldots r_{p-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (p-1), \text{ folglich:}$$

$$[1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (p-1)] \cdot a^{p-1} = V_p + [1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (p-1)], \text{ daher}$$

$$[1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (p-1)] \cdot a^{p-1} - [1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (p-1)] = V_p, \text{ d. i.}$$

$[1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (p-1)] \cdot (a^{p-1} - 1)$ durch p teilbar.

Nun kann aber $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (p-1)$ nicht durch p teilbar sein, weil es keiner der Faktoren $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (p-1)$ ist (s. 27. Satz), folglich mufs der andere Faktor $a^{p-1} - 1$ (nach dem 23. Satze) durch p teilbar sein.

49. Ist m prim zu p und giebt es n Zahlen $(a, b, c, d \ldots . l)$, die kleiner als p und prim zu p sind (wobei 1 als prim zu p gelten soll), so ist

I. $m^n - 1$ durch p teilbar.

Multipliciert man ferner jede der n Zahlen mit m, wodurch man die Produkte

$$am, \; bm, \; cm, \; dm, \ldots . \; lm$$

erhält und geben diese Produkte durch p dividiert resp. die n Reste:

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \; \ldots . \; \lambda,$$

so gelten noch folgende Sätze:

II. Die n Reste $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \lambda$ sind alle unter sich verschieden.

III. Jeder dieser n Reste ist prim zu p.

1. Beispiel. 8 ist prim zu 9. Es giebt 6 Zahlen (1, 2, 4, 5, 7, 8) die kleiner als 9 und prim zu 9 sind. Folglich ist

1) $8^6 - 1$, d. i. 262143 durch 9 teilbar.

2) $8 \cdot 1$, $8 \cdot 2$, $8 \cdot 4$, $8 \cdot 5$, $8 \cdot 7$, $8 \cdot 8$, d. i.
8, 16, 32, 40, 56, 64 durch 9 dividiert, giebt die Reste:
8, 7, 5, 4, 2, 1, die alle unter sich verschieden sind.

3) Jeder dieser Reste ist prim zu 9.

2. Beispiel. 25 ist prim zu 8. Es giebt 4 Zahlen (1, 3, 5, 7), die kleiner als 8 und prim zu 8 sind. Folglich ist:

1) $25^4 - 1$, d. i. 390624 durch 8 teilbar.

2) $25 \cdot 1$, $25 \cdot 3$, $25 \cdot 5$, $25 \cdot 7$ durch 8 dividiert, bleiben die Reste:
1, 3, 5, 7, die unter sich verschieden.

3) Jeder dieser Reste ist prim zu 8.

Beweis ad II.

Angenommen, 2 jener Vielfachen von m, z. B. bm und dm, liefsen durch p dividiert gleiche Reste r, so wäre:

$$\frac{bm}{p} = q' + \frac{r}{p}$$
$$\frac{dm}{p} = q'' + \frac{r}{p}$$

$$\text{oder } bm = q'p + r$$
$$dm = q''p + r \text{ subtr.}$$

$$(b - d)m = (q' - q'')p, \text{ daher}$$
$$\frac{(b-d)m}{p} = q' - q''.$$

Es müfste also $\frac{(b+d)m}{p}$ = der ganzen Zahl $q' - q''$, d. h. $(b-d)m$ durch p teilbar sein, was unmöglich ist, weil m prim zu p und b und $d < p$. Mithin sind gleiche Reste unmöglich.

Beweis ad III. Wäre irgend ein Rest, z. B. β (entstanden aus $bm:p$) nicht prim zu p, sondern hätten beide ein gemeinsames Mafs, so müfste auch bm dieses Mafs haben. Denn

$$\frac{mb}{p} = q + \frac{\beta}{p}$$
$$mb = qp + \beta.$$

Das Mafs von p und β, also auch von qp und β wäre ein Mafs von mb (s. §. 23, 8).

Dies aber ist unmöglich, weil sowohl m als auch β prim zu p ist (s. 25. Satz).

Zusatz. Da alle n Reste (s. II) unter sich verschieden, zugleich aber alle (nach III) prim zu p, ferner sowohl $\alpha, \beta, \ldots.$ als auch $a, b, \ldots. < p$, so müssen die Reste $\alpha, \beta, \ldots. \lambda$ aus denselben Zahlen bestehen wie $a, b, \ldots. l$, nur in anderer Reihenfolge.

Beweis ad I.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Da } am = V_p + \alpha \\ bm = V_p + \beta \\ cm = V_p + \gamma \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ lm = V_p + \lambda \end{array}\right\} \begin{array}{l} n \text{ Gleichungen, weil die Anzahl} \\ \text{der Zahlen } a, b, c \ldots l = n \text{ ist.} \end{array}$$

so ist $am \cdot bm \cdot cm \ldots\ldots lm = V_p + (\alpha\beta\gamma \ldots\ldots \lambda)$, d. i.

$$(abc \ldots\ldots l) \cdot m^n = V_p + (\alpha\beta\gamma \ldots\ldots \lambda).$$

Nach vorstehendem Zusatze ist $\alpha\beta\gamma \ldots\ldots \lambda = abc \ldots\ldots l$, folglich

$$(abc \ldots\ldots l) \cdot m^n = V_p + (abc \ldots\ldots l), \text{ oder}$$

$$(abc \ldots\ldots l) \cdot m^n - (abc \ldots\ldots l) = V_p, \text{ d. i.}$$

$$(abc \ldots\ldots l)\left(m^n - 1\right) \text{ durch } p \text{ teilbar.}$$

Nun kann aber $abc \ldots\ldots l$ nicht durch p teilbar sein, weil es keiner der Faktoren dieses Produkts ist (s. 27. Satz), folglich mufs der andere Faktor $m^n - 1$ durch p teilbar sein.

50. Ist p eine Primzahl, a nicht durch p teilbar, so können die Zahlen $1, 2, 3, \ldots\ldots (p-1)$ so gepaart werden, dafs das aus jedem Paar gebildete Produkt nach dem Modul p denselben Rest wie a nach dem Modul p hat.

1. Beispiel. $p = 7$ (Primzahl) ist prim zu $a = 10$. Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 können so gepaart werden, dafs jedes Paar ein Produkt giebt, welches durch 7 dividiert, denselben Rest wie 10:7 läfst, nämlich 3. Die Produkte sind:

$1 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $4 \cdot 6$,
oder 3, 10, 24, die durch 7 dividiert,
die Reste: 3, 3, 3 geben.

2. Beispiel. $p = 23$ (Primzahl) ist prim zu $a = 14$. Die Zahlen 1, 2, 3, ... 22 können so gepaart werden, dafs jedes Paar ein Produkt giebt, welches durch 23 dividiert, denselben Rest wie 14:23 läfst, nämlich 14. Die Produkte sind:

$1 \cdot 14$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 20$, $4 \cdot 15$, $5 \cdot 12$, $6 \cdot 10$, $8 \cdot 19$, $9 \cdot 22$, $11 \cdot 18$,
oder 14, 14, 60, 60, 60, 60, 152, 198, 198,
$3 \cdot 17$, $16 \cdot 21$
221, 336.

Jedes dieser Produkte durch 23 dividiert, giebt den Rest 14.

Beweis. Ist k eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots\ldots (p-1)$, also k prim zu p, so haben die Zahlen $k, 2k, 3k, \ldots\ldots (p-1)k$ nach dem Modul p die kleinsten positiven Reste $1, 2, 3, \ldots\ldots (p-1)$ in einer bestimmten Ordnung (s. Satz 47). Einer von diesen Resten mufs nun auch der kleinste positive Rest von a nach dem Modul p sein, weil a durch p nicht teilbar ist. (Bei $p = 7$, $a = 10$ — siehe das 1. Beisp. — war dieser kleinste positive Rest $= 3$; bei $p = 14$, $a = 23$ — s. das 2. Beisp. — war er $= 14$). Daher giebt es unter den Produkten $k, 2k, \ldots\ldots (p-1)k$ eins, z. B. ek, und nicht mehr als dieses eine (s. Satz 47), welches nach dem Modul p denselben Rest wie a nach dem Modul p hat.

Zusatz. Die Differenz aus jedem der aus den Zahlenpaaren gebildeten Produkten und der Zahl a mufs durch p teilbar sein. Denn da ein solches Produkt fk durch p dividiert, denselben Rest r wie $a:p$ giebt, so ist:

$$\begin{aligned} fk &= V_p + r \\ a &= V_p + r \text{ subtr.} \\ \hline fk - a &= V_p \text{ oder} \\ fk - a & \text{ durch } p \text{ teilbar.} \end{aligned}$$

In bezug auf das 2. Beispiel:

$5 \cdot 12 - 14 = 60 - 14 = 46$ durch 23 teilbar,
$9 \cdot 22 - 14 = 198 - 14 = 184$ „ „ „ .

51. Giebt $c:d$ den Rest r, so giebt $c^n:d$ denselben Rest wie $r^n:d$.

Beweis. Da $\frac{c}{d} = q + \frac{r}{d}$, so ist

$$c = dq + r, \text{ folglich (§. 15, 7)}$$
$$c^n = (dq + r)^n, \text{ oder (§. 62, 7):}$$
$$c^n = (dq)^n + n\,(dq)^{n-1} \cdot r + \frac{n\,(n-1)}{2}\,(dq)^{n-2} \cdot r^2 + \dots + n \cdot dq \cdot r^{n-1} + r^n.$$

Hebt man für die ersten n Glieder der aus $n+1$ Gliedern bestehenden rechten Seite den gemeinsamen Faktor d aus, so erhält man:

$$c^n = \left[d^{n-1} q^n + nd^{n-2} q^{n-1} r + \dots + nqr^{n-1}\right] d + r^n.$$

Da c^n um ein Vielfaches von d gröfser als r^n ist, so giebt nach dem 2. Zusatze des 2. Satzes r^n nach dem Modul d denselben Rest wie c^n nach demselben Modul, d. i.

$$\frac{c^n}{d} \text{ giebt denselben Rest wie } \frac{r^n}{d}.$$

Beispiel. $11:7$ giebt den Rest 4, folglich giebt $11^n:7$ denselben Rest wie $4^n:7$.

Der Rest von $11^2:7$ ist mithin = dem Rest von $4^2:7$, d. i. 2.

$11^3:7$ giebt denselben Rest wie $4^3:7 = 64:7$, d. i. den Rest 1.

$11^4:7$ giebt denselben Rest wie $4^4:7 = 256:7$, d. i. den Rest 4 u. s. w.

52. Giebt $a^m:d$ den Rest r, $a^n:d$ den Rest r', so giebt $a^{m+n}:d$ denselben Rest wie $(rr'):d$.

Beweis. Da $\frac{a^m}{d} = q + \frac{r}{d}$, $\frac{a^n}{d} = q' + \frac{r'}{d}$, so ist

$$a^m + dq + r,\ a^n = dq' + r',\ \text{folglich:}$$
$$a^m \cdot a^n = (dq + r)(dq' + r').$$

Da die sämtlichen Glieder mit Ausnahme des letzten (rr') den Faktor d haben, so erhält vorstehende Gleichung die Form:

$$a^{m+n} = Qd + rr'.$$

Da a^{m+n} um ein Vielfaches von d gröfser als rr' ist, so giebt nach dem 2. Zusatze des 2. Satzes $\frac{a^{m+n}}{d}$ denselben Rest wie $\frac{rr'}{d}$.

Beispiel. $11^5 : 7 = 161051 : 7$, der Rest $= 2$;
$11^3 : 7 + 1331 : 7$, der Rest $= 1$.

$(11^5 \cdot 11^3) : 7$ mufs nun denselben Rest wie $(2 \cdot 1) : 7$, d. i. den Rest 2 geben.

Zusatz. Giebt $a : d$ (d. i. $a^1 : d$) den Rest r, $a^n : d$ den Rest r', so giebt $a^1 \cdot a^n : d$, d. i. $a^{n+1} : d$ denselben Rest wie $(rr') : d$. Oder:

Um den Rest von $a^{n+1} : d$ aus dem Reste von $a^n : d$ zu bestimmen, braucht man nur den Rest von $a^n : d$ mit dem Reste von $a : d$ zu multiplicieren und das Produkt durch d zu dividieren. Der erhaltene Rest ist der gesuchte.

Beispiele. $37 : 17$, Rest 3.

$37^2 : 17$ giebt nach dem 51. Satze denselben Rest wie $3^2 : 17 = 9 : 17$, d. i. den Rest 9.

$37^3 : 17$ giebt denselben Rest wie $3^3 : 17 = 27 : 17$, d. i. den Rest 10.

Für jede folgende Potenz findet man nun nach unserm Zusatze den Rest, wenn man das Produkt aus dem Reste der zuletzt erhaltenen Potenz und 3 (dem Reste von $37 : 17$) durch 17 dividiert. Der erhaltene Rest ist der gesuchte. Daher:

$37^4 : 17$? $(3 \cdot 10) : 17 = 30 : 17$, Rest 13.
$37^5 : 17$? $(3 \cdot 13) : 17 = 39 : 17$, Rest 5.
$37^6 : 17$? $(3 \cdot 5) : 17 = 15 : 17$, Rest 15.
$37^7 : 17$? $(3 \cdot 15) : 17 = 45 : 17$, Rest 11 u. s. w.

53. Giebt $a^m : d$ denselben Rest r wie $a^n : d$, so mufs auch $a^{m+x} : d$ denselben Rest ϱ wie $a^{n+x} : d$ geben.

Beweis. $\frac{a^m}{d} = q + \frac{r}{d}$, $\frac{a^n}{d} = q_0 + \frac{r}{d}$, folglich:

$$a^m = dq + r, \quad a^n = dq_0 + r.$$

Ist nun $\frac{a^x}{d} = q' + \frac{r'}{d}$, oder $a^x = dq' + r'$, so ist

$$a^m \cdot a^x = (dq + r)(dq' + r'), \text{ d. i.}$$

$$a^{m+x} = dQ + rr' \text{ und folglich:}$$

$$\frac{a^{m+x}}{d} = Q + \frac{rr'}{d}, \text{ der Rest also } rr' \ (= \varrho).$$

Eben so $a^n \cdot a^x = (dq_0 + r)(dq' + r')$, d. i.

$$a^{n+x} = dQ_0 + rr',$$

folglich giebt auch $a^{n+x} : d$ denselben Rest rr' $(= \varrho)$.

Giebt z. B. $a^{20} : b$ denselben Rest wie $a^{30} : b$, so mufs auch $a^{21} : b$ denselben Rest wie $a^{31} : b$, $a^{22} : b$ denselben Rest wie $a^{32} : b$ u. s. w. geben. Die Reste müssen mithin periodisch wiederkehren.

Beispiel. $11^0 : 7$, Rest 1.
$11^1 : 7$, „ 4.
$11^2 : 7$, „ 2 (s. das Beisp. zum 51. Satz).
$11^3 : 7$, „ 1.

Da dieser Rest der von $11^0 : 7$ ist, so müssen die Reste 1, 4, 2 periodisch wiederkehren und es ist nun der Rest von $11^4 : 7 = 4$, der Rest von $11^5 : 7 = 2$ u. s. w.

54. Giebt $a^m : d$ den Rest r, $a^n : d$ den Rest $d - 1$, so mufs $a^{m+n} : d$ den Rest $d - r$ geben.

Beweis. $\frac{a^m}{d} = q + \frac{r}{d}$, $\frac{a^n}{d} = q' + \frac{d-1}{d}$, folglich

$$a^m = dq + r, \quad a^n = dq' + d - 1, \text{ oder}$$

$$a^n = d(q' + 1) - 1: \text{ daher}$$

$$a^m \cdot a^n = (dq + r)\left[d(q' + 1) - 1\right], \text{ oder}$$

$$a^{m+n} = dQ - r, \text{ dafür:}$$

$$a^{m+n} = dQ - d + d - r, \text{ d. i.}$$

$$a^{m+n} = d(Q-1) + d - r, \text{ durch } d \text{ dividiert:}$$

$$\frac{a^{m+n}}{d} = Q - 1 + \frac{d-r}{d}, \text{ der Rest mithin } d-r.$$

Beispiel. $7^2:11$, Rest 5; $7^5:11$, Rest $10 = 11 - 1$, folglich mufs $7^{2+5}:11$, d. i. $7^7:11$ den Rest $11 - 5 = 6$ geben.

Zusatz. $a^0:d$, d. i. $1:d$ giebt den Rest 1.

Ist nun der Rest von $a^1:d = r$,
„ $a^2:d = r'$,
„ $a^n:d = d-1$, so mufs der Rest
von $a^{n+1}:d = d - r$,
„ $a^{n+2}:d = d - r'$

sein, oder von a^n an erhält man die Reste, wenn man den Divisor d um die ersten Reste 1, r, r' .... vermindert.

1. Beispiel. $31^0:17$, Rest $= 1$;
$31^1:17$, „ $= 14$;
$31^2:17$, derselbe Rest wie $14^2:17 = 196:17$, der Rest also 9;
$31^3:17$? $(14 \cdot 9):17 = 126:17$, Rest $= 7$;
$31^4:17$? $(14 \cdot 7):17$, Rest 13;
$31^5:17$? $(14 \cdot 13):17$, „ 12;
$31^6:17$? $(14 \cdot 12):17$, „ 15;
$31^7:17$? $(14 \cdot 15):17$, „ 6;
$31^8:17$? $(14 \cdot 6):17$, „ $16 = 17 - 1$!
Mithin $31^9:17$? Rest $= 17 - 14 = 3$;
$31^{10}:17$? „ $= 17 - 9 = 8$;
$31^{11}:17$? „ $= 17 - 7 = 10$;
$31^{12}:17$? „ $= 17 - 13 = 4$;
$31^{13}:17$? „ $= 17 - 12 = 5$;
$31^{14}:17$? „ $= 17 - 15 = 2$:
$31^{15}:17$? „ $= 17 - 6 = 11$;
$31^{16}:17$? „ $= 17 - 16 = 1$
und die Reste kehren nun periodisch wieder.

2. Beispiel. $7654^{8765}:13$, welcher Rest?

Auflösung. $7654^{8765} = (13 \cdot 588 + 10)^{8765}$, folglich ist der Rest von $10^{8765}:13$ der gesuchte (s. 51. Satz).

$10^0 : 13$, Rest $= 1$;
$10^1 : 13$, „ $= 10$;
$10^2 : 13 = 100 : 13$, Rest $= 9$.
$10^3 : 13$? $(10 \cdot 9) : 13 = 90 : 13$, Rest $= 12 = 13 - 1$!

Daher der Rest von $10^4 : 13 = 13 - 10 = 3$,
„ „ „ $10^5 : 13 = 13 - 9 = 4$,
„ „ „ $10^6 : 13 = 13 - 12 = 1$ u. s. w.

$10^0, 10^6, 10^{12}, \ldots 10^{6n}$ geben mithin durch 13 dividiert den Rest 1;
$10^1, 10^7, \ldots 10^{6n+1} : 13$, Rest $= 10$;
$10^2, 10^8, \ldots 10^{6n+2} : 13$, „ $= 9$;
$10^{6n+3} : 13$, „ $= 12$;
$10^{6n+4} : 13$, „ $= 2$;
$10^{6n+5} : 13$, „ $= 4$.

$10^{8765} : 13 = 10^{6 \cdot 1460 + 5} : 13 = 10^{6n+5} : 13$,
folglich ist 4 der gesuchte Rest.

3. Beispiel. $(499^{809} - 977^{641})^{1049} : 19$, welcher Rest?

Auflösung. $499^{809} : 19 = (19 \cdot 26 + 5)^{809} : 19$ giebt denselben Rest wie $5^{809} : 19$.

$5^0 : 19$, Rest 1;
$5^1 : 19$, „ 5;
$5^2 : 19$, „ 6;
$5^3 : 19$ oder $5 \cdot 6 : 19$, Rest 11;
$5^4 : 19$ „ $5 \cdot 11 : 19$, „ 17.

Es folgen die Reste 9, 7, 16, 4, 1 und mithin:
$(5^0, 5^9, 5^{18} \ldots) \; 5^{9n} : 19$, Rest 1;
$(5^1, 5^{10}, 5^{19} \ldots) \; 5^{9n+1} : 19$, „ 5;
$5^{9n+2} : 19$, „ 6;
$5^{9n+3} : 19$, „ 11;
$5^{9n+4} : 19$, „ 17;
$5^{9n+5} : 19$, „ 9;
$5^{9n+6} : 19$, „ 7;
$5^{9n+7} : 19$, „ 16;
$5^{9n+8} : 19$, „ 4.

Nun ist $5^{809} : 19 = 5^{9 \cdot 89 + 8} : 19 = 5^{9n+8} : 19$, folglich der Rest $= 4$.

Da also $499^{809}:19$ den Rest 4 giebt, so ist $499^{809} = V_{19} + 4$.

Ferner giebt $977^{641}:19 = (19 \cdot 51 + 8)^{641}:19$ denselben Rest wie $8^{641}:19$.

$$8^0:19, \text{ Rest } 1;$$
$$8^1:19, \;\text{„}\; 8;$$
$$8^2:19, \;\text{„}\; 7;$$
$$8^3:19 \text{ oder } (8 \cdot 7):19, \text{ Rest } 18 = 19 - 1!$$

Daher $8^4:19$, Rest $19 - 8 = 11$;
$$8^5:19, \;\text{„}\; 19 - 7 = 12;$$
$$8^6:19, \;\text{„}\; 19 - 18 = 1 \text{ u. s. w.}$$

Folglich $(8^0, 8^6, 8^{12} \ldots.)\; 8^{6n}:19$, Rest 1;
$$(8^1, 8^7, 8^{13} \ldots.)\; 8^{6n+1}:19, \;\text{„}\; 8;$$
$$8^{6n+2}:19, \;\text{„}\; 7;$$
$$8^{6n+3}:19, \;\text{„}\; 18;$$
$$8^{6n+4}:19, \;\text{„}\; 11;$$
$$8^{6n+5}:19, \;\text{„}\; 12.$$

Nun ist $8^{641}:19 = 8^{6 \cdot 106 + 5}:19 = 8^{6n+5}:19$, folglich der Rest $= 12$. Daher
$$977^{641} = V_{19} + 12.$$

Damit geht die ursprüngliche Aufgabe über in:
$$[V_{19} + 4 - (V_{19} + 12)]^{1049} = (V_{19} - 8)^{1049} = (V_{19} + 19 - 8)^{1049}$$
$$= (V_{19} + 11)^{1049}.$$

Es giebt aber $(V_{19} + 11)^{1049}:19$ denselben Rest wie $11^{1049}:19$.

$$11^0:19, \text{ Rest } 1;$$
$$11^1:19, \;\text{„}\; 11;$$
$$11^2:19, \;\text{„}\; 7;$$
$$11^3:19 \text{ oder } (11 \cdot 7):19, \text{ Rest } 1.$$

Folglich $11^{3n}:19$, Rest 1;
$$11^{3n+1}:19, \;\text{„}\; 11;$$
$$11^{3n+2}:19, \;\text{„}\; 7.$$

$11^{1049}:19 = 11^{3 \cdot 349 + 2}:19 = 11^{3n+2}:19$, folglich ist 7 der gesuchte est

55. I. Es ist $1^2:11 = 0$ mit dem Reste 1;
$$2^2:11 = 0 \;\text{„}\;\text{„}\;\text{„}\; 4;$$
$$3^2:11 = 0 \;\text{„}\;\text{„}\;\text{„}\; 9;$$
$$4^2:11 = 1 \;\text{„}\;\text{„}\;\text{„}\; 5;$$

$5^2 : 11 = 2$ mit dem Reste 3;
$6^2 : 11 = 3$ „ „ „ 3;
$7^2 : 11 = 4$ „ „ „ 5;
$8^2 : 11 = 5$ „ „ „ 9;
$9^2 : 11 = 7$ „ „ „ 4;
$10^2 : 11 = 9$ „ „ „ 1;
$11^2 : 11 = 11$ „ „ „ 0;
$12^2 : 11 = 13$ „ „ „ 1 u. s. w.

Die Reste 1, 4, 9, 5, 3 sind die sogenannten „quadratischen Reste“ von 11.

Allgemein: Die Reste der Quadratzahlen $(1^2, 2^2, 3^2 \ldots)$ nach dem Modul m heifsen die quadratischen Reste von m.

Offenbar ist 1 ein quadratischer Rest für jeden Modul.

II. Da auch

$$\frac{8^2}{11} = \frac{64}{11} = 4 + \frac{20}{11} = 4 + \frac{9 + 1 \cdot 11}{11},$$

$$\frac{8^2}{11} = \frac{64}{11} = 3 + \frac{31}{11} = 3 + \frac{9 + 2 \cdot 11}{11},$$

$$\frac{8^2}{11} = \frac{64}{11} = 9 + \frac{-35}{11} = 9 + \frac{9 - 4 \cdot 11}{11},$$

so sind die Reste von $\frac{8^2}{11} = 9, 20, 31, \ldots = 9 \pm 11x$.

Die quadratischen Reste von 11 sind mithin allgemeiner:
$1 \pm 11x$, $4 \pm 11x$, $9 \pm 11x$, $5 \pm 11x$, $3 \pm 11x$.

III. Die Zahlen, welche in der Reihe der quadratischen Reste nicht vorkommen, heifsen „quadratische Nichtreste“.

Die quadratischen Nichtreste von 11 sind daher 2, 6, 7, 8, 10, oder allgemeiner: $2 + 11x$, $6 + 11x$, $7 + 11x$, $8 + 11x$, $10 + 11x$, z. B. auch 13, 17, 18.

IV. a^2 und $(a \pm bm)^2$ haben nach dem Modul m gleiche Reste.

Beweis. $(a + bm)^2 = a^2 + 2abm + b^2m^2 = V_m + a^2$, aber $(V_m + a^2) : m$ giebt denselben Rest wie $a^2 : m$ (s. 2. Zusatz des 2. Satzes).

1. Zusatz. a^2 und $(bm - a)^2$ haben nach dem Modul m gleiche Reste, denn es ist $(bm - a)^2 = (a - bm)^2$.

2. Zusatz. Man kann daher auch zur Basis des Quadrats immer ein beliebiges Vielfache des Modul addieren oder von derselben wegnehmen.

Z. B. haben $(m+1)^2$ und $[(m+1)-m]^2$,
$(m+2)^2$ und $[(m+2)-m]^2$ u. s. w.
d. i. $(m+1)^2$ und 1^2,
$(m+2)^2$ und 2^2 u. s. w.
nach dem Modul m gleiche Reste.

V. Ist der Modul m gerade, so ist $\frac{m}{2}$ eine ganze Zahl und $\frac{m}{2}+k$ eben so viel über $\frac{m}{2}$, als $\frac{m}{2}-k$ unter $\frac{m}{2}$, zugleich hat

$$\left(\frac{m}{2}+k\right)^2 \text{ nach IV, 2. Zus. mit } \left[m-\left(\frac{m}{2}+k\right)\right]^2,$$

d. i. mit $\left(\frac{m}{2}-k\right)^2$ gleiche quadratische Reste. Hat man z. B. die quadratischen Reste von $1^2, 2^2, 3^2, \ldots 7^2$ nach dem Modul 14 gebildet, so muſs

$$\left(\frac{14}{2}+1\right)^2 \text{ denselben Rest wie } \left(\frac{14}{2}-1\right)^2, \text{ d. i.}$$

8^2 „ „ „ 6^2,
9^2 „ „ „ 5^2,
10^2 „ „ „ 4^2 geben u. s. w.

Allgemein: Für den Modul m hat p^2 denselben quadratischen Rest wie $(m-p)^2$.

Hieraus folgt, daſs man für einen geradzahligen Modul m sämtliche quadratische Reste erhält, wenn man sie nur für 1^2, 2^2, $3^2 \ldots$ bis $\left(\frac{m}{2}\right)^2$ bildet, da diese in umgekehrter Ordnung auch für die folgenden Quadrate gelten müssen.

Die quadratischen Reste von 10 z. B. sind:

für 1^2: 1,
„ 2^2: 4,
„ 3^2: 9,
„ 4^2: 6,
„ 5^2: 5.

Da $5=\frac{10}{2}=\frac{m}{2}$, so müssen nun die Reste 6, 9, 4, 1 folgen.

VI. Ist der Modul m ungerade, so ist $\frac{m}{2}$ gebrochen und von den $\frac{m}{2}$ zunächst liegenden ganzen Zahlen ist

$\frac{m}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m-1}{2}$ die nächstkleinere, $\frac{m}{2} + \frac{1}{2} = \frac{m+1}{2}$ die nächstgröfsere ganze Zahl. Es sind also

$$\frac{m-1}{2} \text{ und } \frac{m+1}{2} \left(= \frac{m-1}{2} + 1\right)$$

die beiden mittelsten aufeinander folgenden ganzen Zahlen der Zahlenreihe $1, 2, 3, \ldots . m$.

Von den Zahlen $1, 2, 3, \ldots . 13$ z. B. sind die Zahlen

$$\frac{13-1}{2} = 6 \text{ und } \frac{13+1}{2} = 7$$

die beiden mittelsten.

Nach IV, 2. Zusatz hat $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2$ gleichen quadratischen Rest mit $\left(m - \frac{m+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m-1}{2}\right)^2$, desgleichen $\left(\frac{m+1}{2} + 1\right)^2$ gleichen quadratischen Rest mit

$$\left[m - \left(\frac{m+1}{2} + 1\right)\right]^2 = \left(\frac{m-1}{2} - 1\right)^2,$$

$\left(\frac{m+1}{2} + 2\right)^2$ gleichen quadratischen Rest mit $\left(\frac{m-1}{2} - 2\right)^2$

u. s. w., folglich wiederholen sich von $\frac{m+1}{2}$ an die quadratischen Reste und die Basen $\frac{m+1}{2}$, $\frac{m+1}{2} + 1$, $\frac{m+1}{2} + 2, \ldots .$ geben dieselben quadratischen Reste wie die Basen

$$\frac{m-1}{2},\ \frac{m-1}{2} - 1,\ \frac{m-1}{2} - 2 \text{ u. s. w.}$$

Also auch hier hat allgemein für den Modul m das Quadrat p^2 denselben quadratischen Rest wie $(m-p)^2$.

Um mithin für den ungeradzahligen Modul m die quadratischen Reste zu erhalten, hat man nur die quadratischen Reste

$$\text{von } 1^2,\ 2^2,\ 3^2 \text{ bis } \left(\frac{m-1}{2}\right)^2$$

zu bilden, da diese in umgekehrter Ordnung auch für die folgenden Quadrate gelten müssen.

Die quadratischen Reste von 13 z. B. sind

$$\begin{aligned} \text{für } 1^2 &: 1, \\ „\ 2^2 &: 4, \\ „\ 3^2 &: 9, \\ „\ 4^2 &: 3, \\ „\ 5^2 &: 12, \\ „\ 6^2 &: 10. \end{aligned}$$

Da $6^2 = \left(\frac{13-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m-1}{2}\right)^2$, so müssen nun die Reste 10, 12, 3, 9, 4, 1 folgen.

VII. Ist p eine ungerade Primzahl, so gehört die Hälfte der Zahlen $1, 2, 3, \ldots (p-1)$ zu den quadratischen Resten von p, folglich (siehe III) bilden die Zahlen der anderen Hälfte die Nichtreste.

Die quadratischen Reste von 7 z. B. sind 1, 4, 2, denn

$$\begin{aligned} \text{für } 1^2 &: 1, \\ „\ 2^2 &: 4, \\ „\ 3^2 &: 2 \quad \left(3 = \frac{7-1}{2}, \text{ siehe VI}\right). \end{aligned}$$

1, 4, 2 aber umfassen die eine Hälfte der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6; mithin die andere Hälfte: 3, 5, 6 die quadratischen Nichtreste.

Beweis. Die sämtlichen quadratischen Reste nach dem (ungeraden) Modul p findet man nach VI aus

$$1^2, 2^2, 3^2, \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.$$

Würden diese Reste noch nicht die Hälfte der Zahlen $1, 2, 3 \ldots (p-1)$ umfassen, so müfsten einige der Quadrate

$$1^2, 2^2, \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

gleiche Reste geben. Angenommen nun, a und b wären 2 diese Zahlen, deren Quadrate gleiche Reste r geben, so würde also

$$a^2 = Ap + r$$
$$b^2 = Bp + r$$

sein und folglich wäre

$$a^2 - b^2 = (Ap + r)^2 - (Bp + r)^2 = (A^2 p + 2Ar - B^2 - 2Br)\, p$$

d. i. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ durch p teilbar.

Dies ist aber unmöglich, weil

$$a \leqq \frac{p-1}{2}$$

$$b < \frac{p-1}{2} \text{ und folgl. (durch Addition):}$$

$$a + b \leqq p - 1, \text{ mithin desto mehr}$$

$$a - b < p - 1.$$

Ist aber jeder der beiden Faktoren des Produkts

$$(a+b)(a-b)$$

kleiner als p und p eine Primzahl, so müssen diese Faktoren prim zu p, mithin auch ihr Produkt prim zu p sein (siehe 25. Satz).

VIII. Es ist $(n+1)^2 = n^2 + (2n+1)$,

$$(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 = (n+1)^2 + (2n+3),$$

$$(n+3)^2 = n^2 + 6n + 9 = (n+2)^2 + (2n+5)$$

u. s. w., folglich ist $(n+1)^2$ um die ungerade Zahl $2n+1$ größer als n^2,

$(n+2)^2$ um die nächstgrößere ungerade Zahl

$$2n + 3 = (2n+1) + 2$$

größer als $(n+1)^2$,

$(n+3)^2$ um die nächstgrößere ungerade Zahl

$$2n + 5 = [(2n+1) + 2] + 2$$

größer als $(n+2)^2$ u. s. w.

Mithin kann man die Quadratzahlen $1^2, 2^2, 3^2, \ldots\ldots$ durch Addition der ungeraden Zahlen bilden und zwar:

$$\begin{aligned}
0^2 &= 0 \\
1^2 &= 0 + 1 = 1 \\
2^2 &= 1 + 3 = 4 \\
3^2 &= 4 + 5 = 9 \\
4^2 &= 9 + 7 = 16 \\
5^2 &= 16 + 9 = 25 \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Da $(n+1)^2$ um $2n + 1 > n^2$,

so ist, $n + 1 = x$, folglich $n = x - 1$ gesetzt:

$$x^2 \text{ um } 2(x-1) + 1 > (x-1)^2, \text{ d. i.}$$

$$x^2 \;\;,, \;\; 2x - 1 > (x-1)^2.$$

Es muß also $7^2 : m$ einen um $(2 \cdot 7 - 1)$ größern Rest als $6^2 : m$ geben. Mithin bildet man die quadratischen Reste einfacher dadurch, daß man die ungeraden Zahlen der Reihe nach addiert.

Die Reste sind, wenn sie gröfser als der Modul sein sollten, eventuell um ein Vielfaches des Modul zu vermindern.

Beispiel. Um die quadratischen Reste von 15 zu bilden, findet man:

für 1^2: $0 + 1 = 1$,
„ 2^2: $1 + 3 = 4$,
„ 3^2: $4 + 5 = 9$,
„ 4^2: $9 + 7 = 16$ oder $16 - 15 = 1$,
„ 5^2: $1 + 9 = 10$,
„ 6^2: $10 + 11 = 21$ oder $21 - 15 = 6$,
„ 7^2: $6 + 13 = 19$ „ $19 - 15 = 4$,
„ 8^2: $4 + 15 = 19$.

Die Reste wiederholen sich nun in umgekehrter Folge. Da 15 keine Primzahl ist, so gilt hier VII nicht, vielmehr sind die quadratischen Reste von 15 nur 1, 4, 6, 9, 10, die quadratischen Nichtreste mithin: 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 13, 14.

56. Ist p eine Primzahl und a ein quadratischer Rest von p, so giebt es in der Reihe $1, 2, 3, \ldots (p-1)$ zwei Zahlen: k und $p-k$ (deren Summe also $= p$ ist), von welchen das Quadrat nach dem Modul p denselben kleinsten positiven Rest als a nach dem Modul p hat, so dafs also (wie im Zusatz von 50) $k^2 - a$ [oder $(p-k)^2 - a$] durch p teilbar ist.

Nach dem 50. Satze müssen sich alsdann die übrigen $p-3$ Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots (p-1)$, so paaren lassen, dafs die Produkte der Paare nach dem Modul p denselben kleinsten positiven Rest wie a nach dem Modul p haben. (Satz von Dirichlet).

Beispiel. Nach dem Modul $p = 11$ ist ein quadratischer Rest $a = 16$, denn $4^2 : 11$ giebt die Reste

$$5, \; 5 + 11 = 16, \; 5 + 22 = 27 \text{ u. s. w. (s. 55, II).}$$

Aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots 10$ finden sich die Zahlen 4 und $11 - 4 = 7$ von der Eigenschaft, dafs sie denselben Rest wie $16 : 11$ geben, denn

$4^2 : 11$ giebt denselben Rest 5, wie $16 : 11$,
$7^2 : 11$ „ „ „ 5, „ $16 : 11$.

Die übrigen Zahlen 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10 lassen sich in folgender Weise paaren:

$2 \cdot 8$, $1 \cdot 5$, $3 \cdot 9$, $6 \cdot 10$, d. i.
16, 5, 27, 60, die durch 11 dividiert
gleichfalls 5, 5, 5, 5 als Rest geben.

Beweis. Ist a ein quadratischer Rest, so giebt es (s. 55. Satz) in der Reihe $1, 2, 3, \ldots (p-1)$ eine Zahl k von solcher Be-

schaffenheit, dafs k^2 nach dem Modul p denselben kleinsten positiven Rest hat, wie a nach dem Modul p, so dafs also $k^2 - a$ durch p teilbar ist. Da k^2 nach dem Modul p denselben Rest wie $(p-k)^2$ nach dem Modul p giebt (s. 55. Satz, VI), so ist $p-k$ die andere Zahl derselben Eigenschaft. [Dies läfst sich auch direkt aus

$$(p-k)^2 - a = p^2 - 2pk + k^2 - a = V_p + k^2 - a$$

beweisen, weil $(V_p + k^2 - a) : p$ denselben Rest wie $(k^2 - a) : p$ geben mufs.]

Noch eine andere Zahl q aufser jener k (resp. $p-k$) kann es nicht geben, welche gleichfalls in der Form q^2 nach dem Modul p denselben kleinsten positiven Rest geben könnte, als a nach dem Modul p. Denn dann wäre auch $q^2 - a$ durch p teilbar, und weil dann sowohl $q^2 - a$ als auch $k^2 - a$ durch p teilbar wäre, so müfste auch die Differenz beider Ausdrücke, d. i.

$$q^2 - a - (k^2 - a) = q^2 - k^2 = (q+k)(q-k)$$

durch p teilbar sein. Da aber $q-k$ prim zu p, weil beide (q und k) $< p$ und p eine Primzahl, so müfste $q+k$ durch p teilbar sein. Nun ist $q+k = 2p, 3p \ldots$ unmöglich, da q und k Zahlen sein sollen, die $< p$. Aber auch $q+k=p$ würde zu keiner neuen Zahl führen, weil dann $q = p-k$ wäre, demnach keine andere Zahl, als die schon aus k durch Subtraktion von p bestimmte.

57. Ist p eine Primzahl und a nicht durch p teilbar, so ist entweder

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) + a^{\frac{p-1}{2}}$$

$$\text{oder}\quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) - a^{\frac{p-1}{2}}$$

durch p teilbar, je nachdem a ein quadratischer Rest oder ein quadratischer Nichtrest ist. (Satz von Dirichlet.)

1. Beispiel. $p = 11$, $a = 9$. Die quadratischen Reste von 11 sind 1, 4, 9, 5, 3, folglich ist $a = 9$ ein quadratischer Rest und es ist daher

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots 10 + 9^{\frac{11-1}{2}} = 3628800 + 9^5$$
$$= 3628800 + 59049 = 3687849$$

durch 11 teilbar.

2. Beispiel. $p = 7$, $a = 5$. Die quadratischen Reste von 7 sind 1, 4, 2, daher ist 5 ein quadratischer Nichtrest. Mithin mufs

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 5^{\frac{7-1}{2}} = 720 - 5^3 = 720 - 125 = 595$$

durch 7 teilbar sein.

Beweis.

I. Es sei a ein quadratischer Nichtrest von p. Dem 50. Satze zufolge können die Zahlen $1, 2, 3, \ldots (p-1)$ so gepaart werden, dafs aus den Zahlen der einen Hälfte: $m, m_1, m_2, m_3, \ldots$ und den Zahlen der andern Hälfte: $n, n_1, n_2, n_3, \ldots$ die folgenden $\frac{p-1}{2}$ Differenzen:

$$mn-a,\ m_1n_1-a,\ m_2n_2-a,\ m_3n_3-a, \ldots$$

gebildet werden können, die alle durch p teilbar sind (siehe Zusatz von 50). Folglich ist:

$$mn-a=V_p$$
$$m_1n_1-a=V_p \text{ u. s. w.,}$$

oder es ist

$$\left.\begin{array}{l} mn=a+V_p \\ m_1n_1=a+V_p \text{ u. s. w.} \end{array}\right\} \frac{p-1}{2} \text{ Gleichungen!}$$

Durch Multiplication (nach §. 11, 10, Zus.) ergiebt sich:

$$mn\,m_1n_1\,m_2n_2 \ldots = \left(a+V_p\right)^{\frac{p-1}{2}}, \text{ d. i. (s. §. 62, 7):}$$

$$mm_1m_2 \ldots nn_1n_2 \ldots = a^{\frac{p-1}{2}} + \frac{p-1}{2}\cdot a^{\frac{p-1}{2}-1} V_p + \ldots,$$

oder weil die Faktoren $mm_1 \ldots nn_1 \ldots$ die sämtlichen Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots (p-1)$$

repräsentieren und rechts die Glieder vom 2. an den Faktor V_p enthalten müssen:

$$1\cdot 2\cdot 3 \ldots (p-1) = a^{\frac{p-1}{2}} + V_p \text{ und folglich}$$

$$1\cdot 2\cdot 3 \ldots (p-1) - a^{\frac{p-1}{2}} = V_p,$$

d. h. die Differenz links ist durch p teilbar.

II. Es sei a ein quadratischer Rest von p, ferner k und $p-k$ nach dem 56. Satze von der Beschaffenheit, dafs k^2-a durch p teilbar ist. Dann lassen sich aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots (p-1)$, in welcher k und $p-k$ fehlen, die Zahlen $m, m_1, m_2 \ldots$ der einen Hälfte mit den Zahlen $n, n_1, n_2 \ldots$ der andern Hälfte so paaren, dafs die $\frac{p-3}{2}$ Differenzen

$$mn-a,\ m_1n_1-a,\ m_2n_2-a \text{ u. s. w.}$$

alle durch p teilbar sind. Aus den $\frac{p-3}{2}$ Gleichungen:

$$mn - a = V_p$$
$$m_1 n_1 - a = V_p \text{ u. s. w.}$$

ergiebt sich wie unter I:

$$m m_1 m_2 \ldots . n n_1 n_2 \ldots . = a^{\frac{p-3}{2}} + V_p.$$

Die linke Seite aber ist das Produkt der Zahlen 1, 2, 3, ... $(p-1)$ ohne die Zahlen k und $p-k$. Daher:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (p-1)}{k \cdot (p-k)} = a^{\frac{p-3}{2}} + V_p \ldots . \text{ (A)}$$

Da ferner $k^2 - a$ durch p teilbar ist, so ist auch

$$kp - (k^2 - a), \text{ d. i. } k(p-k) + a$$

durch p teilbar, oder

$$k(p-k) + a = V_p, \text{ folglich}$$
$$k(p-k) = V_p - a.$$

Damit geht A über in:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (p-1)}{V_p - a} = a^{\frac{p-3}{2}} + V_p, \text{ mithin}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (p-1) = (V_p - a)\left(a^{\frac{p-3}{2}} + V_p\right)$$
$$= V_p a^{\frac{p-3}{2}} - a^1 \cdot a^{\frac{p-3}{2}} + (V_p)^2 - a V_p$$
$$= V_p - a^{\frac{p-1}{2}}, \text{ daher}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1) + a^{\frac{p-1}{2}} = V_p,$$

d. h. die Summe links ist durch p teilbar.

58. Ist p eine Primzahl, so ist $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (p-1) + 1$ durch p teilbar. (Wilsons Lehrsatz.)

Beweis. Setzt man im 57. Satze $a = 1$, so ist hier der Teil II des Beweises in Anwendung zu bringen, da 1 ein quadratischer Rest jeder Zahl ist. Folglich ist

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (p-1) + 1^{\frac{p-1}{2}}, \text{ d. i.}$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (p-1) + 1$$

durch p teilbar.

Beispiel. $p = 7$ giebt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 720 + 1 = 721$ durch 7 teilbar.

59. Ist p eine Primzahl, a durch p nicht teilbar, so ist

$$a^{\frac{p+1}{2}} - 1 \text{ oder } a^{\frac{p-1}{2}} + 1$$

durch p teilbar, je nachdem a ein quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist. (Eulers Lehrsatz.)

Beweis. Da nach dem 57. Satze

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (p-1) + 1 + \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \text{ oder}$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (p-1) + 1 - \left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$$

durch p teilbar ist, je nachdem a ein quadratischer Rest oder ein quadratischer Nichtrest ist, nach dem 58. Satze aber

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . (p-1) + 1$$

stets durch p teilbar ist, so mufs auch im 1. Falle $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ und im 2. Falle $a^{\frac{p-1}{2}} + 1$ durch p teilbar sein.

Zusatz. Da entweder $a^{\frac{p-1}{2}} + 1$ oder $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p teilbar ist, so mufs

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) = \left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1^2 = a^{p-1} - 1$$

stets durch p teilbar sein, sobald p Primzahl und a durch p nicht teilbar ist.

Der Fermat'sche Lehrsatz (s. 48. Satz) ist mithin nur ein specieller Fall des 57. Satzes.

§. 69. Wurzellehre.

1. Die Entstehung des Radicierens und der Wurzel, sowie die bei denselben auftretenden Begriffe und technischen Ausdrücke findet man in §. 16, welcher Paragraph daher für die folgenden Sätze die notwendige Grundlage bildet.

Hier mag nur noch der strenge Beweis für den Satz gegeben werden, dafs $\sqrt[n]{a}$ für die ganze und positive Zahl n und die ganze Zahl a entweder wieder eine ganze Zahl oder eine irrationale Zahl (s. §. 45, 6 und 7) sein mufs, also kein gemeiner Bruch (oder periodischer Decimalbruch) sein kann.

Geht $\sqrt[n]{a}$ nicht auf, ist also $\sqrt[n]{a}$ keine ganze Zahl, so würde $\sqrt[n]{a}$ zwischen zwei ganzen Zahlen liegen, d. h. es müfste $\sqrt[n]{a}$ ge-

brochen sein. Angenommen nun, es wäre $\sqrt[n]{a}=$ dem rationalen Bruch $\frac{b}{c}$, wo also b und c ganze rationale Zahlen sein mögen, so müfste nach §. 16, 3:

$$\left(\frac{b}{c}\right)^n = \text{der ganzen Zahl } a, \text{ d. i.}$$

$$\frac{b^n}{c^n} = \text{,, \quad ,, \quad ,, } a \text{ sein.}$$

Da aber $\frac{b}{c}$ keine ganze Zahl, also b prim zu c ist, so ist auch b^n prim zu c^n (s. §. 68, 30) und folglich $\frac{b^n}{c^n}$ keine ganze Zahl ($=a$), mithin die hier gemachte Annahme unmöglich, daher kann $\sqrt[n]{a}$ nicht rational sein.

2. Beweisführung der Wurzelsätze.

Die Wurzelgleichung $\sqrt[n]{a}=b$ ist aus $b^n=a$ entstanden, folglich ist die Wurzelgleichung $\sqrt[n]{a}=b$ richtig, wenn $b^n=a$ ist, wo b jene Wurzel, n der Wurzelexponent, b die Wurzelbasis. Oder:

Die Wurzelgleichung (resp. Wurzel) ist richtig, wenn

$$\text{„Wurzel}^{\text{Wurzelexponent}} = \text{Wurzelbasis“}.$$

Anmerkung. In der Folge mag Wurzel stets mit W., Wurzelexponent mit Wx., Wurzelbasis mit Wb. abgekürzt werden. Mithin ist die Wurzelgleichung richtig, wenn

$$\text{„W}^{\text{Wx}} = \text{Wb“ ist.}$$

Beispiele.

$\sqrt[3]{1000}=10$ ist richtig, weil $\text{W}^{\text{Wx}} = 10^3 = 1000 = \text{Wb}$.

$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=a-b$ ist richtig, weil

$$\text{W}^{\text{Wx}} = (a-b)^2 \text{ [s. §. 16, 4]} = a^2-2ab+b^2 = \text{Wb}.$$

3. Es ist $\sqrt[3]{8^3}=8$, allgemein: $\sqrt[n]{a^n}=a$.

Radiciert man eine Potenz mit ihrem Potenzexponent, so erhält man die Basis. Oder:

Gleiche Wurzel- und Potenzexponenten heben sich, wenn sich der Potenzexponent unterhalb des Wurzelzeichens befindet.

Dieser Satz ist zwar schon unmittelbar aus der genetischen Definition der Wurzel abgeleitet (s. §. 16, 2, II), er kann aber auch durch vorstehenden 2. Satz **bewiesen** werden.

Man unterscheide in $\sqrt[n]{a^n} = a$:
Wx. Wb. W.

Da nun $\mathrm{W}^{\mathrm{Wx}} = a^n = \mathrm{Wb}$ ist, so ist der Satz richtig.

Beispiele. $\sqrt[3]{x^3} = x$; $\sqrt[x]{2^x} = 2$.

$\sqrt{a^2} = a$, denn es ist dies $\sqrt[2]{a^2} = a$ (s. §. 16, 4).

$\sqrt[4]{(-7)^4} = -7$; $\sqrt{(4a-3b)^2} = 4a - 3b$.

4. Umkehrung: $a = \sqrt[n]{a^n}$.

Beispiele. $6 = \sqrt[3]{6^3}$; $x + 1 = \sqrt{(x+1)^2}$.

$5 = \sqrt{5^2}$ ($= \sqrt{25}$, wenn kein Fehler entsteht — s. 30. Satz).

$-3 = \sqrt[5]{(-3)^5} = \sqrt[5]{-243}$.

5. Ist die Wurzelgleichung richtig, so mufs auch $\mathrm{W}^{\mathrm{Wx}} = \mathrm{Wb}$ sein, weil aus $b^n = a$ die Form $\sqrt[n]{a} = b$ entstanden ist. Ist z. B. $\sqrt[13]{8192} = 2$ richtig, so mufs auch $2^{13} = 8192$ sein.

6. Gleiches mit Gleichem radiciert, giebt Gleiches.

$$\frac{\text{Ist } A = B \text{ (Voraussetzung)}}{\text{so ist auch } \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B} \text{ (Behauptung).}}$$

Man schreibt auch:

$$\frac{\left.\begin{matrix} A = B \\ n = n \end{matrix}\right\} \text{(Voraussetzung)}}{\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B} \text{ (Behauptung).}}$$

Beweis. $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{A}$ (s. 1. Axiom).
geht, wenn an die Stelle des A der rechten Seite das ihm gleiche B (s. Vorauss.) gesetzt wird, über in:

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}.$$

Zusatz. Ist $A = B$
und $n = r$

so ist auch $\sqrt[n]{A} = \sqrt[r]{B}$. (Vergl. §. 7, 9, Zus.).

A. Einerlei Basen.

7. $\sqrt[1]{a} = a$.

Beweis. Auf der linken Seite hat man $Wb = a$, $Wx = 1$, auf der rechten Seite $W = a$ zu unterscheiden. Da nun

$$W^{Wx} = a^1 = a = Wb,$$

so ist der Satz richtig.

Beispiele. $\sqrt[1]{x} = x$, $\sqrt[1]{-10} = -10$, $\sqrt[1]{a+b} = a + b$.

8. $\sqrt[k]{1} = 1$, wenn k nicht $= 0$ ist.

Beweis. $W^{Wx} = 1^k = 1 = Wb$.

Beispiele. $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[14]{1} = 1$, $\sqrt[x]{1} = 1$.

Anmerkung. Spätere Sätze zeigen, dafs $\sqrt[k]{1}$ stets k verschiedene Werte hat.

9. I. $\sqrt[a]{0} = 0$, wenn a eine endliche Zahl ist.

Beweis. $W^{Wx} = 0^a = 0 = Wb$.

II. $\sqrt[a]{\infty} = \infty$, wenn a eine endliche Zahl ist.

Beweis. $W^{Wx} = \infty^a = \underset{1}{\infty} \cdot \underset{2}{\infty} \cdot \underset{3}{\infty} \ldots . \underset{a}{\infty} = \infty$.

10. I. Die ganzzahlige Wurzel aus einer ganzen (und positiven) Zahl ist kleiner als die Basis.

Beweis. Ist $\sqrt[n]{a} = b$, so ist $b^n = a$. Da nun n und a ganze (positive) Zahlen sind, so ist nach §. 57, 2, III: $b < b^n$,

$$\text{d. i. } \sqrt[n]{a} < a.$$

Beispiel. $\sqrt[3]{512} = 8$, d. i. $\sqrt[3]{512} < 512$.

II. Die ganzzahlige Wurzel aus einem echten (und positiven) Bruche ist gröſser als die Basis.

Beweis. Ist $\sqrt[n]{a} = b$, so ist $b^n = a$. Da nun n eine ganze (positive) Zahl, $a < 1$ und > 0, so ist nach §. 57, 16, 3. Zus.:

$$b > b^n, \text{ d. i. } \sqrt[n]{a} > a.$$

Beispiel. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$, d. i. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} > \frac{8}{27}$.

Zusatz. Die ganzzahlige Wurzel aus jeder positiven Zahl (gröſser oder kleiner als 1) liegt stets zwischen der Wurzelbasis und der Zahl 1.

Beispiele. $\sqrt[5]{\frac{3}{4}}$ liegt zwischen $\frac{3}{4}$ und 1, $\sqrt{1\frac{3}{8}}$ zwischen $1\frac{3}{8}$ und 1.

11. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Eine Wurzel mit ihrem Wurzelexponent potenziert, giebt die Wurzelbasis.

Beweis. Die Gleichung $\sqrt[n]{a} = \underbrace{\left(\sqrt[n]{a}\right)}$ ist apodiktisch richtig.

Unterscheidet man nun Wx Wb W,
so muſs nach dem 5. Satze:

$$W^{Wx} = Wb \text{ sein, d. i.}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a!$$

Beispiele.

$$\left(\sqrt[4]{9}\right)^4 = 9;\ \left(\sqrt{n-1}\right)^2 = n - 1;$$

$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9 \cdot 5 = 45;$$

$$10\sqrt{2} \cdot -4\sqrt{2} = -40\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -40\left(\sqrt{2}\right)^2$$
$$= -40 \cdot 2 = -80;$$

$$\left(4\sqrt{7} + 5\right)^2 = \left(4\sqrt{7}\right)^2 + 2 \cdot 4\sqrt{7} \cdot 5 + 5^2$$
$$= 16 \cdot 7 + 40\sqrt{7} + 25 = 137 + 40\sqrt{7};$$

$$\left(a\sqrt{b} + c\sqrt{d}\right)\left(a\sqrt{b} - c\sqrt{d}\right) = \left(a\sqrt{b}\right)^2 - \left(c\sqrt{d}\right)^2$$
$$= a^2 b - c^2 d;$$

$$\left(\frac{11\sqrt{10}}{2}\right)^2-\left(\frac{15}{\sqrt{3}}\right)^2+2\,[5\sqrt{3(\sqrt{2}-1)}]^2$$
$$=\frac{121\cdot 10}{4}-\frac{225}{3}+2\cdot 25\,[\sqrt{3(\sqrt{2}-1)}]^2$$
$$=302{,}5-75+50\cdot 3(\sqrt{2}-1)$$
$$=77{,}5+150\sqrt{2};$$

$$(5\sqrt{a}+4\sqrt{c})^2+(10\sqrt{a}-2\sqrt{c})^2$$
$$=25a+2\cdot 5\sqrt{a}\cdot 4\sqrt{c}+16c+100a-2\cdot 10\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{c}+4c$$
$$=125a+20c;$$

$$\frac{11a-7b}{6\sqrt{a-b}}-\frac{5\sqrt{a-b}}{4}$$
$$=\frac{22a-14b}{12\sqrt{a-b}}-\frac{5\sqrt{a-b}\cdot 3\sqrt{a-b}}{4\cdot 3\sqrt{a-b}}$$
$$=\frac{22a-14b-15(\sqrt{a-b})^2}{12\sqrt{a-b}}$$
$$=\frac{22a-14b-15(a-b)}{12\sqrt{a-b}}=\frac{7a+b}{12\sqrt{a-b}};$$

$$(5-2\sqrt{3})^4=[(5-2\sqrt{3})^2]^2=[25-20\sqrt{3}+4\cdot 3]^2$$
$$=(37-20\sqrt{3})^2=1369-1480\sqrt{3}+400\cdot 3$$
$$=2569-1480\sqrt{3};$$

$$\sqrt[5]{7}^{(\sqrt[3]{5})^3}=(\sqrt[5]{7})^5=7.$$

1. Zusatz. Die Multiplication gleicher Wurzeln ist nicht nach einem spätern Satze durch Multiplication der Wurzelbasen, sondern durch vorstehenden Satz auszuführen. Also nicht

$$\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{49}=7, \text{ sondern } \sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=(\sqrt{7})^2=7.$$

Offenbar würde auch bei Aufgaben wie $\sqrt{578}\cdot\sqrt{578}$ jene Berechnungsweise sehr unbequem werden.

$$(9-2\sqrt{13})(5+3\sqrt{13})=45-10\sqrt{13}+27\sqrt{13}-6\cdot 13$$
$$=-33+17\sqrt{13}.$$

$$\sqrt{a}-\frac{2}{3\sqrt{a}}+\frac{4}{5a\sqrt{a}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}\cdot\left[\sqrt{a}-\frac{2}{3\sqrt{a}}+\frac{4}{5a\sqrt{a}}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\left[a-\frac{2}{3}+\frac{4}{5a}\right].$$

$$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot=(\sqrt[3]{x})^3=x.$$

2. Zusatz. $(\sqrt[n]{a})^{n+r}=(\sqrt[n]{a})^n.(\sqrt[n]{a})^r=a(\sqrt[n]{a})^r.$

Allgemeiner: $(\sqrt[n]{a})^{nx+r}=(\sqrt[n]{a})^{nx}.(\sqrt[n]{a})^r$

$$=\left((\sqrt[n]{a})^n\right)^x.(\sqrt[n]{a})^r=a^x(\sqrt[n]{a})^r.$$

Beispiele.

$$(\sqrt{a})^3=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{a})^1=a\sqrt{a};$$
$$(\sqrt{-7})^3=(\sqrt{-7})^2\cdot\sqrt{-7}=-7\sqrt{-7};$$
$$(\sqrt[3]{x})^4=(\sqrt[3]{x})^3.(\sqrt[3]{x})^1=x\sqrt[3]{x};$$
$$(5\sqrt{3}-9)^3=(5\sqrt{3})^3-3\cdot(5\sqrt{3})^2\cdot 9+3\cdot 5\sqrt{3}\cdot 9^2-9^3$$
$$=125\cdot 3\sqrt{3}-3\cdot 25\cdot 3\cdot 9+3\cdot 5\cdot 81\sqrt{3}-729$$
$$=1590\sqrt{3}-2754;$$
$$(6-7\sqrt{-5})^3=6^3-3\cdot 6^2\cdot 7\sqrt{-5}+3\cdot 6\cdot(7\sqrt{-5})^2$$
$$-(7\sqrt{-5})^3$$
$$=216-756\sqrt{-5}+18\cdot 49\cdot(-5)$$
$$-343\cdot(-5)\sqrt{-5}$$
$$=-4194+959\sqrt{-5};$$
$$(\sqrt[5]{a})^{31}=(\sqrt[5]{a})^{30}.(\sqrt[5]{a})^1=\left((\sqrt[5]{a})^5\right)^6.\sqrt[5]{a}=a^6\sqrt[5]{a};$$
$$(\sqrt[4]{n})^{11}=(\sqrt[4]{n})^8.(\sqrt[4]{n})^3=\left((\sqrt[4]{n})^4\right)^2.(\sqrt[4]{n})^3=n^2(\sqrt[4]{n})^3.$$

12. Umkehrung. $a=(\sqrt[n]{a})^n.$

Beispiele. $\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$;

$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

13. $\sqrt[n]{a^r} = (\sqrt[n]{a})^r$.

Beweis. $W^{Wx} = \left((\sqrt[n]{a})^r\right)^n = \left((\sqrt[n]{a})^n\right)^r$ [s. §. 57, 10, 1. Zus.]
$= a^r = Wb.$

Da nun auch umgekehrt $(\sqrt[n]{a})^r = \sqrt[n]{a^r}$, so kann man also beliebig den Potenzexponent aufserhalb oder innerhalb der Wurzel setzen.

Beispiele. $(\sqrt[3]{x})^2 = \sqrt[3]{x^2}$;

$(\sqrt[4]{x})^7 = (\sqrt[4]{x})^4 (\sqrt[4]{x})^3 = x\sqrt[4]{x^3}$;

$(\sqrt[6]{-5})^{17} = (\sqrt[6]{-5})^{12} . (\sqrt[6]{-5})^5 = \left((\sqrt[6]{-5})^6\right)^2 . \sqrt[6]{(-5)^5}$
$= (-5)^2 \sqrt[6]{-3125} = 25\sqrt[6]{-3125}.$

$\sqrt[3]{125^8} = (\sqrt[3]{125})^8 = 5^8$;

$(\sqrt[16]{2})^{11}$? Ohne unsern Satz müfste man die 16. Wurzel aus 2 ausziehen und die erhaltene irrationale Zahl 11 mal mit sich selbst multiplicieren. Einfacher daher:

$$\sqrt[16]{2^{11}} = \sqrt[16]{2048}.$$

14. $\sqrt[-n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$. Nimmt man den Wurzelexponent entgegengesetzt, so ist die Basis in ihren reciproken Wert zu verwandeln.

Beweis. $W^{Wx} = \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{-n} = \left(\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^n\right)^{-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$
$= \frac{a}{b} = Wb.$

Beispiele.

$$\sqrt[-3]{\frac{2}{7}}=\sqrt[3]{\frac{7}{2}}=\sqrt[3]{3{,}5};\quad \sqrt[-2]{\frac{1}{9}}=\sqrt[2]{\frac{9}{1}}=\sqrt{9}=3;$$

$$\sqrt[-4]{1\tfrac{2}{3}}=\sqrt[4]{\frac{3}{5}}=\sqrt[4]{0{,}6};\quad \sqrt[a-b]{\frac{1}{c-d}}=\sqrt[b-a]{c-d}.$$

Zusatz. $\sqrt[-a]{0}=\sqrt[a]{\frac{1}{0}}=\sqrt[a]{\infty}=\infty$ (s. 9, II).

15. $\sqrt[nk]{a^{rk}}=\sqrt[n]{a^r}$. Die gleichen Faktoren des Potenz- und Wurzelexponent heben sich.

Beweis. $W^{Wx}=\left(\sqrt[n]{a^r}\right)^{nk}=\left(\left(\sqrt[n]{a^r}\right)^n\right)^k=(a^r)^k$
$=a^{rk}=$ Wb.

Beispiele. $\sqrt[3x]{2^x}=\sqrt[3]{2};\quad \sqrt[2n]{3^{5n}}=\sqrt[2]{3^5}=\sqrt{243}.$

Zusatz. Folglich auch $\left(\sqrt[nk]{a}\right)^{rk}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^r$. [Siehe 13. Satz.]

Beispiel. $\left(\sqrt[2x]{49}\right)^{3x}=\left(\sqrt[2]{49}\right)^3=7^3$.

16. Umkehrung.

$$\sqrt[n]{a^r}=\sqrt[nk]{a^{rk}} \text{ und } \left(\sqrt[n]{a}\right)^r=\left(\sqrt[nk]{a}\right)^{rk}.$$

Man kann den Potenzexponent mit dem Wurzelexponent gegenseitig erweitern.

Beispiele. $\sqrt[2\frac{1}{2}]{a^2}=\sqrt[5]{a^4};\quad \sqrt[1\frac{1}{3}]{x^{\frac{5}{6}}}=\sqrt[8]{x^5};$

$\sqrt[\frac{1}{4}]{(x+1)^{\frac{1}{6}}}$ [mit 12 erweitert] $=\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Anmerkung. Weiter unten wird gezeigt, daſs wohl

$\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}$, aber nicht unbedingt $\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{25}$ ist.

Zusatz. Um zu untersuchen, welcher von den beiden Werten $\sqrt[3]{6}$ und $\sqrt[5]{20}$ der gröſsere ist, bringt man beide Wurzel-

exponenten auf ihr kleinstes gemeinsame Vielfache. Daher $\sqrt[15]{6^6}$ und $\sqrt[15]{20^3}$, d. i. $\sqrt[15]{7776}$ und $\sqrt[15]{8000}$. Mithin ist der 2. Wert der gröfsere.

17. $\sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{r}{k}}} = \sqrt[n]{a^r}$. Gleiche Divisoren des Wurzel- und Potenzexponent heben sich.

Beweis. $W^{Wx} = \left(\sqrt[n]{a^r}\right)^{\frac{n}{k}} = \left(\left(\sqrt[n]{a^r}\right)^n\right)^{\frac{1}{k}} = (a^r)^{\frac{1}{k}}$

$= a^{\frac{r}{k}} =$ Wb.

Beispiele.

$\sqrt[\frac{5}{n}]{2^{\frac{3}{n}}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$; $\sqrt[\frac{2}{x}]{10^{\frac{1}{x}}} = \sqrt[2]{10^1} = \sqrt{10}$.

Zusatz. Folglich auch $\left(\sqrt[n:k]{a}\right)^{r:k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^r$. [S. 13. Satz.]

Beispiel. $\left(\sqrt[3:x]{512}\right)^{4:x} = \left(\sqrt[3]{512}\right)^4 = 8^4$.

18. Umkehrung. $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[\frac{n}{k}]{a^{\frac{r}{k}}}$.

Man kann den Potenzexponent mit dem Wurzelexponent gegenseitig kürzen.

Beispiele. $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[10]{x^5} = \sqrt[2]{x^1} = \sqrt{x}$;

$\sqrt[25]{(-10)^{15}} = \sqrt[5]{(-10)^3} = \sqrt[5]{-1000}$;

$\sqrt[a^2-b^2]{x^{a+b}}$ [durch $a+b$ gekürzt] $= \sqrt[a-b]{x}$.

Zusatz. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^r = \left(\sqrt[\frac{n}{k}]{a}\right)^{\frac{r}{k}}$.

Beispiel. $\left(\sqrt[6]{81}\right)^9 = \left(\sqrt{81}\right)^3 = 9^3$.

19. $\sqrt[n]{a^r}=a^{\frac{r}{n}}$. Für die Wurzel kann man eine Potenz setzen, deren Exponent der Quotient aus dem gegebenen Potenz- und Wurzelexponent ist.

Beweis. $W^{Wx}=\left(a^{\frac{r}{n}}\right)^n=a^{\frac{r}{n}\cdot n}=a^r=Wb.$

Beispiele.

$\sqrt[3]{a^{12}}=a^{\frac{12}{3}}=a^4$; $\sqrt{x^{10}}=\sqrt[2]{x^{10}}=x^{\frac{10}{2}}=x^5$;

$\sqrt[-2]{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{3}:-2}=a^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{6}}}$;

$\sqrt[1^5/_6]{2^{5^1/_2}}=2^{5^1/_2:1^5/_6}=2^3=8$;

$\sqrt[x+1]{3^{x^2-1}}=3^{\frac{x^2-1}{x+1}}=3^{x-1}=\frac{3^x}{3}$;

$\sqrt[a-b]{\frac{x^{a^2}}{x^{b^2}}}=\sqrt[a-b]{x^{a^2-b^2}}=x^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}=x^{a+b}$.

Besonders zu beachten sind:

$\sqrt{a}=\sqrt[2]{a^1}=a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^1}=a^{\frac{1}{3}}$;

$\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{4}}$; $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

1. Zusatz. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^r=\sqrt[n]{a^r}=a^{\frac{r}{n}}$.

Beispiele.

$\left(\sqrt[4]{a}\right)^2=a^{\frac{2}{4}}=a^{\frac{1}{2}}$; $\left(\sqrt[5]{a}\right)^{15}=a^{\frac{15}{5}}=a^3$.

2. Zusatz. $\sqrt[0]{a}=\sqrt[0]{a^1}=a^{\frac{1}{0}}=a^{\infty}$. Ist nun $a>1$, so ist $\sqrt[0]{a}=\infty$ (s. §. 62, 7, 6. Zus.). Ist $a<1$, also ein echter Bruch, so ist $\sqrt[0]{a}=0$ (s. §. 62, 7, 7. Zus.). Ist $a=1$, also $\sqrt[0]{1}$ der gegebene Ausdruck, so ist derselbe unbestimmt, denn

$$\sqrt[0]{1}=\sqrt[0]{1^1}=1^{\frac{1}{0}}=1^{\infty} \text{ (s. §. 57, 2, V).}$$

3. Zusatz. $\sqrt[\infty]{a} = \sqrt[\infty]{a^1} = a^{\frac{1}{\infty}} = a^0 = 1.$

4. Zusatz. $\sqrt[\infty]{0}$ ist ein unbestimmter Ausdruck, denn

$$\sqrt[\infty]{0^1} = 0^{\frac{1}{\infty}} = 0^0 \text{ (s. §. 57, 7, 1. Zus.).}$$

5. Zusatz. $\sqrt[\infty]{\infty}$ ist ein unbestimmter Ausdruck, denn

$$\sqrt[\infty]{\infty^1} = \infty^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0 \text{ (s. §. 57, 7, 2. Zus.).}$$

20. Umkehrung. $a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^r}$. Die Potenz mit gebrochenem Exponent verwandelt man in eine Wurzel aus einer Potenz, wenn man den Nenner des gegebenen Exponent als Wurzelexponent und den Zähler des gegebenen Exponent als Potenzexponent setzt.

Beispiele. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt{a}$;

$$(x+y)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{(x+y)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+y)^1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x+y}};$$

$$5^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{125}}.$$

Die Rechnung mit den Wurzeln erleichtert man sich oft dadurch, dafs man nach dem 19. Satze statt der Wurzeln gebrochene Potenzexponenten einführt. Da das Resultat jedoch besser durch eine möglichst einfache Wurzel, als durch eine Potenz mit gebrochenem Exponent gegeben wird, so ist zum Schlufs der Rechnung noch der vorliegende Satz in Anwendung zu bringen.

Beispiele.

$$\sqrt[4\frac{1}{6}]{2^{7\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{15}{2}:\frac{25}{6}} = 2^{\frac{9}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{9}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^9}} = \frac{1}{\sqrt[5]{512}};$$

$$\sqrt{\frac{14}{\sqrt[3]{14}}} = \sqrt{\frac{14^1}{14^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{14^{1-\frac{1}{3}}} = \sqrt[2]{14^{\frac{2}{3}}} = 14^{\frac{2}{3}:2}$$

$$= 14^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{14};$$

$$\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^1\cdot a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1-\frac{3}{4}-\frac{1}{6}} = a^{-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}};$$

$$\frac{5^{\frac{a}{4n}-2\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{6}-\frac{a}{2n}}} = 5^{\frac{a}{4n}-2\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{a}{2n}} = 5^{\frac{3a}{4n}-2\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3a-10n}{4n}}$$

$$= \sqrt[4n]{5^{3a-10n}};$$

$$x\sqrt[n]{x^{1-n}\sqrt[n]{x^{1-n}\sqrt[n]{x^{1-n}}}} = x\sqrt[n]{x^{1-n}\sqrt[n]{x^{1-n}\cdot x^{\frac{1-n}{n}}}}$$

$$= x\sqrt[n]{x^{1-n}\sqrt[n]{x^{1-n+\frac{1}{n}-1}}} = x\sqrt[n]{x^{1-n}\sqrt[n]{x^{\frac{1}{n}-n}}}$$

$$= x\sqrt[n]{x^{1-n}\cdot x^{\frac{1}{n^2}-1}} = x\sqrt[n]{x^{\frac{1}{n^2}-n}} = x^1\cdot x^{\frac{1}{n^3}-1}$$

$$= x^{\frac{1}{n^3}} = \sqrt[n^3]{x}.$$

$$\frac{\left(\sqrt[5]{x}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{x}\right)^3\cdot\sqrt[-10]{x^3}\cdot\sqrt{x\sqrt[5]{x}}} = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{-\frac{3}{10}}\cdot\sqrt{x^1\cdot x^{\frac{1}{5}}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{-\frac{3}{10}}\cdot\sqrt{x^{\frac{6}{5}}}} = x^{\frac{4}{5}-\frac{3}{4}+\frac{3}{10}-\frac{3}{5}} = x^{-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}};$$

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a^{-1}\sqrt[-2]{a}}\cdot\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^{-1}}}}{a\sqrt[2]{a\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}\cdot\sqrt[-3]{a^{-2}\sqrt[4]{a^3}}}}$$

$$=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a^{-1}\cdot a^{-\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt[3]{a^{2}\cdot a^{-\frac{1}{4}}}}{a\sqrt[-2]{a\sqrt{a^{1}\cdot a^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt[-3]{a^{-2}\cdot a^{\frac{3}{4}}}}}}$$

$$=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a^{-\frac{3}{2}}}\cdot\sqrt[3]{a^{\frac{7}{4}}}}{a\sqrt[-2]{a^{1}\cdot a^{\frac{5}{6}}}\cdot\sqrt[-3]{a^{-\frac{5}{4}}}}}$$

$$=\sqrt[4]{\frac{a^{-\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{7}{12}}}{a^{1}\cdot a^{-\frac{11}{12}}\cdot a^{\frac{5}{12}}}}=\sqrt[4]{a^{-\frac{3}{4}+\frac{7}{12}-1+\frac{11}{12}-\frac{5}{12}}}$$

$$=\sqrt[4]{a^{-\frac{2}{3}}}=a^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{6}}}=\frac{1}{\sqrt[6]{a}}.$$

21. $\sqrt[nr]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}$. Eine Zahl kann man durch ein Produkt radicieren, indem man die Zahl zuerst durch einen beliebigen Faktor dieses Produkts radiciert und die hierdurch entstehende Wurzel alsdann durch den andern Faktor radiciert.

Beweis.

$$W^{Wx}=\left(\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}\right)^{nr}=\left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}\right)^{n}\right)^{r}=\left(\sqrt[r]{a}\right)^{r}=a=\text{Wb}.$$

Beispiele. $\sqrt[12]{625}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{625}}=\sqrt[3]{5}$.

$\sqrt[4]{10000}=\sqrt{\sqrt{10000}}=\sqrt{100}=10$. Um also die 4. Wurzel auszuziehen, kann man die Quadratwurzel 2 mal nach einander ausziehen.

$\sqrt[6]{125}=\sqrt[2]{\sqrt[3]{125}}=\sqrt{5}$;

$\sqrt[6]{81} = \sqrt[3]{\sqrt{81}} = \sqrt[3]{9}$. Um die 6. Wurzel auszuziehen, kann man also zuerst die Kubikwurzel und dann die Quadratwurzel, oder auch erst die Quadrat- und dann die Kubikwurzel ausziehen.

$$\sqrt[9]{x} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}; \quad \sqrt[4n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt{\sqrt{a}}}; \quad \sqrt[12]{n} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{n}}}.$$

Zusatz. Die ganzzahlige Wurzel aus jeder beliebigen Zahl nähert sich der Zahl 1 immer mehr, je gröfser der Wurzelexponent wird. So ist z. B. $\sqrt[4]{10000} = 10$ der Zahl 1 näher als $\sqrt[2]{10000} = 100$; $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$ der Zahl 1 näher als $\sqrt[2]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$.

Beweis. Für $a > 1$ ist nach Satz 11, I: $\sqrt[nr]{a}$, d.i. $\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}$ kleiner als die Wurzelbasis $\sqrt[r]{a}$ (dieser n^{ten} Wurzel) und $\sqrt[r]{a} < a$. Für $a < 1$ ist nach Satz 11, II: $\sqrt[nr]{a}$, d. i. $\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}}$ gröfser als die Wurzelbasis $\sqrt[r]{a}$ und $\sqrt[r]{a} > a$.

22. Umkehrung: $\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[nr]{a}$. Anstatt aus einer Wurzel eine Wurzel zu ziehen, kann man die ursprüngliche Wurzelbasis sogleich mit dem Produkt der beiden Wurzelexponenten radicieren.

Beispiele. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3.3]{5} = \sqrt[9]{5}$;

$$\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{x}} = \sqrt[2.2]{x} = \sqrt[4]{x};$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}} = \sqrt[2.3.2]{a} = \sqrt[12]{a};$$

$$\sqrt[-2]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{n}}} = \sqrt[-30]{n} = \sqrt[30]{\frac{1}{n}}.$$

Zusatz. Daher auch $\sqrt[n]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[nr]{a} = \sqrt[r]{\sqrt[n]{a}}$.

Beispiele. $\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[3]{2}$;

$$\sqrt[x]{\sqrt[5]{32^x}} = \sqrt[5]{\sqrt[x]{32^x}} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

23. Ist k eine ungerade Zahl, so ist $\sqrt[k]{-a} = -\sqrt[k]{a}$.

Oder, weil man die ungerade Zahl mit $2n+1$ bezeichnet: $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$. Oder: Die Basis einer ungeradzahligen Wurzel kann man mit -1 multiplicieren, wenn man das Vorzeichen der Wurzel ändert.

Beweis. $W^{Wx} = \left(-\sqrt[k]{a}\right)^k = -\left(\sqrt[k]{a}\right)^k$ [weil k ungerade ist] $= -a = $ Wb.

Beispiele. $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -5$;

$$\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2;\ 1 - \sqrt[3]{-x} = 1 + \sqrt[3]{x};$$

$$2a + \sqrt[7]{1-3b} = 2a - \sqrt[7]{3b-1}.$$

$$n - \sqrt[3]{-4-5x} = n + \sqrt[3]{4+5x}.$$

Anmerkung. Für ein gerades k ist jedoch nicht $\sqrt[k]{-a} = -\sqrt[k]{a}$, weil $\left(-\sqrt[k]{a}\right)^k = +\left(\sqrt[k]{a}\right)^k = +a$, dieses Resultat aber nicht jener Wurzelbasis $(-a)$ gleich ist.

Die Ausdrücke $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{1-3x}$ müssen daher (vorläufig) unverändert stehen bleiben.

1. Zusatz. Für ein ungerades k ist daher $\sqrt[k]{-1} = -\sqrt[k]{1} = -1$. Z. B. $\sqrt[7]{-1} = -1$.

2. Zusatz. Ist die Wurzel aus einer negativen Zahl gegeben und im Wurzelexponent eine ungerade Zahl (>2) enthalten, so zieht man nach dem 22. Satze zuerst aus der negativen Basis die ungeradzahlige Wurzel.

Beispiele. $\sqrt[14]{-1} = \sqrt{\sqrt[7]{-1}} = \sqrt{-\sqrt[7]{1}} = \sqrt{-1}$;

$$\sqrt[12]{-343} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{-343}} = \sqrt[4]{-\sqrt[3]{343}} = \sqrt[4]{-7}.$$

$$\sqrt[18]{-100} = \sqrt{\sqrt[9]{-100}} = \sqrt{-\sqrt[9]{100}}.$$

24. Die Werte der Quadratwuzrel.

I. Die Quadratwurzel aus einer einfachen Zahl hat stets 2 einander entgegengesetzte Werte.

$\sqrt{49}$ ist sowohl $+7$, als auch -7; denn

1) $\sqrt{49} = +7$, weil $W^{Wx} = (+7)^2 = +49 = Wb$;

2) $\sqrt{49} = -7$, „ „ $= (-7)^2 = +49 = Wb$.

Man schreibt daher $\sqrt{49} = \pm 7$, gelesen: „$\sqrt{49}$ ist $= +$ oder -7".

$$\sqrt{\frac{1}{25}} = \pm \frac{1}{5}; \text{ denn } \left(\pm \frac{1}{5}\right)^2 = +\left(\frac{1}{5}\right)^2 = +\frac{1}{25} = Wb.$$

$$\sqrt{6\tfrac{1}{4}} = \pm 2\tfrac{1}{2}; \text{ denn } (\pm 2\tfrac{1}{2})^2 = +\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6\tfrac{1}{4}.$$

II. $\sqrt{81} - 3\sqrt{16} + 5\sqrt{36} - 7\sqrt{1} - 13 = ?$

Bezeichnet hier jeder der Ausdrücke $\sqrt{81}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{1}$ eine Anzahl von Individuen, die nur positiv sein kann (§. 1, 15 u. §. 51, 1, h), so erhält der gegebene Ausdruck die Bedeutung:

$$(+9) - 3(+4) + 5(+6) - 7(+1) - 13$$
$$= 9 - 12 + 30 - 7 - 13 = 7.$$

Bedeuten jedoch dieselben Wurzeln die entgegengesetzten, also negativen Werte ($\sqrt{81} = -9$, $\sqrt{16} = -4$ u. s. w.), so erhielte man:

$$(-9) - 3(-4) + 5(-6) - 7(-1) - 13$$
$$= -9 + 12 - 30 + 7 - 13 = -33.$$

Hieraus folgt, dass man die beiden Werte des gegebenen Ausdrucks durch

$$\pm 9 - 3(\pm 4) + 5(\pm 6) - 7(\pm 1) - 13$$

wiedergeben kann und dafs man bei der Berechnung eines solchen Doppelzeichen enthaltenden Ausdrucks nur entweder überall das obere oder nur überall das untere Zeichen nehmen darf.

Führt man hier die Multiplication aus, wobei man z. B. im 2. Gliede mit dem obern Zeichen $-3 \cdot +4 = -12$, mit dem untern Zeichen $-3 \cdot -4 = +12$ erhält, so ergiebt sich:

$$\pm 9 \mp 12 \pm 30 \mp 7 - 13.$$

2. Beispiel. $20 - 3\sqrt{49} - 2\sqrt{100} + 9\sqrt{4}$

$$= 20 - 3(\pm 7) - 2(\pm 10) + 9(\pm 2)$$
$$= 20 \mp 21 \pm 20 \pm 18.$$

Die Berechnung dieses Ausdrucks giebt mit dem obern Zeichen

$$20 - 21 + 20 + 18 = 37,$$

mit dem untern Zeichen

$$20 + 21 - 20 - 18 = 3.$$

III. $a \pm (b + c - d)$ ist mit dem obern Zeichen
$$a + (b + c - d) = a + b + c - d,$$
mit dem untern Zeichen
$$a - (b + c - d) = a - b - c + d.$$
Umgekehrt mufs nun auch
$$a \pm b \pm c \mp d = a \pm (b + c - d),$$
oder $m \mp n \pm p - q \mp r = m - q \mp (n - p + r)$ sein.

Offenbar wird der Ausdruck dadurch übersichtlicher, dafs man die Glieder mit Doppelzeichen durch ein einziges Doppelzeichen vereinigt.

25. Die geradzahlige Wurzel aus negativen Zahlen.

I. $\sqrt{-16}$ wäre die Zahl, welche mit dem Wurzelexponent 2 potenziert die Wurzelbasis -16 giebt. Da nun jede positive oder negative Zahl in der 2. Potenz stets wieder eine positive Zahl, nie aber -16 geben kann, so kann $\sqrt{-16}$ auch keiner positiven oder negativen Zahl gleich sein. Wäre z. B. $\sqrt{-16} = -4$, so müfste $W^{Wx} = -16$ sein, es ist aber $W^{Wx} = (-4)^2 = +16$.

Eben so kann für $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[8]{-\frac{1}{3}}$, $\sqrt[10]{-123{,}4}$ u. s. w. keine positive oder negative Zahl gefunden werden, da eine solche in der 4., 6., 8., 10. Potenz ein positives Resultat, nicht aber -16, -1, $-\frac{1}{3}$ u. s. w. geben würde.

Allgemein: Die geradzahlige Wurzel aus einer negativen Zahl kann weder durch eine positive noch negative Zahl dargestellt werden, ihr Wert erscheint uns daher mit Rücksicht auf die bisherigen Sätze und Begriffe vorläufig vollständig unklar und unverständlich.

Die Zahlen teilt man demnach ein in reelle und imaginäre*). Die reellen (möglichen) Zahlen umfassen die uns bekannten positiven und negativen Zahlen, liegen also zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ innerhalb der in §. 51, 1, f gegebene Linie Y. Die imaginären (unmöglichen) Zahlen können vorläufig nur durch die geradzahligen Wurzeln aus negativen Zahlen angedeutet werden. Dennoch sind dieselben keine sinnlosen Zahlen, vielmehr werden schon die nächsten Sätze denselben eine bestimmtere Bedeutung geben. Für die höhere Mathematik sind sie sogar von gröfster Wichtigkeit.

II. Die imaginäre Quadratwurzel ist gleichfalls zweideutig, denn es ist $\sqrt{-3} = \pm \sqrt{-3}$, weil

*) Das „g“ ist hier nicht wie „sch“, sondern wie in dem Worte „Gold“ zu lesen.

$$W^{Wx} = (+\sqrt{-3})^2 = +(\sqrt{-3})^2 = +(-3) = -3 = Wb;$$

aber auch $\sqrt{-3} = -\sqrt{-3}$, weil

$$W^{Wx} = (-\sqrt{-3})^2 = +(\sqrt{-3})^2 = +(-3) = -3 = Wb.$$

III. Die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ kürzt man (nach Gaufs) mit i ab. Statt $4 + 3\sqrt{-1}$ schreibt man daher $4 + 3i$, statt

$$-7 - 2\sqrt{-1}: \ -7 - 2i.$$

Es ist $\sqrt{-25}$ imaginär, zugleich aber $\sqrt{-25} = 5i$, weil

$$W^{Wx} = (5i)^2 = 25\,i^2 = 25 \cdot (\sqrt{-1})^2 = 25\,(-1) = -25 = Wb.$$

Hieraus folgt, dafs nicht blofs $i = \sqrt{-1}$, sondern auch jedes Vielfache von i imaginär ist.

IV. Potenzen von i.

$i^0 = +1$ (s. §. 57, 7); $\quad i^1 = i$;

$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$; $\quad i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$;

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = +1$; $\quad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$;

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$; $\quad i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$;

$i^8 = (i^4)^2 = 1^2 = 1$; $\quad i^9 = (i^4)^2 \cdot i = 1 \cdot i = i$ u. s. w.

Die Werte $1, i, -1, -i$ wiederholen sich mithin cyklisch. Führt man allgemein für die Exponenten Vielfache von 4 vermehrt um 0, 1, 2, 3 ein, so ist:

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1;$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i;$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1;$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i.$$

Die Potenzen von i kann man hiernach schnell reducieren, indem man für die Exponenten nur die Reste setzt, die sich bei der Division durch 4 ergeben.

Beispiele. $i^{42} = i^2 = -1$; $\quad i^{57} = i^1 = i$;

$i^{23} = i^3 = -i$; $\quad i^{68} = i^0 = 1$.

V. Das Rechnen mit Ausdrücken, welche i enthalten.

$$(a + bi)\,(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2$$
$$= ac + bci + adi + bd\,(-1).$$

Enthält ein Ausdruck reelle und imaginäre Glieder, so setzt man jene stets voran, die imaginären aber vereinigt man durch das Ausheben des i. Daher:

$$= ac - bd + (bc + ad)\,i.$$

$$(-11+4i)(5-2i) = -55+20i+22i-8i^2$$
$$= -55+42i-8(-1) = -47+42i.$$
$$(-13-7i)^2 = (-13)^2+2\cdot(-13)(-7i)+(-7i)^2$$
$$= 169+182i+49i^2 = 120+182i.$$
$$(4a+3bi)^2 = 16a^2+24abi+9b^2i^2 = 16a^2-9b^2+24abi.$$
$$(a\pm bi)^3 = a^3\pm 3a^2bi+3ab^2i^2\pm b^3i^2$$
$$= a^3\pm 3a^2bi+3ab^2(-1)\pm b^3(-i)$$
$$= a^3-3ab^2\pm(3a^2b-b^3)i.$$
$$(a\pm bi)^4 = a^4\pm 4a^3bi+6a^2b^2i^2\pm 4ab^3i^3+b^4i^4$$
$$= a^4-6a^2b^2+b^4\pm(4a^3b-4ab^3)i.$$
$$(2-3i)^5 = 2^5-5\cdot 2^4\cdot 3i+10\cdot 2^3\cdot 3^2i^2-10\cdot 2^2\cdot 3^3i^3$$
$$+5\cdot 2\cdot 3^4i^4-3^5i^5$$
$$= 32-240i+720(-1)-1080(-i)+810\cdot(+1)$$
$$-243\cdot i$$
$$= 32-240i-720+1080i+810-243i$$
$$= 122+597i.$$

26. Die Werte der 3. und 4. Wurzel.

I. Die 3. Wurzel (Kubikwurzel).

a. Die Kubikwurzel aus einer positiven Zahl kann nur einen reellen und zwar positiven Wert haben, da der Wurzelwert, auf die 3. Potenz erhoben, die positive Wurzelbasis geben soll. So kann $\sqrt[3]{+8}$ nur $=+2$ sein, weil $W^{Wx}=(+2)^3=+8=Wb$. Eben so ist $\sqrt[3]{+1}=+1$, weil $(+1)^3=+1=Wb$. Jede andere positive Zahl aufser $+2$ würde in der 3. Potenz mehr oder weniger als $+8$ geben. $\sqrt[3]{8}$ kann aber auch keine negative Zahl sein, da eine solche in der 3. Potenz wieder eine negative Zahl, nicht aber die Wb, nämlich $+8$ giebt.

b. Die Kubikwurzel aus einer negativen Zahl kann nur einen reellen und zwar negativen Wert haben. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{-8}=-2,\ \text{weil}\ (-2)^3=-8=Wb;$$
$$\sqrt[3]{-1}=-1,\ \text{weil}\ (-1)^3=-1=Wb.$$

Jede andere negative oder positive Zahl aufser -2 kann in der 3. Potenz die Wurzelbasis -8 nicht geben.

c. Um zu untersuchen, ob die 3. Wurzel aufser diesem einen reellen Werte noch andere Werte hat, die dann offenbar imaginär sein müfsten, ist zu berücksichtigen, dafs aus $2^3 = 8$ die Wurzelgleichung $\sqrt[3]{8} = 2$ entsteht, mithin aus der im 25. Satze, V enthaltenen Gleichung:

$$(a \pm bi)^3 = a(a^2 - 3b^2) \pm b(3a^2 - b^2)i$$

in gleicher Weise

$$\sqrt[3]{a(a^2 - 3b^2) \pm b(3a^2 - b^2)i} = a \pm bi \text{ folgen mufs.}$$

Um hier das i in der Wurzelbasis verschwinden zu lassen, setzen wir

$$3a^2 - b^2 = 0, \quad \text{folglich } b^2 = 3a^2$$
$$\text{oder } b = \sqrt{3a^2}$$

und es entsteht:

$$\sqrt[3]{a(a^2 - 3 \cdot 3a^2) \pm b \cdot 0 \cdot i} = a \pm \sqrt{3a^2} \cdot i, \text{ oder}$$
$$\sqrt[3]{a(-8a^2) \pm 0} = a \pm \sqrt{3a^2} \cdot i, \text{ d. i.}$$
$$\sqrt[3]{-8a^3} = a \pm \sqrt{3a^2} \cdot i \; \ldots\ldots \; (Y)$$

Setzt man hier $a = \frac{1}{2}$, so ergiebt sich

$$\sqrt[3]{-8 \cdot \frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{3 \cdot \frac{1}{4}} \cdot i \text{ oder}$$
$$\sqrt[3]{-1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i.$$

Setzt man in Y: $a = -\frac{1}{2}$, so entsteht:

$$\sqrt[3]{-8 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot i, \text{ d. i.}$$
$$\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i.$$

$\sqrt[3]{1}$ hat also aufser dem reellen Werte $+1$ noch die beiden Werte

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i \text{ und } -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i,$$

$\sqrt[3]{-1}$ aufser dem reellen Werte -1 noch die beiden Werte

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i \text{ und } \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i.$$

Hier mag noch die Probe ihren Platz finden, ob auch wirklich der Wurzelwert $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i$ mit dem Wx 3 potenziert die Wb -1 giebt:

$$\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i+3\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i\right)^2$$
$$+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i\right)^3$$
$$=\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot(-1)$$
$$+\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot(-i) \text{ (s. 11. Satz, 2, Zus.)}$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i-1\tfrac{1}{8}-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i$$
$$=-1!$$

d. Offenbar kann a in der Gleichung Y gröfser oder kleiner als $\pm\frac{1}{2}$ genommen werden, so dafs $-8a^3$ jede positive oder negative Zahl werden kann. Setzt man z. B. $a=-1{,}71$, so erhält man aus Y:

$$\sqrt[3]{-8\cdot(-1{,}71)^3}=-1{,}71\pm\sqrt{3\cdot(-1{,}71)^2}\cdot i, \text{ oder}$$
$$\sqrt[3]{-8\cdot(-5)}=-1{,}71\pm\sqrt{3\cdot 2{,}92}\cdot i, \text{ d. i.}$$
$$\sqrt[3]{40}=-1{,}71\pm\sqrt{8{,}8}\cdot i.$$

Mithin hat $\sqrt[3]{40}$ aufser dem reellen Werte 3,42 (denn $3{,}42^3=40$) noch die beiden Werte

$$-1{,}71+\sqrt{8{,}8}\cdot i \text{ und } -1{,}71-\sqrt{8{,}8}\cdot i.$$

e. Da für $\sqrt[3]{40}$ aufser 3,42 kein anderer reeller Wert vorhanden sein kann (s. Abschn. a), so müssen offenbar die beiden Werte $-1{,}71\pm\sqrt{8{,}8}\cdot i$ imaginär sein, wie sich schon aus dem darin enthaltenen i vermuten läfst.

Dies mufs aber für jede 3. Wurzel gelten und wir wissen somit, dafs

1) die 3. Wurzel stets 3 Werte und zwar 1 reellen und 2 imaginäre hat;
2) dafs die imaginären Werte einer Wurzel nicht blofs in der einfachen Form i oder αi, sondern auch als Summe von reellen Zahlen ($-1{,}71$ im letzten Beisp.) und einem Vielfachen von i $\left(\sqrt{8{,}8}\cdot i\right)$ auftreten.

f. Die imaginären Werte, welche aus einer reellen Zahl und einem Vielfachen von i „zusammengesetzt" sind, nennt man daher auch complexe Zahlen.

$13 + 5i$, $-7 - 2i$ sind complexe Zahlen. Die allgemeine Form derselben ist demnach $a + bi$, wo a und b positive oder negative Zahlen bedeuten.

Anmerkung. Vermehrt man die reelle Zahl 13 um die imaginäre Zahl $5i$, so ist die Summe nicht reell, sondern vollständig imaginär, eben so wie die Summe aus einem endlichen und einem unendlichen Decimalbruche kein endlicher, sondern ein unendlicher Decimalbruch wird.

II. Die 4. Wurzel (Biquadratwurzel).

a. Die 4. Wurzel aus einer positiven Zahl hat 2 reelle, einander entgegengesetzte Werte und 2 imaginäre Werte (Vielfache von i). So hat $\sqrt[4]{81}$ die vier Werte: $+3$, -3, $3i$, $-3i$, denn jeder dieser Werte giebt in der 4. Potenz: $+81$; z. B.:

$$(-3i)^4 = +(3i)^4 = 81\cdot i^4 = 81\cdot 1 = 81 = \text{Wb}.$$

b. Die 4. Wurzel aus einer negativen Zahl ist nach dem 25. Satze imaginär, jedoch kann dieselbe weder $\pm i$, noch ein Vielfaches von i sein, denn $\sqrt[4]{-1}$ ist nicht $= \pm ai$, weil

$$(\pm ai)^4 = + a^4 i^4 = a^4$$

eine positive Zahl, die Wb aber -1 ist. Da nun die imaginären Werte der 3. Wurzel die complexe Form $a + bi$ hatten, so liegt der Gedanke nahe, dafs auch die Werte der 4. Wurzel aus einer negativen Zahl eine solche Form haben können.

In §. 24, V fanden wir:

$$(a \pm bi)^4 = a^4 - 6\,a^2 b^2 + b^4 \pm 4\,ab\left(a^2 - b^2\right) i.$$

Wie in I, c läfst sich daraus ableiten:

$$\sqrt[4]{a^4 - 6\,a^2 b^2 + b^4 \pm 4\,ab\left(a^2 - b^2\right) i} = a \pm bi.$$

Damit das i in der Wurzelbasis verschwinde, setzen wir

$$a^2 - b^2 = 0, \text{ d. i. } b^2 = a^2$$

$$\text{und daher } b = a.$$

Es entsteht damit:

$$\sqrt[4]{a^4 - 6a^2 a^2 + a^4 \pm 4ab \cdot 0 \cdot i} = a \pm ai, \text{ d. i.}$$

$$\sqrt[4]{-4a^4} = a \pm ai \ldots\ldots (S)$$

Setzt man hier $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so erhält man:

$$\sqrt[4]{-4 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i, \text{ oder}$$

$$\sqrt[4]{-4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i, \text{ oder}$$

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i \ldots (Y)$$

Setzt man in W: $a = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, so ergiebt sich

$$\sqrt[4]{-4 \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \pm \left(-\sqrt{\frac{1}{2}} i, \text{ oder}\right.$$

$$\sqrt[4]{-4 \cdot \left[+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \mp \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i, \text{ d. i.}$$

$$\sqrt[4]{-1} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i \ldots (Z)$$

$\sqrt[4]{-1}$ hat also (siehe Y und Z) die 4 Werte:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i, \quad \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i,$$

$$-\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i, \quad -\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i.$$

Probe:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i\right)^4=\left[\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i\right)^2\right]^2$$

$$=\left[\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2+2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i+\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\cdot i^2\right]^2$$

$$=\left[\frac{1}{2}+2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\cdot i+\frac{1}{2}\cdot(-1)\right]^2$$

$$=\left[\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot i-\frac{1}{2}\right]^2$$

$$=i^2=-1=\text{Wb!}$$

Anmerkung. Mittelst des Ausdrucks S kann man die $\sqrt[4]{}$ aus jeder beliebigen negativen Zahl bestimmen, da a offenbar so genommen werden kann, daſs sich $4a^4$ in jene Zahl verwandelt.

c. Aus Vorstehendem erhellt, daſs die 4. Wurzel stets 4 Werte hat und zwar die 4. Wurzel aus einer positiven Zahl: 2 reelle und 2 imaginäre (Vielfache von i), die 4. Wurzel aus einer negativen Zahl nur imaginäre Werte der complexen Form.

d. Da die imaginären Werte der 3. u. 4. Wurzel entweder als Vielfache von i oder in der complexen Form $a+bi$ vorhanden sind, so läſst sich vermuten, daſs auch die imaginären Werte der höheren Wurzeln durch diese Formen sich ausdrücken lassen.

27. Einige Eigenschaften der complexen Form $a \pm bi$.

I. Nach §. 62, 7 ist:

$$(a\pm bi)^n=a^n\pm na^{n-1}bi+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2i^2\pm\binom{n}{3}a^{n-3}b^3i^3$$
$$+\binom{n}{4}a^{n-4}b^4i^4\pm\binom{n}{5}a^{n-5}b^5i^5+\ldots,\text{ d. i.}$$

$$(a\pm bi)^n=a^n\pm na^{n-1}bi-\binom{n}{2}a^{n-2}b^2\mp\binom{n}{3}a^{n-3}b^3i$$
$$+\binom{n}{4}a^{n-4}b^4\pm\binom{n}{5}a^{n-5}b^5i\ldots.$$
$$=a^n-\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{4}a^{n-4}b^4\ldots.$$
$$\pm a^{n-1}b\left[n-\binom{n}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\binom{n}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^4-\ldots\right]i.$$

Folglich ist:

$$\sqrt[n]{a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 \ldots \pm a^{n-1} b \left[n - \binom{n}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \binom{n}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^4 - \ldots\right] i} = a \pm bi.$$

Setzt man den Faktor [ ] unter der Wurzel $=0$, bestimmt man also wie in §. 26, I, Abschn. c und II, Abschn. b die Zahl b so aus den in [ ] enthaltenen Gröfsen (a u. s. w.), dafs der Faktor $[\,]=0$ wird, so erhält man:

$$\sqrt[n]{a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 \ldots} = a \pm bi,$$

wo also b von a abhängig ist.

Für ein bestimmtes a ist nun die Wurzelbasis offenbar nur eindeutig und doch ist die $\sqrt[n]{}$ aus derselben sowohl $a+bi$ als auch $a-bi$. Hieraus folgt, dafs der Wert $a+bi$ nie allein vorhanden ist, vielmehr mit ihm stets zugleich $a-bi$ auftritt. Wir fanden dies schon bei den imaginären Werten von $\sqrt[3]{1}$ und $\sqrt[4]{-1}$, wo aufser $-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i$ noch $-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i$, aufser $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i$ noch $\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i$ vorhanden war.

Es erklärt sich dies auch aus dem Umstande, dafs $a+bi$, d. i. $a+b\sqrt{-1}$, wegen der Quadratwurzel (s 24. Satz) vollständig $a+b\left(\pm\sqrt{-1}\right)$, also $a \pm b\sqrt{-1}$ ist.

Man nennt daher $a+bi$ und $a-bi$ **conjugierte** (d. i. zusammengehörige) Zahlen und zwar ist $a-bi$ die conjugierte Zahl der complexen Zahl $a+bi$ und umgekehrt.

II. Die Summe der conjugierten Zahlen ist reell; denn $(a+bi)+(a-bi)=2a$.

III. Die Differenz der conjugierten Zahlen ist imaginär; denn

$$a+bi-(a-bi)=2bi \text{ oder } a-bi-(a+bi)=-2bi.$$

IV. Das Produkt der conjugierten Zahlen $= (a + bi)(a - bi)$ $= a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$ ist reell.

Diese Summe $(a^2 + b^2)$ aus dem Quadrate des reellen Teils der complexen Zahl und dem Quadrate des Faktor von i nennt man die Norm der complexen Zahl. Die Norm der imaginären Zahl $4 - 7i$ ist $4^2 + 7^2 = 65$, die Norm der imaginären Zahl $(2a + 3b) + (4a - 5b)i$ ist

$$(2a + 3b)^2 + (4a - 5b)^2 = 20a^2 - 28ab + 34b^2.$$

Zusatz. Da $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, so ist die Norm $a^2 + b^2$ sowohl durch $a + bi$ als auch durch $a - bi$ teilbar.

Beispiel. $\frac{a^2 + b^2}{a + bi} = a - bi.$

V. Da $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i$, so ist die Norm des Produkts $(a + bi)(c + di) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$

$$= a^2c^2 - 2ac \cdot bd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2bc \cdot ad + a^2d^2$$
$$= (a^2 + b^2)c^2 + (a^2 + b^2)d^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Diese Faktoren $a^2 + b^2$ und $c^2 + d^2$ aber sind die Normen der gegebenen Faktoren $a + bi$ und $c + di$. Folglich:

Die Norm des Produkts complexer Zahlen ist stets das Produkt ihrer Normen.

VI. Aus $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ folgt $\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$.

Oder: Die reciproke complexe Zahl ist = der conjugierten Zahl, dividiert durch ihre Norm.

28. Einige Eigenschaften der Werte verschiedener Wurzeln.

I. Ist die Zahl $a = b^2$, so hat $\sqrt[2n]{a}$ sowohl die in $\sqrt[n]{b}$, als auch die in $\sqrt[n]{-b}$ enthaltenen Werte.

Beweis.

1) $\sqrt[2n]{a} = (\sqrt[n]{b})$, denn $W^{Wx} = (\sqrt[n]{b})^{2n} = ((\sqrt[n]{b})^n)^2$
$= b^2 = a = Wb;$

2) $\sqrt[2n]{a} = (\sqrt[n]{-b})$, denn $W^{Wx} = (\sqrt[n]{-b})^{2n} = ((\sqrt[n]{-b})^n)^2$
$= (-b)^2 = +b^2 = a = Wb.$

Beispiele. Es ist $64 = 8^2$, folglich hat $\sqrt[6]{64}$ die 3 Werte von $\sqrt[3]{8}$ und zugleich die 3 Werte von $\sqrt[3]{-8}$.

Es ist $1 = 1^2$, folglich hat $\sqrt[6]{1}$ die 3 Werte von

$$\sqrt[3]{1}\left[= 1,\ -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i\right]$$

und zugleich die 3 Werte von

$$\sqrt[3]{-1}\left[= -1, \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i\right].$$

$\sqrt[8]{1}$ hat die 4 Werte von $\sqrt[4]{1}\,(= \pm 1, \pm i)$ und die 4 Werte von

$$\sqrt[4]{-1}\left[= \sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i, -\sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i\right].$$

II. Ist $\sqrt[2n]{a} = \beta \pm \gamma i$, so sind auch $-\beta \pm \gamma i$ Werte von $\sqrt[2n]{a}$.

Beweis. Soll $\sqrt[2n]{a} = -\beta \pm \gamma i$ sein, so müſste $(-\beta \pm \gamma i)^{2n} = a$ sein. Nun aber ist wirklich

$$(-\beta \pm \gamma i)^{2n} = [-(\beta \mp \gamma i)]^{2n} = +(\beta \mp \gamma i)^{2n} = a$$

(s. die gegebene Gleichung).

Beispiele. Es ist $\sqrt[2n]{1} = 1$ (weil $W^{Wx} = 1^{2n} = 1 = Wb$), d. i. $= 1 \pm 0 \cdot i$, folglich muſs auch $\sqrt[2n]{1} = -1 \pm 0 \cdot i = -1$ sein.

$\sqrt[4]{1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i$, folglich auch $\sqrt[4]{1} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i$.

$\sqrt[6]{1} = +1$ (d. i. $+1 \pm 0 \cdot i$) und $= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i$,

folglich auch:

$$\sqrt[6]{1} = -1 \text{ und } +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i \text{ (siehe I).}$$

III. Ist $\sqrt[4n]{a} = \beta \pm \gamma i$ (und folglich auch $= -\beta \pm \gamma i$, s. II), so hat $\sqrt[4n]{a}$ auch die Werte $\gamma \pm \beta i$ (und folglich auch die Werte $-\gamma \pm \beta i$, s. II).

Beweis. Soll $\sqrt[4n]{a} = \gamma \pm \beta i$ sein, so müſste $(\gamma \pm \beta i)^{4n} = a$ sein.

Nun aber ist wirklich

$$(\gamma \pm \beta i)^{4n} = 1 \cdot (\gamma \pm \beta i)^{4n} = i^{4n} \cdot (\gamma \pm \beta i)^{4n} = [i(\gamma \pm \beta i)]^{4n}$$
$$= (\gamma i \pm \beta i^2)^{4n} = [\gamma i \pm \beta(-1)]^{4n} = (\mp \beta + \gamma i)^{4n} = a$$

(s. die gegebene Gleichung).

Beispiel. Es ist $\sqrt[4]{1} = 1 = 1 \pm 0 \cdot i$, folglich ist auch

$$\sqrt[4]{1} = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i \text{ (s. 26, II).}$$

IV. Ist $\sqrt[4n+2]{a} = \beta \pm \gamma i$ (also auch $= -\beta \pm \gamma i$, s. II), so ist $\sqrt[4n+2]{-a} = \gamma \pm \beta i$ (und folglich auch $= -\gamma \pm \beta i$, s. II).

Beweis. Soll $\sqrt[4n+2]{-a} = \gamma \pm \beta i$ sein, so müfste $(\gamma \pm \beta i)^{4n+2} = -a$ sein, dieses $-a$ aber müfste der gegebenen Gleichung entsprechen. Nun ist wirklich

$$(\gamma \pm \beta i)^{4n+2} = 1 \cdot (\gamma \pm \beta i)^{4n+2} = i^{4n+4} (\gamma \pm \beta i)^{4n+2}$$
$$= i^2 \cdot i^{4n+2} (\gamma \pm \beta i)^{4n+2} = -1 \cdot [i(\gamma \pm \beta i)]^{4n+2}$$
$$= -[\gamma i \pm \beta i^2]^{4n+2} = -[\pm(-\beta) + \gamma i]^{4n+2}$$
$$= -(\mp \beta + \gamma i)^{4n+2} = -a,$$

denn der gegebenen Gleichung zufolge ist $(\mp \beta + \gamma i)^{4n+2} = a$.

Beispiel. Die 6 Werte von $\sqrt[6]{1}$ fanden wir in II $= 1 \pm 0 \cdot i$, $-1 \pm 0 \cdot i$, $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i$, $+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i$, folglich mufs $\sqrt[6]{-1}$ die nachstehenden Werte haben: $0 \pm 1 \cdot i \,(= \pm i)$, $\sqrt{\frac{3}{4}} \pm \frac{1}{2} \cdot i$ und mithin auch (s. II) $-\sqrt{\frac{3}{4}} \pm \frac{1}{2} \cdot i$.

V. Ist $\sqrt[4n]{a} = \beta \pm \gamma i$, a irgend eine positive Zahl, so ist $\sqrt[4n]{-a}$ weder $-\beta \pm \gamma i$, noch $\gamma \pm \beta i$ oder $-\gamma \pm \beta i$.

Beweis. Es ist $(\beta \pm \gamma i)^{4n} = a$, folglich ist auch (s. II u. III)

$$(-\beta \pm \gamma i)^{4n} = a, \; (\gamma \pm \beta i)^{4n} = a, \; (-\gamma \pm \beta i)^{4n} = a.$$

Keiner jener complexen Werte giebt also $-a$.

Hieraus folgt, dafs sich $\sqrt[4n]{-a}$ nicht direkt (durch die bisherigen Sätze) aus den Werten von $\sqrt[4n]{+a}$ ableiten läfst. In der That

sind die 4 Werte von $\sqrt[4]{-1}$ von den 4 Werten $\sqrt[4]{1}$ (s. 26, II) vollkommen verschieden.

VI. Die Werte von $\sqrt[n]{\pm a}$ sind $b$mal so grofs als die von $\sqrt[n]{\pm 1}$, wenn $b^n = a$ ist.

Beweis. Soll $\sqrt[n]{\pm a} = \left(b\sqrt[n]{\pm 1}\right)$ sein, so mufs

$$W^{Wx} = \left(b\sqrt[n]{\pm 1}\right)^n = \pm a$$

sein. Nun aber ist wirklich

$$\left(b\sqrt[n]{\pm 1}\right)^n = b^n\left(\sqrt[n]{\pm 1}\right)^n = a(\pm 1) = \pm a.$$

Beispiele. Die 6 Werte von $\sqrt[6]{1}$ sind uns bekannt (s. II). Da nun $2^6 = 64$, so sind die Werte von $\sqrt[6]{64}$: 2mal so grofs als jene. Folglich $\sqrt[6]{64} = +2, -1 \pm 2\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i, -2, +1 \pm 2\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i.$

Die 4 Werte von $\sqrt[4]{-1}$ sind $\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i$ (s 26, II). Da nun $3^4 = 81$, so sind die Werte von $\sqrt[4]{-81}$: 3mal so grofs als jene. Folglich $\sqrt[4]{-81} = 3\sqrt{\frac{1}{2}} \pm 3\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i$ und $-3\sqrt{\frac{1}{2}} \pm 3\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i.$

> Hieraus folgt, dafs man die Werte von $\sqrt[n]{a}$ stets aus den Werten von $\sqrt[n]{1}$, die Werte von $\sqrt[n]{-a}$ stets aus den Werten von $\sqrt[n]{-1}$ ableiten kann und dafs $\sqrt[n]{a}$ oder $\sqrt[n]{-a}$ eben so viele Werte haben müssen als $\sqrt[n]{1}$ oder $\sqrt[n]{-1}$.

Um z. B. die 6 Werte von $\sqrt[6]{-100}$ aus den 6 Werten von $\sqrt[6]{-1}$ (s IV) abzuleiten, braucht man nur zu wissen, dafs $2{,}15^6 = 100$ ist. Die Werte von $\sqrt[6]{-1}$ mit 2,15 multipliciert müssen alsdann die Werte von $\sqrt[6]{-100}$ geben.

VII. Wir fanden, dafs die 2. Wurzel 2 verschiedene Werte (s. 24. Satz), die 3. Wurzel 3 verschiedene Werte (26, I), die

4. Wurzel 4 Werte (26, II), die 6. Wurzel 6 Werte (28, II u. IV), die 8. Wurzel 8 Werte (28, I) hat.

Allgemein: Die $\sqrt[n]{}$ aus einer einfachen Zahl hat stets n verschiedene Werte.

Anmerkung. Der strenge Beweis für diesen wichtigen Satz kann erst später gegeben werden. Der Satz gilt nur für eine einfache Zahl als Wurzelbasis, nicht aber für eine Potenz, deren Exponent mit dem Wx ein gemeinsames Mafs hat (s. u. den 30. Satz).

VIII. Die Anzahl der reellen und imaginären Werte der verschiedenen Wurzeln.

Aus den bisherigen Sätzen ergiebt sich:

a. Ist n eine gerade Zahl, so hat die $\sqrt[n]{}$ aus einer positiven Zahl stets 2 reelle, einander entgegengesetzte Werte. Die übrigen $n-2$ Werte sind imaginär. Z. B. $\sqrt[10]{1024} = \pm 2$, aufserdem 8 imaginäre Werte.

b. Ist n eine gerade Zahl, so hat die $\sqrt[n]{}$ aus einer negativen Zahl nur imaginäre Werte. $\sqrt[14]{-1}$ z. B. hat 14 imaginäre Werte.

c. Ist n eine ungerade Zahl, so hat die $\sqrt[n]{}$ aus einer positiven Zahl nur einen reellen und zwar positiven Wert. Die übrigen $n-1$ Werte sind imaginär. Z. B. $\sqrt[7]{2187} = +3$, aufserdem 6 imaginäre Werte.

d. Ist n eine ungerade Zahl, so hat die $\sqrt[n]{}$ aus einer negativen Zahl nur einen reellen und zwar negativen Wert. Die übrigen $n-1$ Werte sind imaginär. Z. B. $\sqrt[9]{-10000} = -2{,}783$, aufserdem 8 imaginäre Werte.

Anmerkung. Da

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \text{ (s. 23. Satz) } = -1 \cdot \sqrt[2n+1]{a},$$

so kann man die Werte der ungeradzahligen Wurzel aus einer negativen Zahl stets dadurch erhalten, dafs man die Werte derselben Wurzel aus der positiven Zahl (von gleichem absoluten Werte) mit -1 multipliciert. Die 9 Werte von $\sqrt[9]{-10000}$ sind $=$ den 9 Werten von $\sqrt[9]{10000}$ multipliciert mit -1.

IX. $\sqrt[2n+1]{1}$ und $\sqrt[2n+1]{-1}$ haben die Werte $\pm i$ (oder $\pm ai$) nicht.

Beweis. $\sqrt[2n+1]{1} = i$ setzt voraus, dafs $i^{2n+1} = 1$ ist. Es ist jedoch $i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i^1 = (i^2)^n \cdot i = (-1)^n \cdot i$, also entweder $+i$ oder $-i$, nicht aber die Wb, nämlich 1.

Dasselbe mufs aber auch von $\sqrt[2n+1]{-1}$ gelten, da dies

$$= -\sqrt[2n+1]{1}.$$

Hieraus folgt, dafs die imaginären Werte der ungeradzahligen Wurzel aus einer reellen Zahl nur complex sein können.

X. $\sqrt[4n]{1}$ (also $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[8]{1}$, $\sqrt[12]{1} \ldots$) besitzt die beiden einfachen imaginären Werte $\pm i$; denn $W^{Wx} = (\pm i)^{4n} = +1 =$ Wb. Die übrigen imaginären Werte müssen daher complex sein.

Beispiel. $\sqrt[12]{1} = \pm 1$ und $\pm i$; die übrigen 8 imaginären Werte sind complex.

XI. $\sqrt[4n]{-1}$ (also $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[8]{-1}$, $\sqrt[12]{-1} \ldots$) hat nur complexe Werte, die Werte $\pm i$ also nicht.

Beweis. Wäre $\sqrt[4n]{-1} = i$, so müfste i^{4n} = der Wb. -1 sein. Es ist jedoch $i^{4n} = +1$ (s. 25, IV).

Man kann also nicht $\sqrt[4]{-1} = \pm i$, $\sqrt[8]{-1} = \pm i$ setzen (wie es Heis in seiner Aufgabensammlung §. 70, Nr. 127 gethan hat).

Anmerkung. $\sqrt[2n]{i}$ hat man sich als $\sqrt[2n]{\sqrt{-1}} = \sqrt[4n]{-1}$ zu denken.

XII. $\sqrt[4n+2]{1}$ (also $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[10]{1}$, $\sqrt[14]{1} \ldots$) hat die beiden einfachen imaginären Werte $\pm i$ nicht; denn es ist $i^{4n+2} = i^2 = -1$, also nicht die Wb 1.

Folglich sind die sämtlichen imaginären Werte von $\sqrt[4n+2]{1}$ complex.

XIII. $\sqrt[4n+2]{-1}$ besitzt die beiden imaginären Werte $\pm i$; denn

$i^{4n+2} = i^2 = -1 =$ Wb. Die übrigen imaginären Werte müssen daher complex sein.

Anmerkung. $\sqrt[2n+1]{i}$ hat man sich als $\sqrt[2n+1]{\sqrt{-1}} = \sqrt[4n+2]{-1}$ zu denken.

XIV. $\sqrt[4n+1]{\pm i} = \pm i$, denn $\mathrm{W}^{\mathrm{Wx}} = (\pm i)^{4n+1} = (\pm i)^{4n} \cdot \pm i = +1 \cdot \pm i = \pm i =$ Wb.

XV. $\sqrt[4n+3]{\pm i} = \mp i$, denn $\mathrm{W}^{\mathrm{Wx}} = (\mp i)^{4n+3} = (\mp i)^{4n} \cdot (\mp i)^3 = 1 \cdot \mp i^3 = \mp(-i) = \pm i =$ Wb.

29. Von den primitiven Wurzeln.

I. Einen Wert von $\sqrt[n]{1}$ nennt man eine primitive Wurzel von $\sqrt[n]{1}$, wenn derselbe kein Wert einer Wurzel aus 1 mit kleinerem Wurzelexponent als n ist. So ist z. B. ein Wert von $\sqrt[6]{1}$ eine primitive Wurzel von $\sqrt[6]{1}$, wenn derselbe kein Wert von $\sqrt{1}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[5]{1}$ ist. i ist eine primitive Wurzel von $\sqrt[4]{1}$, weil i kein Wert von $\sqrt{1}$ oder $\sqrt[3]{1}$ ist. $\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \cdot i$ ist eine primitive Wurzel von $\sqrt[6]{-1}$, weil diese complexe Zahl kein Wert von $\sqrt{-1}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[5]{-1}$ ist.

Zusatz. Ist $m < n$, so ist 1 keine primitive Wurzel von $\sqrt[n]{1}$, weil 1 schon ein Wert von $\sqrt[m]{1}$ ist. So ist z. B. 1 keine primitive Wurzel von $\sqrt[2]{1}$, weil 1 schon ein Wert von $\sqrt[1]{1}$.

II. Jeder der n Werte von $\sqrt[n]{1}$ ist auch ein Wert von $\sqrt[nk]{1}$; denn es ist $\sqrt[nk]{1} = (\sqrt[n]{1})$, weil

$$\mathrm{W}^{\mathrm{Wx}} = (\sqrt[n]{1})^{nk} = \left((\sqrt[n]{1})^{n}\right)^{k} = 1^k = 1 = \mathrm{Wb}.$$

Die Werte von $\sqrt[5]{1}$ sind also zugleich Werte von $\sqrt[15]{1}$ und darum sind jene 5 Werte keine primitiven Wurzeln von $\sqrt[15]{1}$.

III. Jeder der n Werte von $\sqrt[n]{-1}$ ist auch ein Wert von $\sqrt[(2k+1)n]{-1}$; denn es ist $\sqrt[(2k+1)n]{-1} = (\sqrt[n]{-1})$, weil

$$W^{Wx} = (\sqrt[n]{-1})^{(2k+1)n} = \left((\sqrt[n]{-1})^n\right)^{2k+1} = (-1)^{2k+1}$$
$$= -1 = \text{Wb}.$$

IV. Ist α irgend ein Wert von $\sqrt[n]{1}$, so ist auch $\sqrt[n]{1} = \alpha^k$, wenn k irgend eine ganze Zahl ist, und es ist alsdann stets

$$\alpha^{n+k} = \alpha^n.$$

1. Beispiel. $\sqrt[10]{1} = -1$, folglich ist auch

$$\sqrt[10]{1} = (-1)^4 = +1$$

und es ist $(-1)^{10+4} = (-1)^4$.

2. Beispiel. $\sqrt[4]{1} = -i$, folglich ist auch

$$\sqrt[4]{1} = (-i)^7 = -i^7 = -(-i) = i$$

und es ist $(-i)^{4+7} = (-i)^7$.

Beweis. Es ist $\sqrt[n]{1} = \alpha^k$, denn $(\alpha^k)^n = (\alpha^n)^k = 1^k$

$$\left[\text{weil } \sqrt[n]{1} = \alpha, \text{ also } \alpha^n = 1\right] = 1.$$

Ferner ist $\alpha^{n+k} = \alpha^n \cdot \alpha^k = 1 \cdot \alpha^k = \alpha^k$.

V. Ist $\sqrt[n]{1} = \alpha$ und dieser Wert α nicht $= 1$, so ist α kein Wert von $\sqrt[m]{1}$, sobald m prim zu n.

Beispiel. $\sqrt[10]{1} = -1$, folglich ist $\sqrt[7]{1}$ nicht $= -1$, weil 10 prim zu 7 ist.

Beweis. Man dividiere $m:n$ (oder $n:m$, wenn $n > m$) mittelst der Kettendivision, wobei der 1. Rest $= r_1$, der 2. Rest $= r_2$ u. s. w. sein mag. Der letzte Rest r_u ist $= 1$, weil m und n relative Primzahlen sind (s. §. 23, 14). Diese Kettendivision hätte also folgende Gestalt:

$$\left.\begin{array}{l} m:n = q_1 \\ \underline{nq_1} \\ n:r_1 \;(\text{wo } r_1 = m - nq_1) \end{array}\right| \;(\text{Y})$$

u. s. w.

Wäre nun $\sqrt[m]{1} = \alpha$ und $\sqrt[n]{1} = \alpha$, d. i. $\alpha^m = 1$ und $\alpha^n = 1$, so wäre auch $\alpha^{nq_1} = (\alpha^n)^{q_1} = 1^{q_1} = 1$ und folglich

$$\alpha^{m-nq_1} = \alpha^m : \alpha^{nq_1} = 1 : 1 = 1, \text{ d. i. (s. Y) } \alpha^{r_1} = 1.$$

In gleicher Weise würde aus $\alpha^n = 1$ und $\alpha^{r_1} = 1$ folgen: $\alpha^{r_2} = 1$, dann würde weiter aus $\alpha^{r_1} = 1$ und $\alpha^{r_2} = 1$ folgen: $\alpha^{r_3} = 1$ u. s. w. Mit dem letzten Reste würde man daher $\alpha^{r_u} = 1$, d. i. (s. ob.) $\alpha^1 = 1$ erhalten. Da aber nach der Voraussetzung α nicht $= 1$ sein soll, so ist die Annahme $\sqrt[n]{1} = \alpha$ eine falsche.

VI. Ist α eine primitive Wurzel von $\sqrt[n]{1}$, so sind α^1, α^2, α^3, ... α^e, ... α^k, ... α^n (wo e und k beliebige Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$ vorstellen) alle von einander verschieden und es ist daher auch, wenn $h < n$ ist, α^h nicht $= \alpha^n$, d. i. α^h nicht $= 1$.

Beispiel. Es ist $-i$ eine primitive Wurzel von $\sqrt[4]{1}$, folglich sind

$$(-i)^1 = -i,\ (-i)^2 = +i^2 = -1,\ (-i)^3 = -i^3 = -(-i) = +i,$$
$$(-i)^4 = +i^4 = 1$$

alle von einander verschieden und keine der 3 ersten Potenzen ist $= 1$.

Beweis. Wären zwei jener Potenzen einander gleich, z. B. $\alpha^e = \alpha^k$, so wäre $\alpha^e : \alpha^k = \alpha^{e-k} = \alpha^0 = 1$. Aus $\alpha^{e-k} = 1$ aber würde sich $\sqrt[e-k]{1} = \alpha$ ergeben. Da nun schon α ein Wert von $\sqrt[e-k]{1}$, also ein Wert einer Wurzel mit kleinerem Exponent als n, so wäre α keine primitive Wurzel von $\sqrt[n]{1}$. Folglich ist die Annahme, dafs 2 jener Potenzen gleich sein könnten, eine falsche.

VII. Ist α eine primitive Wurzel von $\sqrt[n]{1}$ und k prim zu n, so ist auch α^k eine primitive Wurzel von $\sqrt[n]{1}$.

Beispiel. Es ist $-i$ eine primitive Wurzel von $\sqrt[4]{1}$ und 3 prim zu 4, folglich ist auch $(-i)^3 = -i^3 = -(-i) = +i$ eine primitive Wurzel von $\sqrt[4]{1}$.

Beweis. Nach I ist α^k keine primitive Wurzel von $\sqrt[n]{1}$, sobald für eine beliebige Zahl p, die $< n$ ist,

$$\sqrt[p]{1} = \alpha^k \left[\text{d. h.} \left(\alpha^k\right)^p = 1\right].$$

Kann man daher nachweisen, dafs $\left(\alpha^k\right)^p$ nicht $= 1$ ist, so ist auch α^k eine primitive Wurzel von $\sqrt[n]{1}$.

Da nun k prim zu n und $p < n$ ist, so ist kp durch n nicht teilbar (s. §. 68, 25), vielmehr würde kp durch n dividiert einen Rest lassen, der $= r$ gesetzt werden mag, so dafs also

$$\frac{kp}{n} = q + \frac{r}{n}, \text{ wo } r < n.$$

Aus dieser Gleichung folgt $kp = nq + r$. Nun ist

$$\left(\alpha^k\right)^p = \alpha^{kp} = \alpha^{nq+r} = \left(\alpha^n\right)^q \cdot \alpha^r = 1^q \alpha^r$$

$$\left[\text{denn } \alpha^n = 1, \text{ weil } \sqrt[n]{1} = \alpha\right]$$

$$= \alpha^r.$$

Nach VI aber ist α^r von 1 verschieden, weil α eine primitive Wurzel von $\sqrt[n]{1}$ und $r < n$ ist.

VIII. Ist α eine primitive Wurzel von $\sqrt[m]{1}$ (also auch $\alpha^m = 1$) und $\alpha^k = 1$ $\left(\text{d. i. } \sqrt[k]{1} = \alpha\right)$, so ist k durch m teilbar.

Beispiel. Für $\sqrt[3]{1}$ ist $-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i$ (s. 26, I, c) eine primitive Wurzel. Ist nun $\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i\right)^6 = 1$, so ist auch

$$\sqrt[6]{1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot i$$

und 6 ist durch 3 teilbar. (Vergl. auch II.)

Beweis. Wäre k nicht durch m teilbar, sondern $k = mq + r$, so wäre $\alpha^{mq+r} = \left(\alpha^m\right)^q \cdot \alpha^r = 1 \cdot \alpha^r$. Dann aber wäre gegen die Voraussetzung α^r nicht $= 1$ (s. VI).

IX. Ist α eine primitive Wurzel von $\sqrt[m]{1}$, β eine primitive Wurzel von $\sqrt[n]{1}$ und m prim zu n, so ist $\alpha\beta$ eine primitive Wurzel von $\sqrt[mn]{1}$.

Beweis. Soll $\alpha\beta$ eine primitive Wurzel von $\sqrt[mn]{1}$ sein, so ist

nachzuweisen, dafs $\alpha\beta$ kein Wert von $\sqrt[r]{1}$, also $(\alpha\beta)^r$ nicht $= 1$ ist, wenn $r < mn$ (s. I). Ist aber $r < mn$, so kann r nicht durch mn teilbar sein und es sind nur 2 Fälle möglich: entweder r ist nur durch die eine Zahl, z. B. n, teilbar, oder r ist durch keine der beiden Zahlen m und n teilbar.

1. Fall. r sei nur durch n teilbar. Dann ist r durch m nicht teilbar, denn wäre r durch n und m teilbar, so müfste nach §. 68, 34: r durch mn teilbar sein, weil m prim zu n. Ist daher

$$\frac{r}{m} = \gamma + \frac{p}{m}, \text{ wo } p < m, \text{ so ist } r = \gamma m + p.$$

Da $\sqrt[n]{1} = \beta$, so ist $\beta^n = 1$, und weil r durch n teilbar, d. h. r ein Vielfaches von n ist, so kann $r = nv$ gesetzt werden. Es wird nun

$$\beta^r = \beta^{nv} = \left(\beta^n\right)^v = 1^v = 1 \text{ und } \alpha^r = \alpha^{\gamma m + p} = \left(\alpha^m\right)^\gamma \cdot \alpha^p = 1^\gamma \cdot \alpha^p$$

$$\left[\text{denn } \sqrt[m]{1} = \alpha\right] = \alpha^p$$

ist von 1 verschieden, weil α eine primitive Wurzel von $\sqrt[m]{1}$ und $p < m$ (s. VI).

Folglich ist $(\alpha\beta)^r = \alpha^r \beta^r = \alpha^r \cdot 1 = \alpha^r$ für diesen 1. Fall nicht $= 1$.

2. Fall. r sei durch keine der beiden Zahlen m und n teilbar. Im 1. Falle fanden wir, dafs $\alpha^r = \alpha^p$, wenn r durch m nicht teilbar ist. Da nun auch r durch n nicht teilbar sein soll, so ist

$\frac{r}{n} = \delta + \frac{q}{n}$, wo $q < n$, also $r = \delta n + q$, daher

$$\beta^r = \beta^{\delta n + q} = \left(\beta^n\right)^\delta \cdot \beta^q = 1^\delta \cdot \beta^q \left[\text{weil } \sqrt[n]{1} = \beta\right] = \beta^q.$$

Da nun sowohl $\alpha^r = \alpha^p$, als auch $\beta^r = \beta^q$, so wird

$$(\alpha\beta)^r = \alpha^r \beta^r = \alpha^p \beta^q = \frac{\alpha^p \beta^q}{\beta^n}$$

$$\left[\text{denn es ist } \beta^n = 1, \text{ weil } \sqrt[n]{1} = \beta\right]$$

$$= \frac{\alpha^p}{\beta^{n-q}}.$$

Im 1. Falle wurde gezeigt, dafs α^p von 1 verschieden, jedoch ein Wert von $\sqrt[m]{1}$ ist, weil α ein Wert von $\sqrt[m]{1}$ und $p < m$ ist (s. VI). Aber es ist auch β^{n-q} ein Wert von $\sqrt[n]{1}$, da β eine

primitive Wurzel von $\sqrt[n]{1}$ und $n-q<n$ ist (s. VI). Da ferner nach V eine von 1 verschiedene Wurzel von $\sqrt[m]{1}$ einer $\sqrt[n]{1}$ nicht gleich sein kann, weil m prim zu n ist, so ist auch in diesem 2. Falle $\frac{\alpha^p}{\beta^{n-q}}$, d. i. $(\alpha\beta)^r$ von 1 verschieden und mithin $\alpha\beta$ eine primitive Wurzel von $\sqrt[mn]{1}$.

1. Beispiel. Es ist -1 eine primitive Wurzel von $\sqrt[2]{1}$. Ist nun α eine primitive Wurzel von $\sqrt[2n+1]{1}$ (der Exponent ungerade), so sind die Exponenten 2 und $2n+1$ prim zu einander, daher mufs $\alpha(-1)=-\alpha$ eine primitive Wurzel von $\sqrt[2(2n+1)]{1}$ sein.

2. Beispiel. Es ist i eine primitive Wurzel von $\sqrt[4]{1}$. Ist nun α eine primitive Wurzel von $\sqrt[2n+1]{1}$, so sind die Exponenten 4 und $2n+1$ prim zu einander und es mufs αi eine primitive Wurzel von $\sqrt[4(2n+1)]{1}$ sein.

3. Beispiel. Es ist $\sqrt[3]{1}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i$. Ist nun α eine primitive Wurzel von $\sqrt[m]{1}$ und m durch 3 nicht teilbar, so sind beide Exponenten prim zu einander und es ist

$$\left(-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i\right)\alpha$$

eine primitive Wurzel von $\sqrt[3m]{1}$.

X. Ist α eine primitive Wurzel von $\sqrt[m]{1}$ und m ungerade, so sind auch folgende Wurzeln primitive:

a) $\sqrt[m]{-1}=-\alpha$.

b) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[m]{i}=-i\alpha\\ \sqrt[m]{-i}=i\alpha\end{array}\right\}$ wenn $m+1$ durch 4 teilbar.

c) $\left.\begin{array}{l}\sqrt[m]{i}=i\alpha\\ \sqrt[m]{-i}=-i\alpha\end{array}\right\}$ wenn $m-1$ durch 4 teilbar.

Beweis. a. Ist α eine primitive Wurzel von $\sqrt[m]{1}$ (also $\sqrt[m]{1} = \alpha$), r ($< m$) durch m nicht teilbar, so ist $\alpha^m = 1$ und nach VII: α^r von 1 verschieden. Ist m ungerade, so ist

$$(-\alpha)^m = -\alpha^m = (-1 \cdot \alpha)^m = -1 \cdot \alpha^m \text{ [und weil } \alpha^m = 1]$$
$$= -1.$$

Wäre schon eine kleinere Wurzel aus $-1 = -\alpha$, oder

$$\sqrt[r]{-1} = -\alpha \, (r < m),$$

so wäre $(-\alpha)^r = -1$ und folglich

$$(-\alpha)^{2r} = \left((-\alpha)^r\right)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Es wäre daher $2r$ durch m teilbar (s. VII), also auch r durch m teilbar [weil 2 nicht durch das ungerade m teilbar sein kann] gegen die Voraussetzung.

b. Ist $m + 1$ durch 4 teilbar, also m von der Form $4k + 3$, so ist

$$(\pm i\alpha)^m = (\pm i)^m \alpha^m = (\pm i)^m \cdot 1 = (\pm i)^m = (\pm i)^{4k+3}$$
$$= (\pm i)^3 = \pm i^3 = \pm(-i) = \mp i.$$

Wäre schon für $r < m$: $(\pm ia)^r = \mp i$, so wäre

$$(\pm ia)^{4r} = (\pm i)^4, \text{ d. i. } \left((\pm i)^4\right)^r \cdot a^{4r} = 1$$

oder $1^r \cdot \alpha^{4r} = 1$ oder $\alpha^{4r} = 1$. Mithin wäre dann (s. VII) $4r$ durch m und folglich r durch m teilbar [da 4 nicht durch m teilbar] gegen die Voraussetzung.

c. Ist $m - 1$ durch 4 teilbar, also m von der Form $4k + 1$, so ist

$$(\pm i\alpha)^m = (\pm i)^m \alpha^m = (\pm i)^{4k+1} \cdot 1 = \left((\pm i)^4\right)^k \cdot (\pm i)^1$$
$$= 1 \cdot \pm i = \pm i.$$

Wäre schon für $r < m$: $(\pm i\alpha)^r = \pm i$, so wäre $(\pm i\alpha)^{4r} = (\pm i)^4$,

$$\text{d. i. } \left((\pm i)^4\right)^r \cdot \alpha^{4r} = 1 \text{ oder } 1^r \cdot \alpha^{4r} = 1 \text{ oder } \alpha^{4r} = 1.$$

Mithin wäre dann (s. VII) $4r$ durch m und folglich r durch m teilbar gegen die Voraussetzung.

XI. Jede primitive Wurzel α von $\sqrt[2n]{1}$ ist auch eine primitive Wurzel von $\sqrt[n]{-1}$.

Beweis. $\sqrt[2n]{1} = \sqrt[n]{\sqrt{1}} = \alpha$, folglich $\sqrt{1} = \alpha^n$. Also ist α^n

eine primitive Wurzel von $\sqrt{1}$, die nur -1 sein kann, weil 1 keine primitive Wurzel von $\sqrt[2]{1}$ ist (s. I, Zus.).

XII. Jede primitive Wurzel α von $\sqrt[4n]{1}$ ist auch eine primitive Wurzel von $\sqrt[n]{i}$ oder $\sqrt[n]{-i}$.

Beweis. $\sqrt[4n]{1} = \sqrt[n]{\sqrt[4]{1}} = \alpha$, folglich $\sqrt[4]{1} = \alpha^n$. Ist aber α^n eine primitive Wurzel von $\sqrt[4]{1}$, so ist sie entweder i oder $-i$, da $+1$ und -1 schon Wurzeln von $\sqrt[2]{1}$ sind.

30. $\sqrt[n]{a^n}$ hat nur den einen Wert a, also nicht n Werte.

Beispiel. $\sqrt{a^2}$ hat nur den einen Wert a, $\sqrt{(-5)^2}$ nur den einen Wert -5 und es ist also nicht

$$\sqrt{a^2} = \pm a \text{ oder } \sqrt{(-5)^2} = \pm 5.$$

1. Beweis. $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$ [s. 13. Satz] $= (\pm a)^2 = +a$, also nicht $= -a$. Eben so: $\sqrt{(-1)^2} = (\sqrt{-1})^2 = -1$, also nicht $= +1$.

2. Beweis (indirekt). $-7 = \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{+49} = \pm 7$ ist offenbar unrichtig, weil nicht $-7 = +7$ sein kann.

Es ist also $-7 = \sqrt{(-7)^2}$ noch richtig, weil eben

$$\sqrt{(-7)^2} = -7,$$

jedoch nicht mehr die aus jener Gleichung abgeleitete:

$$-7 = \sqrt{49}.$$

Eben so ist $\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3}$ richtig, nicht aber $\sqrt{5} = \sqrt[6]{125}$.

1. Zusatz. Das gegenseitige Kürzen der Potenz- und Wurzelexponenten ist unbedingt notwendig. Denn $\sqrt[12]{a^8}$ kann nicht 12 Werte haben, weil $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{(a^2)^4}}$. Da nun (s. den Hauptsatz) $\sqrt[4]{(a^2)^4}$ nur den einen Wert a^2 hat, so ist

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{(a^2)^4}} = \sqrt[3]{a^2}$$

und mithin hat $\sqrt[12]{a^8}$ nur die 3 in $\sqrt[3]{a^2}$ enthaltenen Werte.

Allgemein: $\sqrt[n]{a^r}$ hat nur dann n Werte, wenn n prim zu r ist.

2. Zusatz. Das gegenseitige Erweitern der Potenz- und Wurzelexponenten mit darauf folgender Verwandlung der Wurzelbasis (Potenz) in eine Zahl ist nicht unbedingt gestattet, denn offenbar mufs $-7 = \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49}$ falsch sein. Noch auffälliger zeigt sich der Fehler bei $\sqrt{-7}$ (imaginäre Zahl)

$$= \sqrt[2]{(-7)^1} = \sqrt[4]{(-7)^2} = \sqrt[4]{+49} \text{ (reelle Zahl!).}$$

Und doch ist

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[2]{5^1} \cdot \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{2^3} = (5^3)^{\frac{1}{6}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{6}} = (5^3 \cdot 2^2)^{\frac{1}{6}}$$
$$= \sqrt[6]{125 \cdot 4} = \sqrt[6]{500}$$

richtig, weil $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2}$ nur dieselben 6 Werte enthält, die in $\sqrt[6]{500}$ vorhanden sind, also nicht, wie in den vorausgehenden Beispielen, neue und zwar falsche Werte hinzukommen. Sind nämlich die beiden Werte von $\sqrt{5} = \alpha, \beta$, die 3 Werte von $\sqrt[3]{2} = \gamma, \delta, \varepsilon$, so ist $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \alpha\gamma, \alpha\delta, \alpha\varepsilon, \beta\gamma, \beta\delta, \beta\varepsilon$. Es ist aber auch

$$\sqrt[6]{500} = \alpha\gamma, \alpha\delta, \ldots;$$

denn $(\alpha\gamma)^6 = \alpha^6 \cdot \gamma^6 = (\sqrt{5})^6 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = 5^3 \cdot 2^2 = 500 = \text{Wb.}$

Allgemein: Das gegenseitige Erweitern der Potenz- und Wurzelexponenten mit darauf folgender Verwandlung der Wurzelbasis (Potenz) in eine Zahl bewirkt keinen Fehler, wenn die Werte des gegebenen Ausdrucks dieselben bleiben.

Anmerkung. Dennoch setzt man

$$\sqrt{9} = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt[4]{81},$$

wenn der Sinn der Auflösung der Aufgabe unverändert bleibt. Denn versteht man unter $\sqrt{9}$ eine Anzahl Personen, so kann man

offenbar $\sqrt{9} = \sqrt[4]{81}$ setzen, weil sowohl bei $\sqrt[4]{81}$ wie bei $\sqrt{9}$ doch nur die positive Zahl $+3$ gilt.

B. Verschiedene Basen, gleiche Wurzelexponenten.

31. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Die Wurzel aus einem Produkt ist das Produkt aus den mit demselben Wurzelexponent radicierten Faktoren.

Beweis.

$$\mathrm{W}^{\mathrm{Wx}} = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab = \mathrm{Wb}.$$

Beispiele.

$$\sqrt{9a^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a^2} = 3a; \quad \sqrt{121x^8} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{x^8} = 11x^4;$$

$$\sqrt{25n} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{n} = 5\sqrt{n};$$

$$\sqrt{7a^2} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{7} \cdot a \text{ oder } a\sqrt{7};$$

$$\sqrt{2x^6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^6} = x^3\sqrt{2}.$$

$$\sqrt[3]{125x^3yz^6} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[3]{z^6} = 5xz^2\sqrt[3]{y};$$

$$\sqrt[3]{-729a^3b} = -\sqrt[3]{729a^3b} = -9a\sqrt[3]{b};$$

$$\sqrt[4]{-81bc^{12}} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{-b} \cdot \sqrt[4]{c^{12}} = 3c^3\sqrt[4]{-b};$$

$$\sqrt[n]{a^n b^{nk}} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b^{nk}} = ab^k;$$

$$\sqrt[n]{a^{nk+r}} = \sqrt[n]{a^{nk} \cdot a^r} = \sqrt[n]{a^{nk}} \cdot \sqrt[n]{a^r} = a^k\sqrt[n]{a^r};$$

$$\sqrt[3]{a^{n+3}} = \sqrt[3]{a^n \cdot a^3} = a\sqrt[3]{a^n}.$$

Anmerkung. Die Wurzel aus einem mehrgliederigen Ausdruck ist nicht mit der Wurzel aus einem Produkt zu verwechseln. Man erhält jenen nicht dadurch, dafs man aus jedem einzelnen Gliede die Wurzel zieht. Denn wäre

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

so müfste $\mathrm{W}^{\mathrm{Wx}} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b$ sein. Es ist jedoch

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2$$
$$= a + b + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Beispiel. $\sqrt{9+16}$ ist nicht $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$, vielmehr $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.

Eben so ist nicht $\sqrt{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$,

nicht $\sqrt[n]{a\pm b}=\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}$.

1. Zusatz. $\sqrt{-a}=\sqrt{a(-1)}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{a}\cdot i$.

Die imaginäre Quadratwurzel stellt man stets, wie vorstehend gezeigt ist, als ein Produkt aus einer reellen Zahl und der imaginären Einheit dar.

Beispiele.

$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\cdot i=2i$; $\sqrt{-169}=\sqrt{169}\cdot i=13i$;

$\sqrt{-26}=\sqrt{26}\cdot i=5{,}1\,i$ (denn $5{,}1^2=26$);

$\sqrt{-\frac{6}{7}}=\sqrt{\frac{6}{7}}\cdot i=0{,}926i$ $\left(\text{denn } 0{,}926^2=0{,}857=\frac{6}{7}\right)$.

Imaginäre (resp. complexe) Zahlen stellt man überhaupt stets in der Form $a\pm bi$ dar, wobei a und b Decimalzahlen sein müssen.

Daher (s. 26. Satz, 1, d):

$$\sqrt[3]{1}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i=-0{,}5\pm0{,}866\,i,\ \text{denn } 0{,}866^2=\frac{3}{4};$$

$$\sqrt[3]{-1}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot i=0{,}5\pm0{,}866\,i;$$

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\frac{1}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i=0{,}707\pm0{,}707\,i\ \text{(s. 26. Satz, II, b).}$$

Auch rechnet es sich mit dem abgesonderten i weit bequemer.

Beispiele.

$$\begin{aligned}(5-3\sqrt{-6})(1+2\sqrt{-6})&=(5-3\sqrt{6}\cdot i)(1+2\sqrt{6}\cdot i)\\&=5-3\sqrt{6}\cdot i+10\sqrt{6}\cdot i+6\cdot6\,i^2=-31+7\sqrt{6}\cdot i\\&=-31+7\cdot2{,}45\,i=-31+17{,}15\,i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2-3\sqrt{-5})^4&=(2-3\sqrt{5}\cdot i)^4\\&=16-4\cdot8\cdot3\sqrt{5}\cdot i+6\cdot4\cdot9\cdot5\,i^2-4\cdot2\cdot27\cdot5\sqrt{5}\cdot i^3\\&\qquad+81\cdot5^2\cdot i^4\\&=16-96\sqrt{5}\cdot i-1080+1080\sqrt{5}\cdot i+2025\\&=961+984\sqrt{5}\cdot i=961+984\cdot2{,}236068\cdot i\\&=961+2200{,}3\,i.\end{aligned}$$

2. Zusatz. In gleicher Weise kann man

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot 1} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{1} \text{ und}$$
$$\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a(-1)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{-1}$$

setzen, um jede beliebige Wurzel auf ein Produkt aus einem eindeutigen, absoluten Werte $\left(\text{hier } \sqrt[n]{a}\right)$ und dem $n$deutigen Werte $\sqrt[n]{1}$ und $\sqrt[n]{-1}$ zurückzuführen, wie dies schon im 28. Satze, VI, in anderer Weise gezeigt worden ist.

Um daher $\sqrt[4]{-23}$ vollständig zu bestimmen, braucht man nur die 4 Werte von $\sqrt[4]{-1}$ und den absoluten Wert $\sqrt[4]{23} = 2{,}19$ zu kennen, denn es ist $\sqrt[4]{-23} = \sqrt[4]{23} \cdot \sqrt[4]{-1} = 2{,}19\,\sqrt[4]{-1}$ und folglich findet man die 4 Werte von $\sqrt[4]{-23}$, indem man jeden der 4 Werte von $\sqrt[4]{-1}$ mit 2,19 multipliciert.

Oder um $\sqrt[6]{\frac{5}{7}}$ zu bestimmen, braucht man nur die 6 Werte von $\sqrt[6]{1}$ und den absoluten Wert $\sqrt[6]{\frac{5}{7}} = 0{,}9503$ zu kennen; denn es ist $\sqrt[6]{\frac{5}{7}} = \sqrt[6]{\frac{5}{7}} \cdot \sqrt[6]{1} = 0{,}9503\,\sqrt[6]{1}$ und mithin ergeben sich die 6 Werte von $\sqrt[6]{\frac{5}{7}}$ durch Multiplication der 6 Werte von $\sqrt[6]{1}$ mit 0,9503.

Nachstehend geben wir eine Tafel der verschiedenen Werte von $\sqrt[n]{1}$ von $n = 2$ bis $n = 10$, ferner der Werte von $\sqrt[n]{-1}$ für ein geradzahliges n, da man die ungeradzahligen Wurzeln aus -1 einfach dadurch erhält, dafs man die ungeradzahlige Wurzel aus $+1$ entgegengesetzt nimmt (mit -1 multipliciert), denn es ist z. B. $\sqrt[3]{1} = -0{,}5 + 0{,}866\,i$, folgl. $\sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{1}$ (siehe 23. Satz)

$$= -1 \cdot \sqrt[3]{1} \text{ (s. auch 28. Satz, VIII, d, Anmerk.),}$$

folglich die imaginären Werte

$$= -1 \cdot (-0{,}5 + 0{,}866\,i) = 0{,}5 - 0{,}866\,i.$$

$\sqrt{1} = \pm 1.$

$\sqrt[3]{1} = 1;\ -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\,[= -0{,}5 \pm 0{,}8660254\, i].$

$\sqrt[4]{1} = \pm 1;\ \pm i.$

$\sqrt[5]{1} = 1;\ \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}\right) [= 0{,}3090170$
$\pm 0{,}9510565\, i];$

$\frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}\right) [= -0{,}8090170$
$\pm 0{,}5877853\, i].$

$\sqrt[6]{1} = \pm 1;\quad \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2} [= -0{,}5 \pm 866\, i,$ s. $\sqrt[3]{1}]$

$\frac{1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2} [= 0{,}5 \pm 0{,}866\, i].$

$\sqrt[7]{1} = 1;\ 0{,}6234898 \pm 0{,}7818315 i;\ -0{,}2225209 \pm 0{,}9749279 i;$
$-0{,}9009688 \pm 0{,}4338838\, i.$

$\sqrt[8]{1} = \pm 1;\ \pm i;\ \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i\,[= 0{,}7071068 \pm 0{,}7071068\, i];$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i\,[= -0{,}707 \pm 0{,}707 i].$

$\sqrt[9]{1} = 1;\ 0{,}7660444 \pm 0{,}6427876 i;\ 0{,}1736482 \pm 0{,}9848078\, i;$
$-0{,}5 \pm 0{,}8660254\, i;\ -0{,}9396926 \pm 0{,}3420201\, i.$

$\sqrt[10]{1} = \pm 1;\ \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} i\,[= 0{,}8090170$
$\pm 0{,}5877853\, i];$

$\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} i\,[= 0{,}3090170$
$\pm 0{,}9510565\, i];$

$-\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} i\,[= -0{,}309 \pm 0{,}951 i];$

$-\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} i\,[= -0{,}809$
$\pm 0{,}587 \ldots i].$

$\sqrt{-1} = \pm i.$

$\sqrt[4]{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i \, [= 0,7071068 \pm 0,7071068\, i];$

$\qquad - \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i \, [= -0,707 \pm 0,707\, i].$

$\sqrt[6]{-1} = \pm i; \quad \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} \, [= 0,8660254 \pm 0,5\, i];$

$\qquad \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2} \, [= -0,866 \pm 0,5\, i].$

$\sqrt[8]{-1} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i \, [= 0,9238795$
$\qquad \pm 0,3826834\, i];$

$\qquad - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i \, [= -0,92\ldots \pm 0,38\ldots i];$

$\qquad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} i \, [= 0,38\ldots \pm 0,92\, i];$

$\qquad - \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} i \, [= -0,38\ldots \pm 0,92\, i].$

$\sqrt[10]{-1} = \pm i; \quad \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \pm \frac{\sqrt{5}-1}{4} i \, [= 0,9510565$
$\qquad \pm 0,3090170\, i];$

$\qquad - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \pm \frac{\sqrt{5}-1}{4} i$ [s. $\sqrt[10]{1}$ u. 28. Satz, IV];

$\qquad \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \pm \frac{\sqrt{5}+1}{4} i;$

$\qquad - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \pm \frac{\sqrt{5}+1}{4} i.$

Beispiel.

$$\sqrt[8]{(-6562)^5} = \sqrt[8]{-6562^5} = \sqrt[8]{6562^5} \cdot \sqrt[8]{-1}$$
$$= 243,023 \sqrt[8]{-1}.$$

Vorstehende Tabelle giebt nun für $\sqrt[8]{-1}$: 8 complexe Werte z. B. $0,92388 \pm 0,38268\, i$ und folglich sind zwei der 8 Werte des gegebenen Ausdrucks:

$$= 243{,}023\,(0{,}92388 \pm 0{,}38268\,i)$$
$$= 224{,}52 \pm 93{,}001\,i.$$

Die Aufgabensammlung von Heis (§. 70, 127) setzt fälschlich: $243{,}023\,i$.

32. Bedeutung der imaginären Zahlen und Wurzeln.

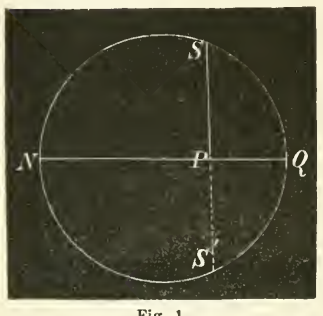


Fig. 1.

I. Einem bekannten geometrischen Lehrsatze zufolge gilt (s. Fig. 1) für eine auf dem Durchmesser NQ eines Kreises errichtete Senkrechte PS (resp. PS'), deren Endpunkt S (resp. S') in der Peripherie liegt:

$$PS^2 = NP \cdot PQ \text{ oder (s. 6. Satz)}$$
$$PS = \sqrt{NP \cdot PQ}.$$

Vollständig ist (s. 24. Satz, I) diese Wurzel $= \pm \sqrt{NP \cdot PQ}$. Sie hat also die beiden entgegengesetzten Werte $+\sqrt{NP \cdot PQ}$ und $-\sqrt{NP \cdot PQ}$. Folglich ist (s. §. 51, 1, a) die nach oben gerichtete Senkrechte $PS = +\sqrt{NP \cdot PQ}$, die nach unten gerichtete Senkrechte

$$PS' = -\sqrt{NP \cdot PQ}.$$

Fig. 2.

II. Bezeichnet (wie in §. 51, 1, c und f) der Punkt M (s. Fig. 2) den Nullpunkt,

$$MA = +1,\ MB = +2\ldots,$$
$$Ma = -1,\ Mb = -2\ldots,$$

und legt man durch A und a, durch B und b als Endpunkte von Durchmessern Kreise, die durch eine in M errichtete unbegrenzte Senkrechte geschnitten werden und zwar der Kreis Aa in α_1 und α_2, der Kreis Bb in β_1 und β_2, so erhält man (s. I):

$$M\alpha_1 = +\sqrt{MA \cdot Ma} = +\sqrt{+1 \cdot -1} = +\sqrt{-1} = +i,$$
$$M\alpha_2 = -\sqrt{MA \cdot Ma} = -\sqrt{+1 \cdot -1} = -\sqrt{-1} = -i,$$
$$M\beta_1 = +\sqrt{MB \cdot Mb} = +\sqrt{+2 \cdot -2} = +\sqrt{-2^2} = +\sqrt{2^2} \cdot i$$
$$= +2i,$$
$$M\beta_2 = -\sqrt{MB \cdot Mb} = -2i.$$

Wie also $MA = +1$, $MB = +2$, $Ma = -1$, $Mb = -2$, so ist $M\alpha_1 = +i$, $M\beta_1 = +2i$, $M\alpha_2 = -i$, $M\beta_2 = -2i$ und man gewinnt nun folgendes Bild:

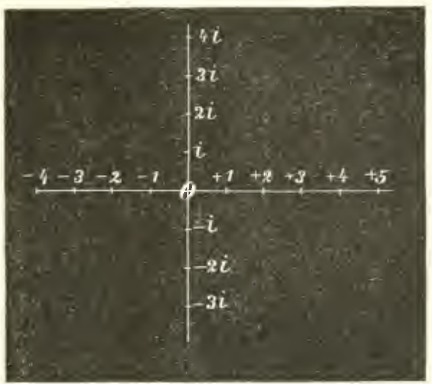


Fig. 3.

III. Eine Erweiterung dieser geometrischen Ableitung der imaginären Zahlen führt zu Fig. 4, welche aufser der Linie der reellen Zahlen alle imaginären (resp. complexen) Zahlen enthält. Die beiden links oben verzeichneten Punkte z. B. stellen die com-

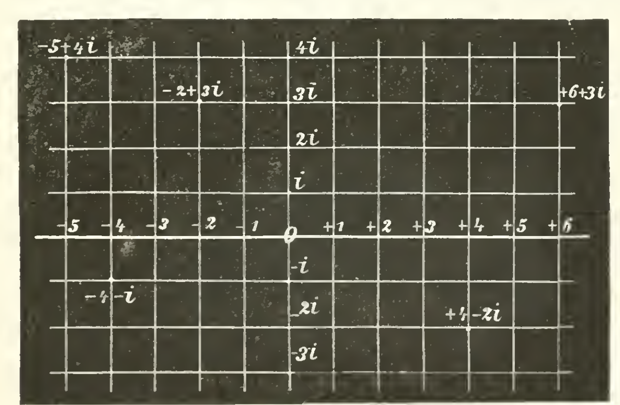


Fig. 4.

plexen Zahlen $-5+4i$ und $-2+3i$ vor, der Punkt rechts oben bedeutet $+6+3i$, der Punkt links unten $-4-i$, der Punkt rechts unten $+4-2i$. Die imaginären Zahlen liegen also zu beiden Seiten derjenigen Linie, welche die reellen Zahlen (0, $+1$, $+2$, ... -1, -2, ...) enthält, und zwar giebt die Entfernung von der durch 0 gehenden Senkrechten den reellen Teil der complexen Zahl, der rechts positiv, links negativ ist (siehe $+4$ im

Punkte rechts unten, -5 im Punkte links oben), die Entfernung von der durch 0 gehenden Horizontalen den Faktor von i, der oben positiv, unten negativ ist (siehe $+4i$ im Punkte links oben, $-2i$ im Punkte rechts unten).*)

Gaufs nannte daher die imaginären Gröfsen auch laterale (seitwärtsliegende).

IV. In Fig. 2 stellen die im Kreise Aa liegenden Punkte A und a $(=+1$ und $-1)$ die Werte von $\sqrt{1}$, die in demselben Kreise liegenden gleichfalls gleichweit von einander entfernt liegenden Punkte A, a, α_1, α_2 $(=+1, -1, i, -i)$ die Werte von $\sqrt[4]{1}$ dar.

Um allgemein die Werte von $\sqrt[n]{+1}$ zu construieren, teilt man die Peripherie des Kreises Aa vom Punkte A $(=+1)$ aus in n gleiche Teile. Die Teilungspunkte repräsentieren die Werte von $\sqrt[n]{+1}$.

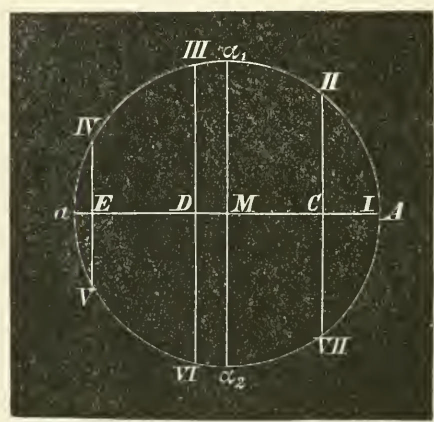


Fig. 5.

Um z. B. die 7 Werte von $\sqrt[7]{1}$ zu construieren, ist der Kreis (s. Fig 5) von A $(=+1)$ aus in 7 gleiche Teile zu teilen. Man erhält die Punkte I $(=A)$, II, III, IV, V, VI, VII, welche die gesuchten Werte darstellen. I bedeutet den Wert $+1$.

Der durch II gegebene Wert von $\sqrt[7]{1}$ liegt aufserhalb der reellen Linie Aa, ist also imaginär und zwar complex, weil dieser Punkt nicht in der Linie $\alpha_1 \alpha_2$ liegt. Der reelle Teil der complexen Zahl II ist $MC = 0{,}623$ (mit $MA = 1$ gemessen), der positiv ist, weil er rechts von $\alpha_1 \alpha_2$ liegt. Für diesen Wert II ist der Faktor von $i = C\,\text{II} = 0{,}782$, der positiv ist, weil er oberhalb Aa liegt. Die 2. Wurzel von $\sqrt[7]{1}$ ist also

$$= 0{,}623 + 0{,}782\,i.$$

*) Der vollständige Beweis für die Richtigkeit dieser Darstellung kann hier nicht gegeben werden, weil beim rationellen Unterricht neben der Buchstabenrechnung nur erst die Anfangsgründe der Planimetrie vorhanden sein können.

Die 3. Wurzel von $\sqrt[7]{1}$ liegt in III. Sie ist

$$= MD + D\,\mathrm{III} = -0{,}223 + 0{,}975\,i.$$

Ferner ist

$$\sqrt[7]{1} = \text{Punkt IV} = ME + E\ \mathrm{IV} = -0{,}901 + 0{,}434\,i;$$

$$\sqrt[7]{1} = \quad \text{„} \quad \mathrm{V} = ME + E\ \mathrm{V} = -0{,}901 - 0{,}434\,i;$$

$$\sqrt[7]{1} = \quad \text{„} \quad \mathrm{VI} = MD + D\ \mathrm{VI} = -0{,}223 - 0{,}975\,i;$$

$$\sqrt[7]{1} = \quad \text{„} \quad \mathrm{VII} = MC + C\,\mathrm{VII} = 0{,}623 - 0{,}782\,i.$$

V. Um die Werte von $\sqrt[n]{-1}$ zu construieren, sucht man zunächst den n^{ten} Teil des Halbkreises $A\alpha_1 a$. Von dem (oberhalb A gelegenen) 1. Teilungspunkte I aus teilt man alsdann den ganzen Kreis in n gleiche Teile. Diese n Teilungspunkte repräsentieren die Werte von $\sqrt[n]{-1}$.

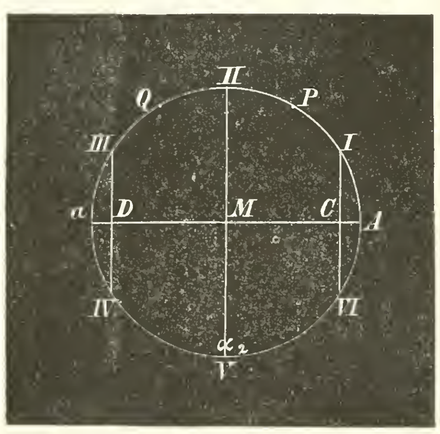


Fig. 6.

Um z. B. die Werte von $\sqrt[6]{-1}$ zu construieren, sucht man zunächst vom Halbkreis $A\alpha_1 a$ (s. Fig. 6) den 6. Teil. Man findet denselben $= AI$ (denn durch I, P, II, Q, III ist der Halbkreis in 6 gleiche Teile geteilt). Von dem Endpunkte I desselben aus ist nun der ganze Kreis in 6 gleiche Teile zu teilen. Man erhält die Punkte I, II, III, IV, V, VI, welche die nachstehenden Werte von $\sqrt[6]{-1}$ geben:

$$I = MC + CI = 0{,}866 + 0{,}5\,i;$$

$$II = \text{Punkt } M + MII = 0 + 1 \cdot i = i;$$

$$III = MD + DIII = -0{,}866 + 0{,}5\,i;$$

$$IV = MD + DIV = -0{,}866 - 0{,}5\,i;$$

$$V = \text{Punkt } M + MV = 0 - 1 \cdot i = -i;$$

$$VI = MC + CVI = 0{,}866 - 0{,}5\,i.$$

33. Umkehrung des 31. Satzes: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Um Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten zu multiplicieren,

radiciert man das Produkt ihrer Wurzelbasen mit demselben Wurzelexponent.

Beispiele.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{2 \cdot 7} = \sqrt{14};$

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{11} = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 11} = \sqrt{165};$

$\sqrt{2ab} \cdot \sqrt{8ab^3} = \sqrt{16a^2b^4} = 4ab^2$ (siehe 31);

$\sqrt{7} \cdot \sqrt{-6} = \sqrt{-42} = \sqrt{42} \cdot i;$

$\sqrt[3]{2b} \cdot \sqrt[3]{5ab^2} = \sqrt[3]{10ab^3} = b\sqrt[3]{10a};$

$5\sqrt{13} \cdot -4\sqrt{3} = -20\sqrt{13} \cdot \sqrt{3} = -20\sqrt{39};$

$$(7\sqrt{3} - 2\sqrt{11})(6\sqrt{3} + 5\sqrt{11})$$
$$= 42(\sqrt{3})^2 - 12\sqrt{33} + 35\sqrt{33} - 10(\sqrt{11})^2$$
$$= 42 \cdot 3 + 23\sqrt{33} - 10 \cdot 11 = 16 + 23\sqrt{33};$$

$$(5\sqrt{14} - 12\sqrt{3})^2 = (5\sqrt{14})^2 - 2 \cdot 5\sqrt{14} \cdot 12\sqrt{3} + (12\sqrt{3})^2$$
$$= 25 \cdot 14 - 120\sqrt{42} + 144 \cdot 3 = 782 - 120\sqrt{42}.$$

$$[3\sqrt{2a} - 8\sqrt{a-b}]^2 = 9 \cdot 2a - 2 \cdot 3\sqrt{2a} \cdot 8\sqrt{a-b}$$
$$+ 64(a-b)$$
$$= 82a - 64b - 48\sqrt{2a(a-b)}.$$

$$(3\sqrt{a-4b} - 2\sqrt{9b-5a})^2$$
$$= (3\sqrt{a-4b})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{a-4b} \cdot 2\sqrt{9b-5a}$$
$$+ (2\sqrt{9b-5a})^2$$
$$= 9(a-4b) - 12\sqrt{(a-4b)(9b-5a)} + 4(9b-5a)$$
$$= -11a - 12\sqrt{(a-4b)(9b-5a)}; \text{ oder}$$
$$= -11a - 12\sqrt{-5a^2 - 41ab - 36b^2}$$
$$= -11a - 12\sqrt{-(5a^2 + 41ab + 36b^2)}$$
$$= -11a - 12\sqrt{5a^2 + 41ab + 35b^2} \cdot i.$$

$$(5\sqrt{17} - 9\sqrt{-2})^4 = [(5\sqrt{7} - 9\sqrt{-2})^2]^2$$
$$= [25 \cdot 7 - 90\sqrt{-14} + 81(-2)]^2$$
$$= (13 - 90\sqrt{-14})^2 = 169 - 2 \cdot 13 \cdot 90\sqrt{-14}$$
$$+ 8100(-14)$$
$$= -113231 - 2340\sqrt{14} \cdot i.$$

Mit

$$(5\sqrt{17})^4 - 4\cdot(5\sqrt{17})^3\cdot 9\sqrt{-2} + 6(5\sqrt{17})^2(9\sqrt{-2})^2$$
$$-4\cdot 5\sqrt{17}\cdot(9\sqrt{-2})^3 + (9\sqrt{-2})^4$$

(s. §. 62, 6) würde die Rechnung zusammengesetzter sein.

$$\frac{5(a-2b)\sqrt{a}}{6\sqrt{a+2b}} - \frac{7\sqrt{a^2+2ab}}{4}$$
$$= \frac{10(a-2b)\sqrt{a}}{12\sqrt{a+2b}} - \frac{3\sqrt{a+2b}\cdot 7\sqrt{a(a+2b)}}{12\sqrt{a+2b}}$$
$$= \frac{10(a-2b)\sqrt{a} - 21\sqrt{a+2b}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+2b}}{12\sqrt{a+2b}}$$
$$= \frac{10(a-2b)\sqrt{a} - 21(a+2b)\sqrt{a}}{12\sqrt{a+2b}}$$
$$= \frac{(10a-20b-21a-42b)\sqrt{a}}{12\sqrt{a+2b}}$$
$$= \frac{(-11a-62b)\sqrt{a}}{12\sqrt{a+2b}} = -\frac{(11a+62b)\sqrt{a}}{12\sqrt{a+2b}}.$$

$a - b = \left(a^{\frac{1}{5}}\right)^5 - \left(b^{\frac{1}{5}}\right)^5$, aufgelöst nach §. 61, 6, I:

$$= \left[\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^4 + \left(a^{\frac{1}{5}}\right)^3 b^{\frac{1}{5}} + \left(a^{\frac{1}{5}}\right)^2\left(b^{\frac{1}{5}}\right)^2 + a^{\frac{1}{5}}\left(b^{\frac{1}{5}}\right)^3\right.$$
$$\left. + \left(b^{\frac{1}{5}}\right)^4\right]\left(a^{\frac{1}{5}} - b^{\frac{1}{5}}\right)$$
$$= \left(\sqrt[5]{a^4} + \sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{a^2}\cdot\sqrt[5]{b^2} + \sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{b^3} + \sqrt[5]{b^4}\right)$$
$$\left(\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}\right)$$
$$= \left(\sqrt[5]{a^4} + \sqrt[5]{a^3 b} + \sqrt[5]{a^2 b^2} + \sqrt[5]{ab^3} + \sqrt[5]{b^4}\right)\left(\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}\right).$$

$\sqrt[5]{a^2} - \dfrac{2}{3\sqrt[5]{a^3}} + \dfrac{4}{5a\sqrt[5]{a^3}} = ?$ Den mit $\sqrt[5]{a^3}$ multiplicierten Ausdruck dividiere gemeinsam durch $\sqrt[5]{a^3}$, daher:

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}\left[\sqrt[5]{a^5} - \frac{2}{3} + \frac{4}{5a}\right] = \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}\left(a - \frac{2}{3} + \frac{4}{5a}\right).$$

Zusatz. Die Quadratwurzel aus einem geordneten Trinom ist = der $\left(\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right)$ der Quadratwurzeln aus dem 1. und 3. Gliede, wenn das $\left(\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right)$ Mittelglied = dem doppelten Produkt der Wurzeln aus dem 1. und 3. Gliede ist. (Vergl. §. 62, 2!).

Beweis. $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = a \pm 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + b$, folglich umgekehrt: $\sqrt{a \pm 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + b} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}.$

1. Beispiel. $9b\sqrt{ab} - 30b\sqrt[4]{a^3 b} + 25ab = ?$

Das doppelte Produkt der Quadratwurzeln aus dem 1. und 3. Gliede ist

$$= 2\sqrt{9b\sqrt{ab}\cdot\sqrt{25ab}} = 2\cdot 3\sqrt{b\sqrt{ab}}\cdot 5\sqrt{ab}$$
$$= 30\sqrt{ab^2\sqrt{ab}} = 30b\sqrt{a\sqrt{ab}} = 30b\sqrt{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{ab}}$$
$$= 30b\sqrt{\sqrt{a^3 b}} = 30b\sqrt[4]{a^3 b} = \text{dem Mittelgliede,}$$

folglich ist der gegebene Ausdruck

$$= \left(\sqrt{9b\sqrt{ab}} - \sqrt{25ab}\right)^2 = \left(3\sqrt{b}\cdot\sqrt{\sqrt{ab}} - 5\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}\right)^2$$
$$= \left[\sqrt{b}\left(3\sqrt[4]{ab} - 5\sqrt{a}\right)\right]^2 = b\left(3\sqrt[4]{ab} - 5\sqrt{a}\right)^2.$$

2. Beispiel.

$$\frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{(a-b)^2} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(a-b)^2}$$
$$= \left[\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})}\right]^2 = \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}.$$

34. $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} = -\sqrt{ab}.$ Das Produkt aus 2 imaginären Quadratwurzeln ist negativ reell.

1. Beweis.

$$\sqrt{-1\cdot a}\cdot\sqrt{-1\cdot b} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{b} = (\sqrt{-1})^2\cdot\sqrt{ab}$$
$$= -1\cdot\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}.$$

2. Beweis. $(-a)^n\cdot(-b)^r$ besteht aus $n + r$ negativen Faktoren, daher $(-a)^{\frac{1}{2}}\cdot(-b)^{\frac{1}{2}}$ aus $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ negativem Faktor und

ist daher negativ. Bei $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\sqrt{(-a)(-b)}=\sqrt{ab}$ berücksichtigt man also nicht, daſs die gegebenen Minuszeichen nur halbe Minuszeichen sind.

Beispiele. $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}=-\sqrt{3\cdot 5}=-\sqrt{15}$;

$$4\sqrt{-6}\cdot -3\sqrt{-17}=-12\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-17}=-12\cdot(-\sqrt{6\cdot 17})$$
$$=+12\sqrt{102}.$$

$$(5\sqrt{7}-3\sqrt{-6})(4\sqrt{-11}+9\sqrt{5})$$
$$=20\sqrt{-77}-12\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-11}+45\sqrt{35}-27\sqrt{-30}$$
$$=20\sqrt{77}\cdot i-12(-\sqrt{66})+45\sqrt{35}-27\sqrt{30}\cdot i$$
$$=12\sqrt{66}+45\sqrt{35}+(20\sqrt{77}-27\sqrt{30})i.$$

1. Zusatz.

$$\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{a(-1)}\cdot\sqrt[4]{b(-1)}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{-1}\cdot\sqrt[4]{b}\cdot\sqrt[4]{-1}$$
$$=\sqrt[4]{ab}\cdot\left(\sqrt[4]{-1}\right)^2=\sqrt[4]{ab}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt[4]{ab}\cdot i.$$

2. Zusatz.

$$\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}\cdot\sqrt[4]{-c}\cdot\sqrt[4]{-d}=\left(\sqrt[4]{-1}\right)^4\cdot\sqrt[4]{abcd}$$
$$=-1\cdot\sqrt[4]{abcd}=-\sqrt[4]{abcd}.$$

35. Um rationale Faktoren einer Wurzel unter die Wurzel zu bringen, also aus der Form $a\sqrt[n]{b}$ die Form $\sqrt[n]{c}$ herzustellen, hat man $a\sqrt[n]{b}$ in $\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$ zu verwandeln.

Beispiele.

$$3\sqrt{5}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{45};$$

$$1\tfrac{1}{5}\sqrt{6\tfrac{17}{18}}=\frac{6}{5}\sqrt{\frac{125}{18}}=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{125}{18}}$$
$$=\sqrt{\frac{36}{25}\cdot\frac{125}{18}}=\sqrt{10};$$

$$a\sqrt{a}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^3};$$

$$3\sqrt{\frac{2a}{3}+\frac{b}{9}+c}=\sqrt{3^2\left(\frac{2a}{3}+\frac{b}{9}+c\right)}$$
$$=\sqrt{6a+b+9c};$$

$$4\sqrt{\frac{a}{8}-1\tfrac{1}{2}}=\sqrt{4^2\left(\frac{a}{8}-\frac{3}{2}\right)}=\sqrt{2a-24};$$

$$2a\sqrt{1\tfrac{1}{4}+\frac{3}{2a}}=\sqrt{(2a)^2\cdot\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{2a}\right)}=\sqrt{5a^2+6a}.$$

$$x\sqrt{\frac{1}{x}}=\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\sqrt{x};$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt[5]{4}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{4}}=\sqrt[3]{\sqrt[5]{128}}=\sqrt[15]{128};$$

$$1\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{1\tfrac{1}{3}}=\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}=\sqrt[3]{4{,}5};$$

$$\frac{3a}{2b}\sqrt[4]{\frac{8b^3}{27a}}=\sqrt[4]{\left(\frac{3a}{2b}\right)^4\cdot\frac{8b^3}{27a}}=\sqrt[4]{\frac{3a^3}{2b}}.$$

$$a^r\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a^{nr}}\cdot\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a^{nr+1}};$$

$$\sqrt[9]{a^2\sqrt[4]{a}}=\sqrt[9]{\sqrt[4]{a^8\cdot a}}=\sqrt[4]{\sqrt[9]{a^9}}=\sqrt[4]{a};$$

$$2\sqrt{5\sqrt[3]{4\sqrt{6}}}=\sqrt{20\sqrt[3]{4\sqrt{6}}}=\sqrt{\sqrt[3]{8000\cdot 4\sqrt{6}}}$$
$$=\sqrt[6]{32000\sqrt{6}}=\sqrt[6]{\sqrt{32000^2\cdot 6}}$$
$$=\sqrt[12]{6144000000}.$$

$$(4\sqrt{3}-3\sqrt{5})\sqrt{11\sqrt{3}-8\sqrt{5}}$$
$$=\sqrt{(4\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2}\cdot\sqrt{11\sqrt{3}-8\sqrt{5}}$$
$$=\sqrt{(16\cdot 3-24\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+9\cdot 5)(11\sqrt{3}-8\sqrt{5})}$$
$$=\sqrt{3(31-8\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})\,(11\sqrt{3}-8\sqrt{5})}$$
$$=\sqrt{3[341\sqrt{3}-88(\sqrt{3})^2\sqrt{5}-248\sqrt{5}-64\sqrt{3}\,(\sqrt{5})^2]}$$
$$=\sqrt{3[341\sqrt{3}-264\sqrt{5}-248\sqrt{5}+320\sqrt{3}]}$$
$$=\sqrt{3(661\sqrt{3}-512\sqrt{5})}.$$

$$(5+2i)\sqrt[3]{4-3i}=\sqrt[3]{(5+2i)^3(4-3i)}$$
$$=\sqrt[3]{(125+3\cdot 25\cdot 2i+3\cdot 5\cdot 4i^2+8i^3)(4-3i)}$$
$$=\sqrt[3]{[125+150i+60(-1)+8(-i)](4-3i)}$$
$$=\sqrt[3]{(65+142i)(4-3i)}$$
$$=\sqrt[3]{260+568i-195i+426}=\sqrt[3]{686+373i}$$

$$4\sqrt{15\sqrt{3}-12\sqrt{2}}-3\sqrt{10\sqrt{3}-8\sqrt{2}}$$
$$=4\sqrt{3(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})}-3\sqrt{2(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})}$$
$$=4\sqrt{3}\cdot\sqrt{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}-3\sqrt{2}\cdot\sqrt{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$$
$$=(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})\sqrt{5\sqrt{3}-4\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{(4\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})}$$
$$=\sqrt{(16\cdot 3-24\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+9\cdot 2)(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})}$$
$$=\sqrt{6(11-4\sqrt{3}\cdot\sqrt{2})(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})}$$
$$=\sqrt{6(55\sqrt{3}-60\sqrt{2}-44\sqrt{2}+32\sqrt{3})}$$
$$=\sqrt{6(87\sqrt{3}-104\sqrt{2})}.$$

Zusatz. Es existieren Tafeln, welche die Quadrat- und Kubikwurzeln aus den Zahlen 1 bis 1000 enthalten. Wäre nun $7\sqrt{6}$ oder $3\sqrt[3]{5}$ zu bestimmen, so könnte man zwar in diesen Tafeln $\sqrt{6}=2{,}4494897$ aufsuchen und diese Zahl mit 7 multiplicieren, eben so $\sqrt[3]{5}=1{,}7099759$ aufsuchen und diese Zahl mit 3 multiplicieren; durch vorstehenden Satz erspart man sich jedoch diese Multiplication, da man direkt $\sqrt{294}$ und $\sqrt[3]{135}$ aufsuchen kann, denn es ist

$$7\sqrt{6}=\sqrt{7^2\cdot 6}=\sqrt{294}\quad\text{und}\quad 3\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{3^3\cdot 5}=\sqrt[3]{135}.$$

36. Umkehrung. Die Basis einer n^{ten} Wurzel läfst sich verkleinern, wenn man die n^{te} Wurzel aus einem Faktor der Wurzelbasis ziehen kann.

Beispiele.

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$

$$\sqrt{700} = \sqrt{10^2 \cdot 7} = \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{7} = 10\sqrt{7};$$

$$\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a\sqrt{a};$$

$$\sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{64 \cdot 5} = \sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5};$$

$$\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3 \cdot a} = a\sqrt[3]{a};$$

$$\sqrt{a^3 b + a^2 c} = \sqrt{a^2(ab + c)} = a\sqrt{ab + c};$$

$$\sqrt[n]{a^{3n+2}} = \sqrt[n]{a^{3n} \cdot a^2} = \sqrt[n]{a^{3n}} \cdot \sqrt[n]{a^2} = a^3\sqrt[n]{a^2};$$

I. Specielle Zahlen, in welchen man die zu bildenden Potenzen nicht sofort erkennt, zerlegt man in Primfaktoren.

Mit Rücksicht auf den Wurzelexponent n bildet man alsdann aus je n gleichen Faktoren eine n^{te} Potenz.

Beispiele.

$$\sqrt{504} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 7} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 7}$$
$$= 2 \cdot 3\sqrt{14} = 6\sqrt{14};$$

$$\sqrt[3]{1875} = \sqrt[3]{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 5} = 5\sqrt[3]{15};$$

$$\sqrt{2160} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5}$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3 \cdot 5} = 12\sqrt{15};$$

$$\sqrt[3]{2160} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt[3]{10} = 6\sqrt[3]{10}.$$

II. $11\sqrt{63} - 21\sqrt{28} + 2\sqrt{700} - 3\sqrt{112}$

$$= 11\sqrt{9 \cdot 7} - 21\sqrt{4 \cdot 7} + 2\sqrt{100 \cdot 7} - 3\sqrt{16 \cdot 7}$$
$$= 11 \cdot 3\sqrt{7} - 21 \cdot 2\sqrt{7} + 2 \cdot 10\sqrt{7} - 3 \cdot 4\sqrt{7}$$
$$= (33 - 42 + 20 - 12)\sqrt{7} = -\sqrt{7}.$$

$5\sqrt[3]{128} - 7\sqrt[3]{54} + 10\sqrt[3]{250} - 8\sqrt[3]{432}$

$$= 5\sqrt[3]{4^3 \cdot 2} - 7\sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + 10\sqrt[3]{5^3 \cdot 2} - 8\sqrt[3]{6^3 \cdot 2}$$
$$= 5 \cdot 4\sqrt[3]{2} - 7 \cdot 3\sqrt[3]{2} + 10 \cdot 5\sqrt[3]{2} - 8 \cdot 6\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}.$$

$$\sqrt[n]{a^{2n-3}b^{3n+4}} - \sqrt[n]{a^{2n+1}b^{n-5}}$$
$$= \sqrt[n]{a^{2n}b^{3n}\cdot a^{-3}b^{4}} - \sqrt[n]{a^{2n}b^{3n}ab^{-5}}$$
$$= a^2b^3\sqrt[n]{\frac{b^4}{a^3}} - a^2b^3\sqrt[n]{\frac{a}{b^5}} = a^2b^3\left(\sqrt[n]{\frac{b^4}{a^3}} - \sqrt[n]{\frac{a}{b^5}}\right).$$

$$\sqrt{300a} + \sqrt{675ab^2} - \sqrt{192a^3} - \sqrt{432a^3b^2}$$
$$= 10a\sqrt{3a} + 15b\sqrt{3a} - 8a\sqrt{3a} - 12ab\sqrt{3a}$$
$$= (10 + 15b - 8a - 12ab)\sqrt{3a}$$
$$= [5(2+3b) - 4a(2+3b)]\sqrt{3a}$$
$$= (5-4a)(2+3b)\sqrt{3a}.$$

III. $\sqrt[5]{a^{17}} = \sqrt[5]{a^{15}\cdot a^2} = \sqrt[5]{a^{15}}\cdot\sqrt[5]{a^2} = a^3\sqrt[5]{a^2}.$

Dividiert man also den Potenzexponent (17) durch den Wurzelexponent (5), so wird der ganzzahlige Quotient (3) zum Potenzexponent aufserhalb der Wurzel, der Rest zum Potenzexponent innerhalb derselben.

$\sqrt{a^7}$? $7:2 = 3$, Rest 1; daher $= a^3\sqrt{a^1} = a^3\sqrt{a}$.

$\sqrt[4]{a^{23}}$? $23:4 = 5$, Rest 3; daher $= a^5\sqrt[4]{a^3}$.

$\sqrt[n]{a^{nr+q}}$? $\dfrac{nr+q}{n} = r + \dfrac{q}{n}$, daher $= a^r\sqrt[n]{a^q}$.

$\sqrt[2x+3]{a^{6x+11}}$? $6x + 11 : 2x + 3 = 3$; daher $= a^3\sqrt[2x+3]{a^2}$.

$6x + 9$

Rest 2

$\sqrt[3x-7]{n^{15x^2-23x-25}}$? $15x^2 - 23x - 25 : 3x - 7 = 5x + 4$

$15x^2 - 35x$

$12x - 25$

$12x - 28$

3

Daher $= n^{5x+4}\sqrt[3x-7]{n^3}$.

IV. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}$? Hier rechnet man nicht

$$\sqrt{90} = \sqrt{9\cdot 10} = 3\sqrt{10},$$

vielmehr kann der gemeinsame Faktor 3 der beiden Basen der Quadratwurzel sogleich als Faktor der Wurzel gefetzt werden, die alsdann nur noch das Produkt der übrigen Faktoren (2 · 5) erhält. Die Aufgabe geht daher in $3\sqrt{2\cdot 5}$ über.

Beweis.

$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{15} = \sqrt{3\cdot 2\cdot 3\cdot 5} = \sqrt{3^2\cdot 2\cdot 5} = 3\sqrt{2\cdot 5}.$$

Beispiele.

$\sqrt{21}\cdot\sqrt{35}$? Da hier die Wurzelbasen aufser $7\cdot 7$ noch $3\cdot 5$ enthalten, so erhält man $7\sqrt{15}$.

$4\sqrt{12}\cdot -5\sqrt{42}$? Aufser $6\cdot 6$ ist $2\cdot 7$ in den Wurzeln enthalten, folglich $= -20\cdot 6\sqrt{2\cdot 7} = -120\sqrt{14}$.

$$\begin{aligned}
&(7\sqrt{6}+4\sqrt{15}-3\sqrt{-10})(4\sqrt{6}-3\sqrt{-15}+2\sqrt{10})\\
&= (7\sqrt{6}+4\sqrt{15}-3\sqrt{10}\cdot i)(4\sqrt{6}-3\sqrt{15}\cdot i+2\sqrt{10})\\
&= 28\cdot 6 + 16\cdot 3\sqrt{10} - 12\cdot 2\sqrt{15}\cdot i - 21\cdot 3\sqrt{10}\cdot i\\
&\qquad - 12\cdot 15\, i + 9\cdot 5\cdot\sqrt{6}\cdot(-1) + 14\cdot 2\sqrt{15}\\
&\qquad + 8\cdot 5\sqrt{6} - 6\cdot 10\, i\\
&= 168 + 48\sqrt{10} - 5\sqrt{6} + 28\sqrt{15}\\
&\qquad - (240 + 24\sqrt{15} + 63\sqrt{10})\, i.
\end{aligned}$$

1. Zusatz. Mittelst des vorstehenden Satzes lassen sich Wurzeltafeln oft auch dann benutzen, wenn die gegebene Wurzel nicht unmittelbar in denselben enthalten ist. Hätte man z. B. $\sqrt{3076}$ zu bestimmen und enthielte die Tafel nur die Wurzeln aus 1 bis 1000, so setzt man:

$$\sqrt{3076} = \sqrt{4\cdot 769} = 2\sqrt{769},$$

$$\text{daher} \quad = 2\cdot 27{,}73085 = 55{,}4617.$$

2. Zusatz. Zuweilen hebt man auch einen Faktor aus der n^{ten} Wurzel, von dem die n^{te} Potenz nicht in allen Gliedern der Wurzelbasis enthalten ist.

Beispiel. $$\sqrt{9a^2-7a+5} = \sqrt{9a^2\left(1-\frac{7}{9a}+\frac{5}{9a^2}\right)} = 3a\sqrt{1-\frac{7}{9a}+\frac{5}{9a^2}};$$

$$\sqrt[3]{6x+4} = \sqrt[3]{6x\left(1+\frac{4}{6x}\right)} = \sqrt[3]{6x}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{3x}}.$$

37. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Um aus einem Bruche die Wurzel zu ziehen, kann man aus Zähler und Nenner dieselbe Wurzel ziehen.

Beweis. $W^{Wx} = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b} = Wb.$

Beispiele.

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}; \quad \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4};$$

$$\sqrt{3\tfrac{13}{36}} = \sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{36}} = \frac{11}{6} = 1\tfrac{5}{6};$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}; \quad \sqrt{\frac{a^2}{b^4}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^4}} = \frac{a}{b^2};$$

$$\sqrt[3]{42\tfrac{7}{8}} = \sqrt[3]{\frac{343}{8}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{7}{2} = 3\tfrac{1}{2};$$

$$\sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}; \quad \sqrt{7\tfrac{1}{49}} = \sqrt{\frac{344}{49}} = \frac{\sqrt{344}}{7};$$

$$\sqrt{-\frac{6}{49}} = \sqrt{\frac{6}{49}} \cdot i = \frac{\sqrt{6}}{7} \cdot i;$$

$$\sqrt[3]{\frac{b}{c^6}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c^6}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{c^2}; \quad \sqrt[3]{0{,}017} = \sqrt[3]{\frac{17}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{17}}{10};$$

$$\sqrt[3]{-1\tfrac{3}{8}} = -\sqrt[3]{\frac{11}{8}} = -\frac{\sqrt[3]{11}}{2};$$

$$\sqrt{\frac{4}{9 \cdot 25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9 \cdot 25}} = \frac{2}{3 \cdot 5}; \quad \sqrt{\frac{25x^4}{y^2 z^{10}}} = \frac{5x^2}{yz^5};$$

$$\sqrt{\frac{ab^6}{c^2 d^4}} = \frac{\sqrt{a \cdot b^3}}{cd^2} = \frac{b^3}{cd^2}\sqrt{a}; \quad \sqrt[3]{\frac{a^9 c}{de^{12}}} = \frac{a^3}{e^4}\sqrt[3]{\frac{c}{d}};$$

$$\sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \sqrt[n]{\frac{1}{a+b}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a+b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a+b}};$$

$$\sqrt{\frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{250}} = \sqrt[3]{\frac{1}{125} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{125}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{5\sqrt[3]{2}};$$

$$\sqrt{\frac{50}{81}} = \sqrt{\frac{25}{81} \cdot 2} = \frac{5}{9}\sqrt{2}.$$

1. Zusatz. Man vermeidet gern Wurzeln aus Brüchen, sowie Wurzeln im Nenner. Man bringt daher die Form

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ in die Form } \frac{\sqrt[n]{c}}{d},$$

indem man zunächst die gebrochene Wurzelbasis durch Erweitern in eine Potenz verwandelt, deren Exponent dem Wurzelexponent gleich ist, um alsdann aus Zähler und Nenner die Wurzel zu ziehen.

Beispiele.

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{35}{7^2}} = \frac{\sqrt{35}}{7};$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 5^2}{5 \cdot 5^2}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 25}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{50}}{5};$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{6}} = \sqrt[4]{\frac{1 \cdot 6^3}{6 \cdot 6^3}} = \sqrt[4]{\frac{216}{6^4}} = \frac{\sqrt[4]{216}}{6};$$

$$\sqrt{1\tfrac{2}{13}} = \sqrt{\frac{15}{13}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 13}{13^2}} = \frac{\sqrt{195}}{13};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b};$$

$$\sqrt[3]{\frac{c}{d}} = \sqrt[3]{\frac{cd^2}{d \cdot d^2}} = \sqrt[3]{\frac{cd^2}{d^3}} = \frac{\sqrt[3]{cd^2}}{d};$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}} = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot n}{n^2 \cdot n}} = \sqrt[3]{\frac{n}{n^3}} = \frac{\sqrt[3]{n}}{n};$$

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b^3 cd^4}} = \sqrt[5]{\frac{ab^2 c^4 d}{b^3 cd^4 \cdot b^2 c^4 d}} = \sqrt[5]{\frac{ab^2 c^4 d}{b^5 c^5 d^5}} = \frac{\sqrt[5]{ab^2 c^4 d}}{bcd};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^{n-r}}} = \sqrt[n]{\frac{ab^r}{b^{n-r} b^r}} = \sqrt[n]{\frac{ab^r}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{ab^r}}{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^{n+3}}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-3}}{b^{n+3} b^{n-3}}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-3}}{b^{2n}}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-3}}}{b^2};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b^{2n+5}}} = \sqrt{\frac{ab}{b^{2n+5} b^1}} = \sqrt{\frac{ab}{b^{2n+6}}} = \sqrt{\frac{ab}{(b^{n+3})^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b^{n+3}};$$

$$\sqrt[a+b]{\frac{m}{m^a}} = \sqrt[a+b]{\frac{m \cdot m^b}{m^a \cdot m^b}} = \sqrt[a+b]{\frac{m^{1+b}}{m^{a+b}}} = \frac{\sqrt[a+b]{m^{1+b}}}{m};$$

$$\sqrt[3n+2]{\frac{a}{b^{5n+3}}} = \sqrt[3n+2]{\frac{ab^{n+1}}{b^{5n+3} b^{n+1}}} = \sqrt[3n+2]{\frac{ab^{n+1}}{(b^2)^{3n+2}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3n+2]{ab^{n+1}}}{b^2};$$

$$\sqrt{\frac{1}{a^2bc} + \frac{2}{ab^2c} - \frac{3}{abc^2}} = \sqrt{\frac{bc + 2ac - 3ab}{a^2b^2c^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2ac + bc - 3ab}}{abc};$$

$$\sqrt{\frac{a}{2b} + \frac{5}{6a} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{6a^2 + 10b + 3ab}{4 \cdot 3ab}}$$

$$= \sqrt{\frac{(6a^2 + 10b + 3ab) \cdot 3ab}{4 \cdot 9a^2b^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3ab(6a^2 + 3ab + 10b)}}{6ab}.$$

Enthält der in Primfaktoren zerlegte Nenner gleiche Faktoren, so erweitert man nicht mit einer Potenz des Nenners, sondern mit einer kleinern Zahl, die mit Rücksicht auf jene Faktoren zu bilden ist.

Beispiele.

$$\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5}{2\cdot 2\cdot 3}} = \sqrt{\frac{5\cdot 3}{2^2\cdot 3^2}} = \frac{\sqrt{15}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{15}}{6};$$

$$\sqrt[3]{1\tfrac{7}{16}} = \sqrt[3]{\frac{23}{2^4}} = \sqrt[3]{\frac{23\cdot 2^2}{2^6}} = \frac{\sqrt[3]{23\cdot 4}}{2^2} = \frac{\sqrt[3]{92}}{4};$$

$$\sqrt[3]{\frac{11}{360}} = \sqrt[3]{\frac{11}{2^3\cdot 3^2\cdot 5}} = \sqrt[3]{\frac{11\cdot 3\cdot 5^2}{2^3\cdot 3^3\cdot 5^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{33\cdot 25}}{2\cdot 3\cdot 5} = \frac{\sqrt[3]{825}}{30};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b^5}} = \sqrt{\frac{ab}{b^6}} = \frac{\sqrt{ab}}{b^3}.$$

2. Zusatz. Den vorstehenden Zusatz kann man in Verbindung mit den Wurzeltafeln, die nur die Wurzeln aus ganzen Zahlen enthalten, zur Bestimmung der Wurzeln aus Brüchen benutzen.

Beispiele.

$$\sqrt{2\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5\cdot 2}{2\cdot 2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{3{,}162278}{2} = 1{,}581139;$$

$$\sqrt[3]{1\tfrac{6}{7}} = \sqrt[3]{\frac{13}{7}} = \sqrt[3]{\frac{13\cdot 7^2}{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{637}}{7} = \frac{8{,}6042524}{7}$$

$$= 1{,}2291789;$$

$$\sqrt[3]{56\tfrac{9}{11}} = \sqrt[3]{\frac{625}{11}} = 5\sqrt[3]{\frac{5}{11}} = 5\sqrt[3]{\frac{5\cdot 11^2}{11^3}} = \frac{5}{11}\sqrt[3]{605}$$

$$= \frac{5}{11}\cdot 8{,}4576905 = \frac{4{,}2288452}{11} = 0{,}3844405.$$

38. Umkehrung.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{oder} \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}.$$

Um zwei Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten durch einander zu dividieren, zieht man dieselbe Wurzel aus dem Quotient der Basen.

Beispiele.

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{12}{2}} = \sqrt{6}; \quad \frac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[3]{\frac{11}{25}} = \sqrt[3]{0{,}44};$$

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2; \quad \frac{\sqrt[4]{a^3 b}}{\sqrt[4]{a^2 b}} = \sqrt[4]{\frac{a^3 b}{a^2 b}} = \sqrt[4]{a};$$

$$\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^2 b}} = \sqrt[3]{\frac{ab}{a^2 b}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a}} = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot a^2}{a^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a};$$

$$\sqrt{1\tfrac{1}{14}} : \sqrt{3\tfrac{2}{21}} = \sqrt{\frac{15}{14} : \frac{65}{21}} = \sqrt{\frac{9}{26}} = 3\sqrt{\frac{1}{26}} = 3\sqrt{\frac{26}{26^2}}$$

$$= \frac{3}{26}\sqrt{26};$$

$$\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}} = \sqrt{\frac{-2}{-3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Anmerkung. Nicht $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ (s. 34. Satz), weil sich in $\frac{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{-1}}{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}}$ die gleichen Wurzeln vollständig heben.

$\frac{\sqrt[5]{a^3} - \sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}}$? Mittelst der Partialdivision findet man:

$$\sqrt[5]{a^3} - \sqrt[5]{b^3} : \sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^2} + \sqrt[5]{ab} + \sqrt[5]{b^2}$$

$$\underline{\sqrt[5]{a^3} - \sqrt[5]{a^2 b}}$$

$$+\sqrt[5]{a^2 b} - \sqrt[5]{b^3}$$

$$\underline{\sqrt[5]{a^2 b} - \sqrt[5]{ab^2}}$$

$$+\sqrt[5]{ab^2} - \sqrt[5]{b^3}$$

$$\underline{\sqrt[5]{ab^2} - \sqrt[5]{b^3}}$$

$$0.$$

Einfacher gelangt man zu demselben Quotient in folgender Weise:

Man denke sich $\dfrac{(\sqrt[5]{a})^3 - (\sqrt[5]{b})^3}{\sqrt[5]{a} - \sqrt[5]{b}}$ und setze

$\sqrt[5]{a} = c$, $\sqrt[5]{b} = d$, dann ist die Aufgabe

$$\frac{c^3 - d^3}{c - d} = c^2 + cd + d^2 \text{ (siehe §. 66, 7)}$$

$$= \left(\sqrt[5]{a}\right)^2 + \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{b} + \left(\sqrt[5]{b}\right)^2 = \sqrt[5]{a^2} + \sqrt[5]{ab} + \sqrt[5]{b^2}.$$

$\dfrac{8x^5\sqrt[3]{x} - 81\sqrt[3]{2}}{2x\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{2x}}$? Die Partialdivision giebt:

$$8x^5\sqrt[3]{x} - 81\sqrt[3]{2} : 2x\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{2x} = 4x^3\sqrt[3]{x^2} + 6x^2\sqrt[3]{2x} + 9x\sqrt[3]{4} + \frac{27\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{8x^5\sqrt[3]{x} - 12x^4\sqrt[3]{2}} \\
\qquad 12x^4\sqrt[3]{2} - 81\sqrt[3]{2} \\
\qquad \underline{12x^4\sqrt[3]{2} - 18x^2\sqrt[3]{4x^2}} \\
\qquad\qquad 18x^2\sqrt[3]{4x^2} - 81\sqrt[3]{2} \\
\qquad\qquad \underline{18x^2\sqrt[3]{4x^2} - 54x\sqrt[3]{x}} \\
\qquad\qquad\qquad + 54x\sqrt[3]{x} - 81\sqrt[3]{2} \\
\qquad\qquad\qquad \underline{ 54x\sqrt[3]{x} - 81\sqrt[3]{2}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}$$

Das 1. Glied des Quotient ergab sich hier aus:

$$8x^5\sqrt[3]{x} : 2x\sqrt[3]{x^2} = 4x^4\sqrt[3]{\frac{x}{x^2}} = 4x^4\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \frac{4x^4\sqrt[3]{x^2}}{x} = 4x^3\sqrt[3]{x^2}.$$

1. Zusatz. Zuweilen ist es von Vorteil, den rationalen Divisor einer Wurzel unter dieselbe zu bringen, also die Form $\frac{\sqrt{a}}{b}$ in $\sqrt{\frac{c}{d}}$ zu verwandeln.

Beispiele.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b^n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}};$$

$$\frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5^2}} = \sqrt{\frac{3}{25}} = \sqrt{0{,}12};$$

$$\frac{\sqrt{7}}{4} = \sqrt{\frac{7}{4^2}} = \sqrt{0{,}4375};$$

$$\frac{\sqrt[3]{11}}{2} = \frac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{1\tfrac{3}{8}} = \sqrt[3]{1{,}375};$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} = \sqrt{\frac{3}{6^2}} = \sqrt{0{,}083333\ldots};$$

$$\frac{\sqrt[4]{ab^3c}}{ab} = \sqrt[4]{\frac{ab^3c}{a^4b^4}} = \sqrt[4]{\frac{c}{a^3b}};$$

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}} = \sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a-b}{a+b}};$$

$$\frac{\sqrt{a^2-2ab}}{a} = \sqrt{\frac{a^2-2ab}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{2b}{a}};$$

$$\frac{\sqrt[3]{9x^2-6}}{3} = \sqrt[3]{\frac{9x^2-6}{3^3}} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{3}-\frac{2}{9}}.$$

2. Zusatz. In gleicher Weise verwandelt man den Quotient aus einer rationalen Zahl und einer Wurzel in die Wurzel aus einem Quotient.

Beispiele. $\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{b}}$;

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \sqrt{12\tfrac{1}{2}};$$

$$\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{a}} = \sqrt{a}; \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{0,33333\ldots};$$

$$\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^3}{x^2-1}} = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^3}{(x+1)(x-1)}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x-1}} = \sqrt[3]{\frac{x^2+2x+1}{x-1}}$$

und durch Partialdivision

$$= \sqrt[3]{x+3+\frac{4}{x-1}}.$$

3. Zusatz. Der reciproke Wert einer Wurzel ist dieselbe Wurzel aus der reciproken Basis; denn

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}.$$

4. Zusatz. Oft kann man bei vielgliederigen Ausdrücken durch Ausheben einer Wurzel und bei Quotienten durch Kürzen mit einer Wurzel die Zahl der Wurzeln vermindern und dadurch den Ausdruck vereinfachen.

Beispiele.

$$\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{a^4} + 3\sqrt[3]{a^7} + 4\sqrt[3]{a^{10}}$$

$$= \sqrt[3]{a}\left[1 + 2\sqrt[3]{3^3} + 3\sqrt[3]{a^6} + 4\sqrt[3]{a^9}\right]$$

$$= \sqrt[3]{a}\left[1 + 2a + 3a^2 + 4a^3\right];$$

$$(3\sqrt{6} - 2\sqrt{5})^2 = \left[\sqrt{5}\left(\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}} - 2\right)\right]^2 = 5\left(3\sqrt{\frac{6}{5}} - 2\right)^2$$

$$= 5\left(3\sqrt{1,2} - 2\right)^2;$$

$$\frac{13\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{7\sqrt{5}+\sqrt{2}} \text{ durch } \sqrt{2} \text{ gekürzt}$$

$$=\frac{13\sqrt{\frac{5}{2}}-3}{7\sqrt{\frac{5}{2}}+1}=\frac{13\sqrt{2{,}5}-3}{7\sqrt{2{,}5}+1};$$

$$\left(\frac{4}{3\sqrt[3]{\frac{5}{4}}-2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}\right)^3 \text{ durch } 2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$ gekürzt (d. i. durch 2 gekürzt und mit $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ erweitert)

$$=\left(\frac{2\sqrt[3]{\frac{3}{2}}}{1{,}5\sqrt[3]{\frac{15}{8}}-1}\right)^3=\frac{8\cdot\frac{3}{2}}{\left(\frac{1{,}5}{2}\sqrt[3]{15}-1\right)^3}$$

$$=\frac{12}{\left(0{,}75\sqrt[3]{15}-1\right)^3}.$$

C. Verschiedene Basen und verschiedene Wurzelexponenten.

39. Man bilde entweder gleiche Wurzeln oder gebrochene Potenzexponenten. Auch ist oft das Zerlegen der Basen in Primfaktoren von Vorteil.

Beispiele.

$\sqrt{ab}\cdot\sqrt[3]{a^2 b^{\frac{3}{4}}}\cdot\sqrt[4]{ab^3}$? Entweder:

$$\sqrt[12]{a^6b^6}\cdot\sqrt[12]{a^8b^3}\cdot\sqrt[12]{a^3b^9}=\sqrt[12]{a^6b^6a^8b^3a^3b^9}=\sqrt[12]{a^{17}b^{18}}$$

$$=ab\sqrt[12]{a^5b^6}, \text{ oder;}$$

$$a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{17}{12}}b^{\frac{3}{2}}=ab\,a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{1}{2}}=ab\sqrt[12]{a^5}\cdot\sqrt{b}$$

$$=ab\sqrt[12]{a^5}\cdot\sqrt[12]{b^6}=ab\sqrt[12]{a^5b^6};$$

$$\left(4\sqrt[3]{5}-3\sqrt{2}\right)^5=\left(4\sqrt[3]{5}\right)^5-5\cdot\left(4\sqrt[3]{5}\right)^4\cdot 3\sqrt{2}$$
$$+10\left(4\sqrt[3]{5}\right)^3(3\sqrt{2})^2-10\left(4\sqrt[3]{5}\right)^2(3\sqrt{2})^3$$
$$+5\cdot 4\sqrt[3]{5}(3\sqrt{2})^4-(3\sqrt{2})^5$$
$$=1024\sqrt[3]{5^5}-5\cdot 256\cdot 3\sqrt[3]{5^4}\cdot\sqrt{2}+10\cdot 64\cdot 9\cdot 5\cdot 2$$
$$-10\cdot 16\cdot 27\cdot\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt{2^3}+5\cdot 4\cdot 81\cdot\sqrt[3]{5}\cdot 2^2$$
$$-243\sqrt{2^5}.$$
$$=1024\cdot 5\sqrt[3]{5^2}-3840\cdot 5\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2}+57600$$
$$-4320\sqrt[3]{25}\cdot 2\sqrt{2}+6480\sqrt[3]{5}-243\cdot 2^2\sqrt{2}$$
$$=5120\sqrt[3]{25}-19200\sqrt[6]{5^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}+57600$$
$$-8640\sqrt[6]{25^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}+6480\sqrt[3]{5}-972\sqrt{2}$$
$$=57600-972\sqrt{2}+6480\sqrt[3]{5}+5120\sqrt[3]{25}$$
$$-19200\sqrt[6]{200}-8640\sqrt[6]{5000}.$$

$$\sqrt[4]{6\sqrt[3]{18}}\cdot\sqrt[6]{2\sqrt[4]{27}}\cdot\sqrt[12]{3\sqrt{6}}$$
$$=\sqrt[4]{2\cdot 3\sqrt[3]{2\cdot 3^2}}\cdot\sqrt[6]{2\sqrt[4]{3^3}}\cdot\sqrt[12]{3\sqrt{2\cdot 3}}$$
$$=\sqrt[4]{2\cdot 3\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}}\cdot\sqrt[6]{2\cdot 3^{\frac{3}{4}}}\cdot\sqrt[12]{3\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\sqrt[4]{2^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{\frac{5}{3}}}\cdot\sqrt[6]{2^1\cdot 3^{\frac{3}{4}}}\cdot\sqrt[12]{3^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}$$
$$=2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{5}{12}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}\cdot 2^{\frac{1}{24}}=2^{\frac{13}{24}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[24]{2^{13}\cdot 3^{16}}.$$

$(1-a):\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{-b}}-\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}}+\sqrt{-\frac{a}{b}}\right)$? Mit Rücksicht auf die hier auszuführende Partialdivision findet man, dafs

Divisor und Dividend schon geordnet sind, denn ersterer enthält im 1. Gliede $a^{-\frac{1}{4}}$, im 2. a^0, im 3. $a^{\frac{1}{4}}$, im 4. $a^{\frac{2}{4}}$.

Verwandelt man

$$\frac{1}{\sqrt{-b}} \text{ in } \frac{1}{\sqrt{b} \cdot i} = \frac{1 \cdot i}{\sqrt{b} \cdot i^2} = \frac{i}{\sqrt{b} \cdot (-1)} = -\frac{i}{\sqrt{b}}$$

und $\sqrt{-\frac{a}{b}}$ in $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot i$, so erhält man:

$$(1-a):\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{b}} - \frac{i}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}} + \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot i\right).$$

Dividend und Divisor sind nun mit $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{b}$ zu multiplicieren, um das 1. Glied des Divisor in 1 zu verwandeln:

$$\left[\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (1-a)\right]:\left(1 - \sqrt[4]{a} \cdot i - \sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^2} \cdot i\right) \text{ oder}$$

$$\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \frac{1-a}{1 - \sqrt[4]{a} \cdot i - \sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{a^3} \cdot i} \quad \ldots . \ (\mathrm{Y})$$

Die Partialdivision giebt für den Bruch:

$$(1-a):\left(1 - \sqrt[4]{a} \cdot i - \sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{a^3} \cdot i\right) = 1 + \sqrt[4]{a} \cdot i$$

$$\underline{1 - \sqrt[4]{a} \cdot i - \sqrt[4]{a^2} + \sqrt[4]{a^3} \cdot i}$$

$$+ \sqrt[4]{a} \cdot i + \sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{a^3} \cdot i - a$$

$$\underline{+ \sqrt[4]{a} \cdot i + \sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{a^3} \cdot i - a}$$

$$0.$$

Der gesuchte Quotient ist mithin (s. Y)

$$= \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \left(1 + \sqrt[4]{a} \cdot i\right) = \sqrt[4]{ab^2} + \sqrt{ab} \cdot i.$$

Der Geübte hätte das Resultat sogleich in Y erkannt, ohne die Partialdivision auszuführen, da sich dieser Ausdruck mit

$$\sqrt[4]{a} \cdot i = n \text{ in } \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \frac{1-n^4}{1-n+n^2-n^3} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (1+n)$$

(s. §. 66, 8 und §. 61, 1, 1. Zus.)

$$= \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{b} \left(1 + \sqrt[4]{a} \cdot i\right) \text{ verwandelt.}$$

D. Rationalmachen des Nenners.

40. Rationalmachen des eingliederigen Nenners.

$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2{,}4494897} = 1:2{,}4494897$ würde mit einer sehr beschwerlichen Division zu dem Resultate 0,4082483 führen.

Bequemer erhält man das Resultat, wenn man $\frac{1}{\sqrt{6}}$ mit $\sqrt{6}$ erweitert, um den Nenner rational zu machen:

$$\frac{1 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Man hat hier zwar auch $\sqrt{6} = 2{,}4494897$ zu bestimmen, aber es fällt jene zusammengesetzte Division weg. In sehr einfacher Weise ergiebt sich nun $\frac{2{,}4494897}{6} = 0{,}4082483$.

Beispiele.

$$\frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{10} = 0{,}6\sqrt{10};$$

$$\frac{9\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{15} \text{ oder } = \sqrt{9 \cdot 15} = \sqrt{135};$$

$$\frac{1}{\sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{-5}}{-5} = -\frac{\sqrt{-5}}{5}$$

$$= -\frac{\sqrt{5} \cdot i}{5};$$

$$\text{oder } \frac{1}{\sqrt{-5}} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot i} = \frac{\sqrt{5} \cdot i}{(\sqrt{5} \cdot i)^2} = \frac{\sqrt{5} \cdot i}{5 \cdot (-1)} i;$$

$$\frac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt[3]{14} \cdot \sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt[6]{14^2} \cdot \sqrt[6]{7^3}}{7} = \frac{\sqrt[6]{33614}}{7};$$

$$\frac{1}{4i} = \frac{i}{4i^2} = \frac{i}{4(-1)} = -\frac{i}{4};$$

$$\frac{a}{\sqrt{ab}} = \frac{a\sqrt{ab}}{(\sqrt{ab})^2} = \frac{a\sqrt{ab}}{ab} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

$\frac{6}{\sqrt[3]{14}}$? Da hier der Nenner $\sqrt[3]{14^3}$ zu bilden ist, so ist mit

$\sqrt[3]{14^2}$ zu erweitern: $= \frac{6\sqrt[3]{14^2}}{\sqrt[3]{14^3}} = \frac{6\sqrt[3]{196}}{14} = \frac{3\sqrt[3]{196}}{7}$;

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2 b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt[3]{ab^2}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^3 b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{ab};$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{a^3}} = \frac{\sqrt[7]{a^4}}{\sqrt[7]{a^3} \cdot \sqrt[7]{a^4}} = \frac{\sqrt[7]{a^4}}{a};$$

$\frac{1}{\sqrt[6]{-a^5}}$? Um Fehler zu vermeiden, zerlege man immer

$\sqrt[n]{-c}$ in $\sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{-1}$; daher

$$\frac{1}{\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[6]{-1}} = \frac{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{(-1)^5}}{\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[6]{-1} \cdot \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{(-1)^5}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{-1}}}{a \cdot (-1)} = -\frac{\sqrt[6]{a}}{a} \cdot i;$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{-1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{-1}} = \frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{(-1)^3}}{a(-1)} = -\frac{\sqrt[4]{a^3}}{a} \cdot \sqrt[4]{-1}$$

$$= -\frac{\sqrt[4]{a^3}}{a} \text{ multipliciert mit den 4 Werten von } \sqrt[4]{-1};$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^{n-2}}} = \frac{\sqrt[n]{a^2}}{\sqrt[n]{a^{n-2}} \cdot \sqrt[n]{a^2}} = \frac{\sqrt[n]{a^2}}{a};$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^{3n+1}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{3n+1}} \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{4n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a^4}.$$

41. Rationalmachen des mehrgliederigen Nenners.

I. Zwei Glieder mit Quadratwurzeln.

Hier ist $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ anzuwenden, um die Quadratwurzeln zu beseitigen; denn

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b.$$

Beispiele.

$\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$? Da der Nenner eine Differenz ist, so ist mit der Summe der beiden Glieder zu erweitern:

$$=\frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}=\frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{6(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3}=\frac{3(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{2}.$$

$$\frac{5}{2\sqrt{11}+3\sqrt{6}}=\frac{5(2\sqrt{11}-3\sqrt{6})}{(2\sqrt{11}+3\sqrt{6})(2\sqrt{11}-3\sqrt{6})}$$

$$=\frac{5(2\sqrt{11}-3\sqrt{6})}{(2\sqrt{11})^2-(3\sqrt{6})^2}=\frac{5(2\sqrt{11}-3\sqrt{6})}{4\cdot 11-9\cdot 6}$$

$$=\frac{5(2\sqrt{11}-3\sqrt{6})}{-10}=-\frac{2\sqrt{11}-3\sqrt{6}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{11}.$$

$\frac{1}{4+3\sqrt{5}}$? Um nicht, wie im vorhergehenden Beispiele, einen negativen Nenner zu erhalten, setzt man das gröſsere Glied voran. Da man nach dem Erweitern die Quadrate der beiden Glieder erhält, hier also 4^2 und $(3\sqrt{5})^2$, oder 16 und $9\cdot 5$, so erkennt man immer leicht, welches Glied das gröſsere ist. Hier ist $9\cdot 5>16$ und folglich ist das gröſsere Glied $3\sqrt{5}$ voran zu setzen

$$=\frac{1}{3\sqrt{5}+4}=\frac{3\sqrt{5}-4}{(3\sqrt{5}+4)(3\sqrt{5}-4)}=\frac{3\sqrt{5}-4}{(3\sqrt{5})^2-4^2}$$

$$=\frac{3\sqrt{5}-4}{29}.$$

$\dfrac{256}{7\sqrt{3}-5\sqrt{11}}$? Da $49 \cdot 3 < 25 \cdot 11$, so ist $5\sqrt{11}$ voranzustellen. Daher

$$= -\frac{256}{5\sqrt{11}-7\sqrt{3}} = -\frac{256(5\sqrt{11}+7\sqrt{3})}{(5\sqrt{11})^2-(7\sqrt{3})^2}$$

$$= -\frac{256(5\sqrt{11}+7\sqrt{3})}{25 \cdot 11 - 49 \cdot 3} = -2(5\sqrt{11}+7\sqrt{3}).$$

$$\frac{5\sqrt{13}+3\sqrt{2}}{4\sqrt{13}+9\sqrt{2}} = \frac{(5\sqrt{13}+3\sqrt{2})(4\sqrt{13}-9\sqrt{2})}{(4\sqrt{13})^2-(9\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{20 \cdot 13 + 12\sqrt{26} - 45\sqrt{26} - 27 \cdot 2}{16 \cdot 13 - 81 \cdot 2} = \frac{206 - 33\sqrt{26}}{46}.$$

Die 4 Wurzeln der Aufgabe verwandeln sich in eine!

$\dfrac{1}{84-24\sqrt{3}}$? Die gemeinsamen Faktoren der Glieder des Nenners sind stets vorher auszuheben. Daher

$$= \frac{1}{12(7-2\sqrt{3})} = \frac{7+2\sqrt{3}}{12[7^2-(2\sqrt{3})^2]}$$

$$= \frac{7+2\sqrt{3}}{12(49-4 \cdot 3)} = \frac{7+2\sqrt{3}}{444}.$$

$$\frac{1}{5+4i} = \frac{1 \cdot (5-4i)}{5^2-(4i)^2} = \frac{5-4i}{25-16(-1)} = \frac{5-4i}{41}.$$

$$\frac{\sqrt{9+2\sqrt{5}}}{3\sqrt{5}+4} = \frac{(3\sqrt{5}-4)\sqrt{9+2\sqrt{5}}}{(3\sqrt{5})^2-4^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(3\sqrt{5}-4)^2(9+2\sqrt{5})}}{9 \cdot 5 - 16} = \frac{\sqrt{(61-24\sqrt{5})(9+2\sqrt{5})}}{29}$$

$$= \frac{\sqrt{549-216\sqrt{5}+162\sqrt{5}-240}}{29} = \frac{\sqrt{309-54\sqrt{5}}}{29}.$$

$$\frac{(3-\sqrt{7})\sqrt{4\sqrt{7}-7}}{2\sqrt{7}-5}$$

$$= \frac{(2\sqrt{7}+5)(3-\sqrt{7})\sqrt{4\sqrt{7}-7}}{(2\sqrt{7})^2-5^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{7}+1)\sqrt{4\sqrt{7}-7}}{4\cdot 7-25} = \frac{\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2(4\sqrt{7}-7)}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{(8+2\sqrt{7})(4\sqrt{7}-7)}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{32\sqrt{7}+56-56-14\sqrt{7}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{18\sqrt{7}}}{3} = \sqrt{\frac{18\sqrt{7}}{9}} = \sqrt{2\sqrt{7}} = \sqrt{\sqrt{28}}$$

$$= \sqrt[4]{28}.$$

$$\frac{4\sqrt{2a+b}-3\sqrt{a+2b}}{3\sqrt{2a+b}-2\sqrt{a+2b}}$$

$$= \frac{(4\sqrt{2a+b}-3\sqrt{a+2b})(3\sqrt{2a+b}+2\sqrt{a+2b})}{9(2a+b)-4(a+2b)}$$

$$= \frac{12(2a+b)-9\sqrt{a+2b}\cdot\sqrt{2a+b}+8\sqrt{2a+b}\cdot\sqrt{a+2b}-6(a+2b)}{14a+b}$$

$$= \frac{18a-\sqrt{(a+2b)(2a+b)}}{14a+b}.$$

$$\frac{9-a}{\sqrt{2a+3\sqrt{a}}+\sqrt{a}} = \frac{(9-a)\left(\sqrt{2a+3\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{2a+3\sqrt{a}}\right)^2-(\sqrt{a})^2}$$

$$= \frac{(9-a)\left(\sqrt{2a+3\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)}{2a+3\sqrt{a}-a} = \frac{(9-a)\left(\sqrt{2a+3\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)}{3\sqrt{a}+a}$$

$$= \frac{(3\sqrt{a}-a)(9-a)\left(\sqrt{2a+3\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)}{(3\sqrt{a})^2-a^2}$$

$$= \frac{(3\sqrt{a}-a)(9-a)\left(\sqrt{2a+3\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)}{9a-a^2}$$

$$= \frac{(3\sqrt{a}-a)\left(\sqrt{2a+3\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)}{a}$$

$$= \frac{(3\sqrt{a}-a)\sqrt{2a+3\sqrt{a}}-3a+a\sqrt{a}}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{(3\sqrt{a}-a)^2(2a+3\sqrt{a})}}{a}-3+\sqrt{a}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2+9a-6a\sqrt{a})(2a+3\sqrt{a})}}{a}-3+\sqrt{a}$$

$$= \sqrt{\frac{2a^3-9a^2\sqrt{a}+27a\sqrt{a}}{a^2}}-3+\sqrt{a}$$

$$= \sqrt{2a-9\sqrt{a}+\frac{27\sqrt{a}}{a}}-3+\sqrt{a}.$$

$$\frac{2\sqrt{5+\sqrt{6}}+\sqrt{5}}{\sqrt{5+\sqrt{6}}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\sqrt{5+\sqrt{6}}+\sqrt{5})\,(2\sqrt{5+\sqrt{6}}+\sqrt{5})}{(5+\sqrt{6})-5}$$

$$= \frac{2(5+\sqrt{6})+2\sqrt{5(5+\sqrt{6})}+\sqrt{5(5+\sqrt{6})}+5}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{15+2\sqrt{6}+3\sqrt{5(5+\sqrt{6})}}{\sqrt{6}}$$

$= \frac{15}{\sqrt{6}}+2+\frac{3\sqrt{5(5+\sqrt{6})}}{\sqrt{6}}$. Hier ist nur der 1. Bruch mit $\sqrt{6}$ zu erweitern, der letzte jedoch nach dem 38. Satze zu behandeln, weil $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{c}}$ in der Form $\sqrt{\frac{a+b}{c}}$ leichter zu berechnen ist, als in der Form $\frac{\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+b}}{c}=\frac{\sqrt{(a+b)c}}{c}$. Daher

$$= \frac{5}{2}\sqrt{6}+2+3\sqrt{\frac{5(5+\sqrt{6})}{6}}$$

$$= \frac{5\sqrt{6}}{2}+2+\sqrt{\frac{15}{2}(5+\sqrt{6})}.$$

Zusatz. $\dfrac{a}{\sqrt{b \pm \sqrt{c}}}$ $\left(\text{oder } \dfrac{a}{\sqrt{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}}\right)$ erweitert man nicht mit $\sqrt{b \pm \sqrt{c}}$, um zunächst den Nenner $b \pm \sqrt{c}$ zu erhalten und dann das Erweitern mit $b \mp \sqrt{c}$ fortzusetzen, sondern unmittelbar mit $\sqrt{b \mp \sqrt{c}}$.

Beispiele. $\dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}$ erweitert mit

$$\sqrt{5+2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{\sqrt{(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})}}$$

$$= \frac{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{\sqrt{25-4\cdot 3}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{13}}.$$

$$\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{5-3\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{3-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-3\sqrt{2}}}{\sqrt{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2(3-\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})}}{\sqrt{3^2-(\sqrt{2})^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(3-2\sqrt{2})(21-14\sqrt{2})}}{\sqrt{7}}$$

$$= \frac{\sqrt{7(3-2\sqrt{2})^2}}{\sqrt{7}} = 3-2\sqrt{2}.$$

II. Mehr als 2 Glieder mit Quadratwurzeln.

Man denke sich den Nenner 2gliederig und verfahre dann wie in I.

Beispiele.

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{7}-\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(2\sqrt{7}-\sqrt{3})-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2})[(2\sqrt{7}-\sqrt{3})+\sqrt{2}]}{[(2\sqrt{7}-\sqrt{3})-\sqrt{2}][(2\sqrt{7}-\sqrt{3})+\sqrt{2}]}$$

$$= \frac{14 + 2\sqrt{21} + 2\sqrt{14} - \sqrt{21} - 3 - \sqrt{6} + \sqrt{14} + \sqrt{6} + 2}{(2\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{13 + \sqrt{21} + 3\sqrt{14}}{31 - 4\sqrt{21} - 2}$$

$$= \frac{13 + \sqrt{21} + 3\sqrt{14}}{29 - 4\sqrt{21}} = \frac{(13 + \sqrt{21} + 3\sqrt{14})(29 + 4\sqrt{21})}{29^2 - (4\sqrt{21})^2}$$

$$= \frac{461 + 81\sqrt{21} + 87\sqrt{14} + 84\sqrt{6}}{505}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{11} - \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{(\sqrt{11} - \sqrt{5}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{11} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{11} - \sqrt{5})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}$$

$= \dfrac{\sqrt{11} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{11 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{55}}$. Erweitert man den Bruch mit $11 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{55}$, so wird der Nenner des neuen Bruches $(11 + 2\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{55})^2 = 44\sqrt{6} - 75$. Dieser neue Bruch ist daher noch mit $44\sqrt{6} + 75$ zu erweitern.

III. Zwei Glieder mit Kubikwurzeln.

Man benutze $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.

Beispiel.

$$\underset{a\;-\;b}{\frac{1}{2\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{2}}} = \frac{\left(2\sqrt[3]{9}\right)^2 + 2\sqrt[3]{9} \cdot 3\sqrt[3]{2} + \left(3\sqrt[3]{2}\right)^2}{\underset{a\;-\;b}{\left(2\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{2}\right)} \underset{a^2\;+\;a\,\cdot\,b\;+\;b^2}{\left[\left(2\sqrt[3]{9}\right)^2 + 2\sqrt[3]{9} \cdot 3\sqrt[3]{2} + \left(3\sqrt[3]{2}\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{12\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{18}+9\sqrt[3]{4}}{\underbrace{\left(2\sqrt[3]{9}\right)^3}_{a^3} - \underbrace{\left(3\sqrt[3]{2}\right)^3}_{b^3}} = \frac{12\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{18}+9\sqrt[3]{4}}{8\cdot 9 - 27\cdot 2} = \frac{12\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{18}+9\sqrt[3]{4}}{18}.$$

IV. Drei Glieder mit Kubikwurzeln.

Hier ist das Produkt $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = a^3+b^3+c^3-3abc$ zu benutzen (s. §. 61, 8).

Beispiel.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{7}}_{a}+\underbrace{\sqrt[3]{5}}_{b}+\underbrace{\left(-2\sqrt[3]{2}\right)}_{c}}.$$ Erweitert man

mit $\underbrace{\left(\sqrt[3]{7}\right)^2}_{a^2}+\underbrace{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2}_{b^2}+\underbrace{\left(-2\sqrt[3]{2}\right)^2}_{c^2}-\underbrace{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5}}_{a\cdot b}+\underbrace{\sqrt[3]{7}\cdot 2\sqrt[3]{2}}_{-a\cdot c}+\underbrace{\sqrt[3]{5}\cdot 2\sqrt[3]{2}}_{-b\cdot c}$

$= \sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{25}+4\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{35}+2\sqrt[3]{14}+2\sqrt[3]{10}$, so wird der Nenner $a^3+b^3+c^3-3\cdot a\cdot b\cdot c$, d. i.

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^3+\left(\sqrt[3]{5}\right)^3+\left(-2\sqrt[3]{2}\right)^2-3\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\left(-2\sqrt[3]{2}\right)$$

$$= 7 + 5 - 8\cdot 2 + 6\sqrt[3]{70} = 6\sqrt[3]{70}-4.$$

Auf den entstehenden Bruch ist nun Abschnitt III anzuwenden.

V. Enthält der Nenner 4. Wurzeln, oder 4. und 2. Wurzeln, so erweitert man zunächst wie in I und II mit der Summe oder Differenz.

Beispiel.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}}=\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}{\left(\sqrt[4]{5}\right)^2-\left(\sqrt[4]{3}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{25}+\sqrt[4]{9})}{5-3}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{125}-\sqrt[4]{75}+\sqrt[4]{45}-\sqrt[4]{27}}{2}.$$

VI. Die Form $\frac{A}{\sqrt[n]{\sqrt{B}\pm\sqrt{C}}}$ erweitert man mit $\sqrt[n]{\sqrt{B}\mp\sqrt{C}}$ (vergl. den Zusatz zu I).

Beispiel.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{13+9\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt[3]{13-9\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{13+9\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{13-9\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{13-9\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{169-81\cdot 2}}=\sqrt[3]{\frac{13-9\sqrt{2}}{7}}.$$

VII. $\frac{1}{\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}}$ könnte zwar mittelst des Satzes:

$$(a\pm b)\left(a^n\mp a^{n-1}b+a^{n-2}b\pm\ldots\; b^n\right)$$

einen rationellen Nenner erhalten, der Bruch würde aber bei einem größsern n in der neuen Gestalt weniger leicht berechnet werden können, als in der gegebenen.

Man wird daher z. B. $\frac{1}{\sqrt[5]{3}+\sqrt[5]{2}}$ unmittelbar mit

$$\frac{1}{1{,}24573+1{,}14870}=\frac{1}{2{,}39443}=0{,}417636 \text{ berechnen.}$$

Dasselbe gilt von vielen Beispielen der Abschnitte I bis VI.

VIII. Ist der Nenner imaginär, so ist er zunächst in die Form $\alpha \pm \beta i$ zu bringen und der Bruch alsdann ohne Rücksicht auf die vorhandenen Wurzeln mit $\alpha \mp \beta i$ zu erweitern, weil jeder imaginäre Ausdruck die Form $A \pm Bi$ erhalten mufs.

Beispiel.

$$\frac{1}{2+5\sqrt[6]{-7}}=\frac{1}{2+5\sqrt[6]{7}\cdot\sqrt[6]{-1}}. \text{ Einer der 6 Werte ist}$$

$$\frac{1}{2+5\sqrt[6]{7}\cdot\frac{\sqrt{3}+i}{2}} \text{ (s. Satz 31, 2. Zus.)}$$

$$=\frac{1}{2+\frac{5\sqrt[6]{7}\cdot\sqrt[6]{27}}{2}+\frac{5\sqrt[6]{7}}{2}\cdot i}$$

$$=\frac{1}{2+2{,}5\sqrt[6]{189}+2{,}5\sqrt[6]{7}\cdot i}$$

$$=\frac{1}{2+5{,}98894+3{,}30210\,i}=\frac{1}{7{,}98894+3{,}3021\,i}$$

$$=\frac{7{,}98894-3{,}3021\,i}{7{,}98894^2-(3{,}3021\,i)^2}=\frac{7{,}98894-3{,}3021\,i}{63{,}8232+10{,}9038}$$

$$=\frac{7{,}98894-3{,}3021\,i}{74{,}727}=\frac{7{,}98894}{74{,}727}-\frac{3{,}3021\,i}{74{,}727}$$

$$=0{,}106901-0{,}044189\,i.$$

E. Verwandlungen von Wurzeln aus Binomien mit Wurzelausdrücken.

42. Es ist

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2\pm 2\cdot\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{b}}+\left(\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a + \sqrt{b} \pm 2\sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} + a - \sqrt{b}}$$

$$= \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 - (\sqrt{b})^2}} \text{ oder}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})} \dots \text{(Y)}$$

Der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen läſst sich also stets in den einfachern der rechten Seite verwandeln.

1. Beispiel. $\sqrt{7+\sqrt{11}} - \sqrt{7-\sqrt{11}}$? Hier ist (siehe Y) $a = 7$, $b = 11$. Daher

$$= \sqrt{2(7 - \sqrt{49-11})} = \sqrt{2(7-\sqrt{38})}.$$

2. Beispiel. $\sqrt{13+3\sqrt{7}} + \sqrt{13-3\sqrt{7}}$? Zunächst ist die Form der linken Seite von Y herzustellen, also der Faktor 3 nach dem 35. Satze unter die Wurzel zu bringen:

$$= \sqrt{13+\sqrt{63}} + \sqrt{13-\sqrt{63}}$$

$$= \sqrt{2(13+\sqrt{13^2-63})} = \sqrt{2(13+\sqrt{106})}.$$

Besonders vorteilhaft ist diese Verwandlung, wenn, wie in den nachfolgenden Beispielen, $\sqrt{a^2 - b}$ rational wird (oder, wie man sich auch ausdrückt: wenn $a^2 - b$ ein vollständiges Quadrat ist).

3. Beispiel.

$$\sqrt{14+2\sqrt{13}} - \sqrt{14-2\sqrt{13}}$$

$$= \sqrt{14+\sqrt{52}} - \sqrt{14-\sqrt{52}}$$

$$= \sqrt{2(14-\sqrt{14^2-52})} = \sqrt{2(14-\sqrt{196-52})}$$

$$= \sqrt{2(14-\sqrt{144})} = \sqrt{2(14-12)} = \sqrt{4} = 2.$$

4. Beispiel. $\sqrt{9+\sqrt{65}} + \sqrt{9-\sqrt{65}}$

$$= \sqrt{2(9+\sqrt{81-65})} = \sqrt{2(9+4)} = \sqrt{26}.$$

5. Beispiel. $\sqrt{7a-3b+2\sqrt{b(7a-4b)}}$

$$- \sqrt{7a-3b-2\sqrt{b(7a-4b)}}$$

$$= \sqrt{7a - 3b + \sqrt{4b(7a - 4b)}}$$
$$- \sqrt{7a - 3b - \sqrt{4b(7a - 4b)}}$$
$$= \sqrt{2\left[7a - 3b - \sqrt{(7a - 3b)^2 - 4b(7a - 4b)}\right]}$$
$$= \sqrt{2\left[7a - 3b - \sqrt{49a^2 - 70ab + 25b^2}\right]}$$
$$= \sqrt{2\left[7a - 3b - \sqrt{(7a - 5b)^2}\right]} \text{ (s. §. 62, 2)}$$
$$= \sqrt{2[7a - 3b - (7a - 5b)]} = \sqrt{2 \cdot 2b} = 2\sqrt{b}.$$

Anmerkung. Die Form $A \pm \sqrt{B}$ nennt man ein „surdisches Binom“.

43. Die Quadratwurzel aus einem surdischen Binom.

Quadriert man einen Ausdruck von der Form $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ oder $a \pm \sqrt{b}$, so erhält man ein surdisches Binom, z. B.

$$(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2 = 7 + 2\sqrt{35} + 5 = 12 + \sqrt{140}.$$

Es mufs also auch umgekehrt $\sqrt{12 + \sqrt{140}} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$ sein.

Es fragt sich nun, wie man aus $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ unter gewissen Bedingungen die einfachere Form $\sqrt{c} \pm \sqrt{d}$ ableitet.

Nach Y im 32. Satze ist:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} &= \sqrt{2\left(a + \sqrt{a^2 - b}\right)} \\ \sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} &= \sqrt{2\left(a - \sqrt{a^2 - b}\right)} \end{aligned}\right\} \dots . \text{(W)}$$

Durch Addition der beiden Gleichungen W (s. §. 7, 9, Zus.) erhält man:

$$2\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{2\left(a + \sqrt{a^2 - b}\right)} + \sqrt{2\left(a - \sqrt{a^2 - b}\right)}.$$

Beide Seiten nach §. 13, 30 durch $2 = \sqrt{4}$ dividiert:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2\left(a + \sqrt{a^2 - b}\right)}}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{2\left(a - \sqrt{a^2 - b}\right)}}{\sqrt{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{2\left(a + \sqrt{a^2 - b}\right)}{4}} + \sqrt{\frac{2\left(a - \sqrt{a^2 - b}\right)}{4}},$$

oder

$$\text{✻}\ \sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad \ldots (A)$$

Subtrahiert man die Gleichungen W, so ergiebt sich:

$$2\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)} + \sqrt{2\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)}$$

und nach der Division durch 2:

$$\text{✻}\ \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad \ldots (B)$$

$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ wird selbstverständlich nur dann durch diese Formeln vereinfacht, wenn $\sqrt{a^2-b}$ rational ist.

1. Beispiel. $\sqrt{7+\sqrt{33}}$? Da $7^2-33=16$ ein vollständiges Quadrat ist, so kann der gegebene Ausdruck durch obige Formeln vereinfacht werden. Mit $a=7$, $b=33$ geht A über in:

$$\sqrt{7+\sqrt{33}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-33}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-33}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{7+\sqrt{16}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{16}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{7+4}{2}} + \sqrt{\frac{7-4}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{22}{4}} + \sqrt{\frac{6}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{22}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{22}+\sqrt{6}}{2}.$$

Besitzt man $\sqrt{22}$ und $\sqrt{6}$ in einer Tafel, so ist dieser Ausdruck unmittelbar berechnet.

2. Beispiel. $\sqrt{17-4\sqrt{15}}$? Hier ist zunächst 4 in die Wurzel zu bringen, um die Form $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ herzustellen $= \sqrt{17-\sqrt{240}}$. Mit $a=17$, $b=240$ geht nun B über in:

$$\sqrt{17-\sqrt{240}}=\sqrt{\frac{17+\sqrt{17^2-240}}{2}}-\sqrt{\frac{17-\sqrt{17^2-240}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{17+\sqrt{49}}{2}}-\sqrt{\frac{17-\sqrt{49}}{2}}$$

$$=\sqrt{12}-\sqrt{5}=2\sqrt{3}-\sqrt{5}.$$

3. Beispiel. $\sqrt{2\frac{31}{60}-2\sqrt{\frac{3}{5}}}=\sqrt{\frac{151}{60}-\sqrt{\frac{12}{5}}}.$

Mit $a=\frac{151}{60}$, $b=\frac{12}{5}$ ergiebt sich aus B:

$$\sqrt{\frac{\frac{151}{60}+\sqrt{\left(\frac{151}{60}\right)^2-\frac{12}{5}}}{2}}$$

$$-\sqrt{\frac{\frac{151}{60}-\sqrt{\left(\frac{151}{60}\right)^2-\frac{12}{5}}}{2}}.$$

Hier ist die innere Wurzel

$$=\sqrt{\frac{22801}{3600}-\frac{8640}{3600}}=\sqrt{\frac{14161}{3600}}=\frac{119}{60},$$

daher der gegebene Ausdruck:

$$=\sqrt{\frac{\frac{151}{60}+\frac{119}{60}}{2}}-\sqrt{\frac{\frac{151}{60}-\frac{119}{60}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{9}{4}}-\sqrt{\frac{4}{15}}=\frac{3}{2}-2\sqrt{\frac{1}{15}}=1\tfrac{1}{2}-\frac{2\sqrt{15}}{15}.$$

4. Beispiel.

$$\sqrt{5a+2\sqrt{6a^2-ab-b^2}}=\sqrt{5a+\sqrt{24a^2-4ab-4b^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{5a+\sqrt{(5a)^2-(24a^2-4ab-4b^2)}}{2}}$$

$$+\sqrt{\frac{5a-\sqrt{(5a)^2-(24a^2-4ab-4b^2)}}{2}}\quad\text{(s. A.)}$$

$$= \sqrt{\frac{5a + \sqrt{(a+2b)^2}}{2}} + \sqrt{\frac{5a - \sqrt{(a+2b)^2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5a + a + 2b}{2}} + \sqrt{\frac{5a - (a+2b)}{2}}$$

$$= \sqrt{3a+b} + \sqrt{2a-b}.$$

5. Beispiel.

$$\sqrt{7a - 8b - 2\sqrt{10a^2 - 31ab + 15b^2}}$$

$$= \sqrt{7a - 8b - \sqrt{40a^2 - 124ab + 60b^2}}.$$

Nach B ist dies

$$\sqrt{\frac{7a - 8b - \sqrt{(7a-8b)^2 - (40a^2 - 124ab + 60b^2)}}{2}}$$

$$- \sqrt{\frac{7a - 8b - \sqrt{\ldots\ldots}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{7a - 8b + \sqrt{(3a+2b)^2}}{2}}$$

$$- \sqrt{\frac{7a - 8b - \sqrt{(3a+2b)^2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{7a - 8b + 3a + 2b}{2}} - \sqrt{\frac{7a - 8b - (3a+2b)}{2}}$$

$$= \sqrt{5a - 3b} - \sqrt{2a - 5b}.$$

6. Beispiel.

$$\sqrt{3\sqrt{7} + 2\sqrt{14}} = \sqrt{\sqrt{7}(3 + 2\sqrt{2})} = \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{8}}.$$

Der 2. Faktor nach A verwandelt giebt:

$$\sqrt[4]{7} \cdot \left(\sqrt{\frac{3 + \sqrt{3^2 - 8}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3^2 - 8}}{2}}\right)$$

$$= \sqrt[4]{7}(\sqrt{2} + 1) = \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{28} + \sqrt[4]{7}.$$

7. Beispiel.

$$\sqrt{\sqrt[6]{35831808} + \sqrt[6]{9483264} - \sqrt[6]{2809856} - \sqrt[6]{223656}}$$

$$=\sqrt{\sqrt[6]{2^{16}\cdot 3^6}+\sqrt[6]{2^{10}\cdot 3^3\cdot 7^3}-\sqrt[6]{2^{10}\cdot 2^3\cdot 7^3}-\sqrt[6]{2^{10}\cdot 2^3\cdot 3^3}}$$

$$=\sqrt{3\cdot 2^2\sqrt[3]{2^2}+2\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt{3\cdot 7}-2\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2\cdot 7}-2\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2\cdot 3}}$$

$$=\sqrt{2\sqrt[3]{4}\,(6+\sqrt{21}-\sqrt{14}-\sqrt{6})}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{4}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{21}-\sqrt{14}-\sqrt{6}}$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{6+\sqrt{21}-(\sqrt{14}+\sqrt{6})}$$ [die Form $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ hergestellt:]

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{(6+\sqrt{21})-\sqrt{(\sqrt{14}+\sqrt{6})^2}}\quad.$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{(6+\sqrt{21})-\sqrt{20+4\sqrt{21}}}$$ (nach B mit $a=6+\sqrt{21}$, $b=20+4\sqrt{21}$)

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\left[\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}+\sqrt{(6+\sqrt{21})^2-(20+4\sqrt{21})}}{2}}-\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}-\sqrt{\ldots\ldots}}{2}}\right]$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\left[\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}+\sqrt{37+\sqrt{1344}}}{2}}-\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}-\sqrt{37+\sqrt{1344}}}{2}}\right]$$

(und weil nach A: $\sqrt{37+\sqrt{1344}}=\sqrt{21}+4$)

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\left[\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}+\sqrt{21}+4}{2}}-\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}-(\sqrt{21}+4)}{2}}\right]$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot [\sqrt{5+\sqrt{21}} - 1]$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \left[\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

$$= \sqrt[3]{2}\,[\sqrt{7} + \sqrt{3} - \sqrt{2}].$$

44. Setzt man in A (s. 43. Satz) $b = -c^2$, so ergiebt sich:

$$\sqrt{a+\sqrt{-c^2}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-(-c^2)}}{2}}$$
$$+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-(-c^2)}}{2}}, \text{ d. i.}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{c^2}\cdot\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+c^2}+a}{2}}$$
$$+\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+c^2}-a}{2}\cdot(-1)}, \text{ oder}$$

$$✻\ \sqrt{a+ci} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+c^2}+a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+c^2}-a}{2}}\cdot i \ldots (C)$$

In gleicher Weise erhält man aus B mit $b = -c^2$:

$$✻\ \sqrt{a-ci} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+c^2}+a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+c^2}-a}{2}}\cdot i \ldots (D)$$

Diese Formeln sind stets anzuwenden, auch wenn $\sqrt{a^2+c^2}$ nicht rational ist, weil die imaginäre Zahl die Form $\alpha \pm \beta i$ erhalten mufs.

1. Beispiel. $\sqrt{-6-2\sqrt{-55}} = \sqrt{-6-\sqrt{220}\cdot i}$.
Da hier der Coefficient von i negativ ist ($= -\sqrt{220}$), so ist D anzuwenden. Mit $a = -6$ und $c = \sqrt{220}$ ergiebt sich:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{(-6)^2+(\sqrt{220})^2}+(-6)}{2}}$$
$$-\sqrt{\frac{\sqrt{(-6)^2+(\sqrt{220})^2}-(-6)}{2}}\cdot i$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{36+220}-6}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{36+220}+6}{2}}\cdot i$$

$$=\sqrt{\frac{16-6}{2}}-\sqrt{\frac{16+6}{2}}\cdot i=\sqrt{5}-\sqrt{11}\cdot i.$$

2. Beispiel.

$$\frac{(i-2)\sqrt{3i+4}}{(1+i)\sqrt{2i-3}}=\frac{(-2+i)\sqrt{4+3i}\cdot\sqrt{-3-2i}}{(1+i)\sqrt{-3+2i}\cdot\sqrt{-3-2i}}$$

$$=\frac{(-2+i)\sqrt{(4+3i)(-3-2i)}}{(1+i)\sqrt{(-3)^2-(2i)^2}}$$

$$=\frac{(-2+i)(1-i)\sqrt{-6-17i}}{(1+i)(1-i)\sqrt{9+4}}=\frac{(-1+3i)\sqrt{-6-17i}}{(1-i^2)\sqrt{13}}$$

$$=\frac{\sqrt{(-1+3i)^2(-6-17i)}}{2\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{(-8-6i)(-6-17i)}}{2\sqrt{13}}$$

$$=\frac{\sqrt{-(8+6i)\cdot-(6+17i)}}{2\sqrt{13}}=-\frac{\sqrt{-54+172i}}{2\sqrt{13}}\quad\text{(s. 34. Satz)}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{-27+86i}}{(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{13}}=-\frac{1}{\sqrt{26}}\sqrt{-27+86i}$$

(und nach C, weil der Coeff. von i positiv, mit $a=-27$)

$$=-\frac{1}{\sqrt{26}}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{27^2+86^3}-27}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{27^2+86^2}+27}{2}}\cdot i\right]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{26}}\left[\sqrt{\frac{\sqrt{8125}-27}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{8125}+27}{2}}\cdot i\right]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{26}}\left[\sqrt{\frac{90,1388-27}{2}}+\sqrt{\frac{90,1388+27}{2}}\cdot i\right]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{26}}\left[\sqrt{31,5694}+\sqrt{58,5694}\cdot i\right]$$

$$=-\sqrt{\frac{31,5694}{26}}-\sqrt{\frac{58,5694}{26}}\cdot i$$

$$=-\sqrt{1,214208}-\sqrt{2,252669}\cdot i=-1,10191-1,50089i.$$

3. Beispiel.

$$\sqrt{7-3\sqrt[4]{-5}}=\sqrt{7-3\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{-1}}$$

$$=\sqrt{7-3\sqrt[4]{5}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i\right)}$$

$$=\sqrt{7-3\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{4}}-3\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\cdot i}$$

$$=\sqrt{7-3\sqrt[4]{1{,}25}-3\sqrt[4]{1{,}25}\cdot i}$$

$$=\sqrt{7-3{,}17211-3{,}17211\,i}=\sqrt{3{,}82789-3{,}17211\,i}$$

welcher Ausdruck nach D zu verwandeln ist.

4. Beispiel.

$$\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{0+\sqrt{-1}}=\sqrt{0+i}=\sqrt{0+1\cdot i}$$

(nun nach C mit $a=0$, $c=1$)

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{0^2+1^2}+0}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{0^2+1^2}-0}{2}}\cdot i$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i$$ (s. 26. Satz, II, b).

5. Beispiel.

$$\sqrt[8]{-1}=\sqrt{\sqrt[4]{-1}}=\sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot i}$$

$\left(\text{nun nach C mit } a=\sqrt{\frac{1}{2}},\ c=\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}}\cdot i$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}}+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}\cdot i$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\cdot i$$ (siehe die Tabelle im 31. Satze, 2. Zus.).

§. 70. Quadratwurzelausziehen.

1. Aus speciellen Zahlen.

Das Verfahren ist in den nachstehenden 7 Abschnitten a bis g enthalten.

a. Die Decimalzahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden soll, ist vom Komma an nach links und rechts in Klassen von je 2 Stellen abzuteilen. Die 1. Klasse links kann daher aus 1 oder 2 Stellen bestehen, jede folgende Klasse nach rechts hin aber mufs stets aus 2 Stellen bestehen.

Geht die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl oder aus einem endlichen Decimalbruche nicht auf, so kann man sich nach §. 38, 7 beliebig viele Nullen hinzugefügt denken.

Beispiele. $\sqrt{123} = \sqrt{123{,}0000} = \sqrt{1|23,|00|00|}$;

$\sqrt{0{,}7} = \sqrt{0{,}700000} = \sqrt{0,|70|00|00|}$;

$\sqrt{1947{,}368} = \sqrt{19|47,|36|80|}$.

Enthält die Basis einen gemeinen Bruch, so verwandelt man denselben in der Regel in einen Decimalbruch.

Beispiele. $\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{0{,}625} = \sqrt{0.|62|50|}$;

$\sqrt{432\frac{3}{110}} = \sqrt{4|32,|02|72|72|72|}$.

Nach §. 69, 37, 1. Zus. könnte man auch rechnen:

$$\sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

um alsdann die Quadratwurzel aus 10 zu ziehen und dieselbe durch 4 zu dividieren.

b. Jede Klasse giebt eine Stelle in der Wurzel.

Geht daher $\sqrt{762129} = \sqrt{76|21|29}$ auf (erhält man also eine eine ganze Zahl, deren Quadrat $= 762129$ ist), so mufs die gesuchte Wurzel 3stellig sein.

Geht $\sqrt{324} = \sqrt{3|24}$ auf, so ist die Wurzel 2stellig.

Geht $\sqrt{0{,}0000032761} = \sqrt{0,|00|00|03|27|61|}$ auf, so ist die Wurzel = •, • • • • • ,
also ein 5stelliger Decimalbruch.

c. Aus der ersten, Einheiten enthaltenden Klasse ist nun mittelst der nachstehenden Tafel die Quadratwurzel auszuziehen:

$n =$	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$\sqrt{n} =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

1. Beispiel. $\sqrt{20{,}7936}$.

Da $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$ (siehe die Tafel), so ist offenbar $\sqrt{20{,}7936}$ gröfser als 4 und kleiner als 5, mithin $= 4$ nebst einem echten Bruche. Geht daher die $\sqrt{\ }$ auf, so erhält man für

$$\sqrt{20,\ 79\ 36}$$

die 3 Stellen 4, • •

2. Beispiel. $\sqrt{0,\ 00|00|01|87|69}$
$= 0,\ 0\ 0\ 1$ • •

3. Beispiel. $\sqrt{0{,}917} = \sqrt{0,\ 91|70}$
$= 0,\ 9$ •

d. Das Quadrat der durch Abschnitt c bestimmten Wurzel ist von der betreffenden Klasse zu subtrahieren und dem Reste die folgende Klasse hinzuzufügen.

1. Beispiel. $\sqrt{20,\ 79|36} = 4,$

$$\begin{array}{r} 4^2 = 16 \\ \hline 479 \end{array}$$

In der Wurzel ist nach 4 das Komma zu setzen, da dasselbe nach der zugehörigen Klasse (20) sich befindet.

2, Beispiel. $\sqrt{0,\ 00|00|01|84|96} = 0{,}001$

$$\begin{array}{r} 1^2 = 1 \\ \hline 84 \end{array}$$

e. Hat man für die Wurzel beliebig viele Stellen bestimmt (in Abschnitt c und d eine Stelle), so findet man stets annähernd die nächstfolgende neue Stelle der Wurzel, indem man den durch die neue Klasse schon vergröfserten Rest (siehe Abschnitt d) um die letzte Stelle verkürzt und durch das Doppelte der bis dahin erhaltenen Wurzel dividiert, wobei man sowohl jenen Rest, als auch die Wurzel ohne Rücksicht auf das Komma als ganze Zahl betrachtet.

1. Beispiel. $\sqrt{20,\ 79|36} = 4,$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \hline 479. \end{array}$$

Die neue Stelle der Wurzel ist annähernd

$$47\not{9} : (2 \times \text{Wurzel } 4) = 47 : 8 = 5$$

und die Wurzel würde nun 4,5 sein.

2. Beispiel. $\sqrt{0,|00|00|01|87|69} = 0,001$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \hline 87. \end{array}$$

Die neue Stelle, also die 4. Decimalstelle der Wurzel, wäre nach obiger Regel $= 8\not{7} : (2 \times \text{Wurzel } 1) = 8 : 2 = 4$.

Aber es tritt hier der bei der Bestimmung der zweiten und wohl auch noch der dritten Stelle der Wurzel nicht ungewöhnliche Fall ein, dafs der erhaltene Quotient zu grofs ist. Durch die nach dem folgenden Abschnitt f vorzunehmende Rechnung erkennt man jedoch leicht, ob der Quotient die gesuchte Stelle unmittelbar giebt, oder ob dieselbe kleiner als dieser Quotient sein mufs. In vorstehender Aufgabe ist z. B. nicht der Quotient 4, sondern, wie sich aus Abschnitt f ergiebt, nur 3 die gesuchte neue Stelle und daher die Wurzel 0,0013.

f. Ist die neue Stelle bestimmt, so bildet man ein Produkt aus den folgenden beiden Faktoren:

1. Faktor. Die Zehner desselben = dem soeben benutzten Divisor (= dem Doppelten der frühern Wurzel);
Die Einer = der neuen Stelle.

2. Faktor = der neuen Stelle selbst.

Im vorstehenden 1. Beispiel ist dieses Produkt $= \overline{8}\underline{5} \cdot \underline{5} = 425$, da der Divisor $\overline{8}$, die neue Stelle $\underline{5}$ war.

Im 2. Beispiele ist es $\overline{2}\underline{3} \cdot \underline{3} = 69$, da der Divisor $\overline{2}$, die neue Stelle $\underline{3}$ war.

Dieses Produkt ist von dem in Abschnitt d gefundenen (um die folgende Klasse schon vergröfserten) Reste abzuziehen und dem neuen Reste die folgende Klasse hinzuzufügen. Die Operationen der Abschnitte e und f sind nun so lange zu wiederholen, bis entweder die Wurzel aufgeht oder die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

1. Beispiel.

$\sqrt{20,|79|36} = 4,56$

16

$479;\ 47\not{9} : (2 \cdot \overline{4}) = 47 : \overline{8} = \underline{5}$ (2. Stelle der Wurzel)

$425 = \overline{8}\underline{5} \cdot \underline{5}$

$5436;\ 543\not{6} : (2 \cdot \overline{45}) = 543 : \overline{90} = \underline{6}$ (3. Stelle der Wurzel)

$5436 = \overline{90}\underline{6} \cdot \underline{6}$

$0.$

2. Beispiel.

$\sqrt{0,\,00\,00\,01\,87\,69} = 0,00137$

1

$87;\ 87 : (2 \cdot \overline{1}) = 8 : \overline{2} = \underline{3}$ (2. St. der W.)

$69 = \overline{2\underline{3}} \cdot \underline{3}$

$1869;\ 1869 : (2 \cdot \overline{13}) = 186 : \overline{26} = \underline{7}$ (3. St. der W.)

$1869 = \overline{26\underline{7}} \cdot \underline{7}$

0.

Als 2. Stelle der Wurzel konnte nicht $8 : \overline{2} = \underline{4}$ genommen werden, weil das Produkt $\overline{2\underline{4}} \cdot \underline{4} = 96$ nicht von 87 subtrahiert werden kann.

3. Beispiel.

$\sqrt{0,\,03\,02\,76} = 0,174$

1

$202;\ 20 : (2 \cdot 1) = 20 : \overline{2} = \underline{7}$ (2. St. d. W.; s. u. die Anm.)

$189 = \overline{27} \cdot \underline{7}$

$1376;\ 137 : (2 \cdot \overline{17}) = 137 : \overline{34} = \underline{4}$ (3. St. der W.)

$1376 = \overline{34\underline{4}} \cdot \underline{4}$

0.

Als 2. Stelle der Wurzel konnte nicht $20 : \overline{2} = \underline{9}$ oder $= \underline{8}$ gesetzt werden, weil $\overline{2\underline{9}} \cdot \underline{9} = 261$ oder $\overline{2\underline{8}} \cdot \underline{8} = 224$ nicht von 202 subtrahiert werden kann.

4. Beispiel.

$\sqrt{0,081} = \sqrt{0,\,08\,10} = 0,2846049\ \ldots$

$2^2 = 4$

$410;\ 41 : (2 \cdot 2) = 41 : \overline{4} = 8$

$384 = \overline{4\underline{8}} \cdot \underline{8}$

$2600;\ 260 : (2 \cdot 28) = 260 : \overline{56} = \underline{4}$

$2256 = \overline{56\underline{4}} \cdot \underline{4}$

$34400;\ 3440 : (2 \cdot 284) = 3440 : 568 = 6$

$34116 = 5686 \cdot 6$

$a \begin{cases} 28400;\ 2840 : 5692 = 0 \\ 0 = 56920 \cdot 0 \end{cases}$

$2840000;\ 284000 : 56920 = 4$

$$\begin{array}{l} 2840000;\ 284000:56920=4 \quad (\text{wiederholt}) \\ \underline{2276816=569204\cdot 4} \\ 56318400;\ 5631840:569208=9 \\ \ldots\ldots=5692089\cdot 9 \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

Ist die neue Stelle (der Quotient) $=0$, so läſst man die zugehörige Rechnung (die vorstehend mit a bezeichneten Zahlen) aus, hängt dafür dem Reste die folgende Klasse und dem Divisor 0 an (s. das nachstehende Beispiel).

5. Beispiel.

$$\sqrt{\frac{4}{11}}=\sqrt{0,|36|36|36}=0,60302\ldots$$

$$\begin{array}{l} \underline{36} \\ a \ldots \underline{36;\ 3:12=0} \\ 3636;\ 363:120=3 \\ \underline{3609=1203\cdot 3} \\ b \ldots \underline{2736;\ 273:1206=0} \\ 273636;\ 27363:12060=2 \\ \underline{241204=120602\cdot 2} \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

Die hier mit a und b bezeichneten Zahlen sind in der Praxis wegzulassen.

Selbstverständlich hat man nicht 00 anzuhängen, wenn der wahre Wert des Decimalbruches andere Stellen verlangt. So ist im vorstehenden Beispiel (neben b) 2736, nicht 2700 zu setzen.

g. So ausführlich, wie es in den vorstehenden Beispielen geschehen ist, führt man in der Praxis die Rechnung nicht aus. Vielmehr schreibt man nur den Divisor (das Doppelte der frühern Wurzel) und hängt demselben den gefundenen Quotient (die neue Stelle) mit kleinerer Ziffer rechts unten an. Die so gebildete Zahl multipliciert man mit der neuen Stelle, um das abzuziehende Produkt zu erhalten. Das vorstehende 4. Beispiel würde also in folgender Weise zu rechnen sein:

$$\sqrt{0,|08|10}=0,2846$$

$$\begin{array}{l} \underline{4} \\ 410:4_8 \ (\text{d. i. } 41:4=\underline{8}) \\ \underline{384 \ (\text{d. i. } 4_8\cdot 8)} \\ a \ldots 2600:56_4 \ (\text{d. i. } 260:56=4) \\ 2256 \ (\text{d. i. } 56_4\cdot 4) \\ b \ldots 34400:568_6 \ (\text{d. i. } 3440:568=6) \end{array}$$

$$34400 : 568_6 \text{ (d. i. } 3440 : 568 = 6) \text{ (wiederholt)}$$
$$\underline{34116 \text{ (d. i. } 568_6 \cdot 6)}$$
$$28400.$$

Endlich multipliciert man nicht die bisher gefundene Wurzel mit 2, um den Divisor zu bilden, sondern vermehrt stets den vorhergehenden, mit der kleiner geschriebenen Ziffer versehenen Divisor um diese Ziffer.

So findet man aus $\left.\begin{array}{l} 56_4 \text{ (s. } a) \\ \underline{4} \end{array}\right\}$ durch Addition

den neuen Divisor 568 (s. b).

Der zu dem letzten Reste 28400 gehörende Divisor wäre daher

$$\begin{array}{r} 568_6 \\ \underline{6} \\ = 5692. \end{array}$$

In gleicher Weise verfuhr man schon beim Bilden des Quadrats einer vielstelligen Zahl (siehe §. 62, 3, II nebst Anmerkung).

2. Beispiel. $\sqrt{\dfrac{3}{41000}}$

$$= \sqrt{0,|00|00|73|17|07|31|70} = 0,0085539892.$$

$$\begin{array}{l}
\underline{64} \\
917 : 16_5 \\
\underline{825} \\
9207 : 170_5 \quad \left(170 = \begin{array}{c}16_5\\5\end{array} \text{ s. 2. Zeile vorher!}\right) \\
\underline{8525} \\
68231 : 1710_3 \quad \left(1710 = \begin{array}{c}170_5\\5\end{array} \text{ s. 2. Zeile vorher!}\right) \\
\underline{51309} \\
1692270 : 17106_9 \quad \left(17106 = \begin{array}{c}1710_3\\3\end{array}\right) \\
\underline{1539621} \\
15264973 : 171078_8 \\
\underline{13686304} \\
157866917 : 1710796_9 \\
\underline{153971721} \\
389519607 : 17107978_2
\end{array}$$

u. s. w.

3. Beispiel.

$\sqrt{50\frac{83}{650}} = \sqrt{50,|12\,76|92|30|76|92} = 7{,}08009126.$

49

$112 : 14_0$

$11276 : 140_8$

11264

$1292 : 1416_0$

$129230 : 14160_0$

$12923076 : 141600_9$

12744081

$17899592 : 1416018_1$

14160181

$373941130 : 14160182_2$

283203644

$9073748676 : 141601824_6.$

h. Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens.

Das Abteilen der Basis nach Klassen von je 2 Stellen folgt aus §. 57 (9, 2. Zus. und 16, 7. Zus.).

Die Rechnungsoperationen ergeben sich aus der Formel:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a + b)\,b.$$

Soll z. B. $\sqrt{4096}$ berechnet werden, so mufs nach jenen Sätzen des §. 57 die gesuchte Wurzel 2stellig sein, weil das Quadrat einer zweistelligen Zahl eine 3- oder 4stellige Zahl ist. Enthält daher die Wurzel z Zehner, so müfste das Quadrat der Zehner der Zahl 4096 möglichst nahe kommen. Aus $(10z)^2 = 4096$,

$$\text{d. i. } 100z^2 = 4096 \text{ folgt } z^2 = \frac{4096}{100} \text{ (s. §. 12, 1. Zus.)} = 40.$$

Mithin $z = \sqrt{40} = 6$ (s. 6. Satz). Die gesuchte $\sqrt{4096}$ besteht also aus 6 Zehnern.

Bezeichnet man nun die noch zu bestimmenden Einer mit e, so ist $\sqrt{4096} = 6$ Zehner $+ e$ oder

$$60 + e = \sqrt{4096} \text{ und folglich}$$

$$(60 + e)^2 = 4096 \text{ (s. §. 15, 7), d. i.}$$

$$3600 + 2 \cdot 60 \cdot e + e^2 = 4096,$$

$$2 \cdot 60 \cdot e + e^2 = 4096 - 3600 \text{ (s. §. 8, 1, Zus.)},$$

$$2 \cdot 60 \cdot e + e^2 = 496 \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{(W)}$$

Weil e die Einer vorstellt, so ist $2 \cdot 60 \cdot e$ offenbar weit gröfser als e^2 und mithin mufs schon annähernd $2 \cdot 60 \cdot e = 496$, folglich

$$e = \frac{496}{2 \cdot 60} = \frac{49}{2 \cdot 6} = \frac{49}{12} = \underline{4} \text{ sein.}$$

Mit diesem Werte wird in der That

$2 \cdot 60 \cdot 4 + 4^2 = (2 \cdot 60 + 4) \cdot 4 = 124 \cdot 4 = 496$ (siehe oben W)

und folglich ist $(60+4)^2 = 4096$ oder $\sqrt{4096} = 60 + 4$.

Abgekürzt:

$$\begin{array}{l} \sqrt{40\,96} = 60 + 4 \\ \underline{36\,..} \\ \;\;4\,96;\; 49:(2 \cdot 6) = 49:12 = 4 \\ \;\;\underline{496 = \overline{12}\underline{4} \cdot \underline{4}} \\ \qquad 0. \end{array}$$

Wäre nach der Subtraktion von $(60+4)^2$ noch ein Rest geblieben, z. B. in

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{41\,86{,}09} = 64, \\ \underline{36} \\ \;5\,86;\; 58:(2 \cdot 6) = 58:\overline{12} = \underline{4} \\ \;\underline{4\,96 = \overline{12}\underline{4} \cdot \underline{4}} \\ \;\;90{,}09 \end{array}\right\} \text{(Y)}$$

der Rest 90,09, so würden noch die auf die Wurzel 64 folgenden d Zehntel zu suchen sein. Es wäre mithin

$$\sqrt{4186{,}09} = 64 + \frac{d}{10}, \text{ d. i.}$$

$$\left(64 + \frac{d}{10}\right)^2 = 4186{,}09;$$

$$4096 + 2 \cdot 64 \cdot \frac{d}{10} + \frac{d^2}{100} = 4186{,}09;$$

$$2 \cdot 64 \cdot \frac{d}{10} + \frac{d^2}{100} = 90{,}09 \text{ (s. §. 8, 1, Zus.);}$$

mit 100 multipliciert (s. §. 11, 10):

$$2 \cdot 640 \cdot d + d^2 = 9009 \;.\;.\;.\;.\;. \text{ (Z)}$$

Da nun d^2 gegen $2 \cdot 640 \cdot d$ sehr klein sein mufs, so ist annähernd

$$2 \cdot 640\,d = 9009, \text{ folglich}$$

$$d = \frac{9009}{2 \cdot 640} = \frac{900}{2 \cdot 64} = \frac{900}{128} = 7.$$

Mit diesem Werte wird wirklich

$$2 \cdot 640 \cdot 7 + 7^2 = (2 \cdot 640 + 7) \cdot 7 = 1287 \cdot 7 = 9009 \text{ (siehe oben Z)}$$

und folglich ist $\left(64 + \frac{7}{10}\right)^2 = 4186{,}09$ oder

$$\sqrt{4186{,}09} = 64 + \frac{7}{10}.$$

Abgekürzt: $\sqrt{41|86,|09} = 64{,}7$

$$
\begin{array}{l}
36 \\
\hline
5\,86; \quad 58 : (2 \cdot 6) = 58 : \overline{12} = \underline{4} \\
4\,96 = \overline{124} \cdot 4 \\
\hline
90\,09; \quad 900 : (2 \cdot 64) = 900 : \overline{128} = \underline{7} \\
90\,09 = \overline{128\,\underline{7}} \cdot \underline{7} \\
\hline
0.
\end{array}
$$

1. Zusatz. Die Rechnung läſst sich abkürzen, wenn man das Quadrat einer den ersten Klassen Genüge leistenden mehrstelligen Zahl kennt.

1. Beispiel. $\sqrt{1{,}306} = \sqrt{1,|30|60} = 1{,}143$

$$
\begin{array}{l}
11^2 = 1\,21 \\
\hline
9\,60 : 22_4 \\
8\,96 \\
\hline
6400 : 228_3
\end{array}
$$

2. Beispiel. $\sqrt{0{,}00365} = \sqrt{0,|00|36|50} = 0{,}0604$

$$
\begin{array}{l}
60^2 = 36\,00 \\
\hline
5\,000 : 120_4 \text{ u. s. w.}
\end{array}
$$

Besonders vorteilhaft erweisen sich in diesem Sinne die Tafeln der Quadratzahlen. Hätte man z. B. $\sqrt{0{,}08317}$ zu berechnen, so sucht man sogleich die 3stellige Zahl auf, deren Quadrat jener Basis am nächsten kommt.

Da nun $\sqrt{0{,}08} = 0{,}2$, so weiſs man, daſs die aufzusuchende 3stellige Zahl mit 2 beginnen muſs und man findet in den Quadraten der Zahlen von 200 bis 299 als nächstkleinere Zahl:

$$288^2 = 82944. \quad \text{Daher}$$

$$\sqrt{0,|08|31|70} = 0{,}28839$$

$$
\begin{array}{l}
288^2 = 8\,29\,44 \\
\hline
2\,2600 : 576_3 \\
1\,7289 \\
\hline
531100 : 5766_9.
\end{array}
$$

2. Zusatz. Hat man von der Einheiten enthaltenden Klasse an n Stellen der Wurzel berechnet und bleibt der Divisor in der gröfsern Anzahl von Stellen unverändert, so erhält man weitere $n-1$ (oder n) Stellen der Wurzel, wenn man den ohne die neue Klasse vergröfserten Rest durch den 10. Teil des nun zu bildenden Divisor einfach mittelst der abgekürzten Division (s. §. 43, 5) dividiert. Z. B.

$$\sqrt{19} = 4{,}358898943 5$$
$$16$$
$$300 : 8_3$$
$$249$$
$$5100 : 86_5$$
$$4325$$
$$77500 : 870_8$$
$$69664$$
$$783600 : 8716_8$$
$$697344$$
$$8625600 : 87176_9 \qquad 87176_9$$
$$7845921 \qquad\qquad 9$$
Abgek. Division: $779679 : 87178 \;(= 871778 : 10)$
$$697424$$
$$82255 : 87178$$
$$78460$$
$$3795 : 871\not{7}8$$
$$3487$$
$$308 : 87\not{1}\not{7}$$
$$262$$
$$46 : 8\not{7}.$$

Um die Gröfse des bei einer solchen Division begangenen Fehlers allgemein zu bestimmen, mag die Wurzelbasis $= b$, der durch das wirkliche Quadratwurzelausziehen berechnete (erste) Teil der Wurzel $= w$, der nach demselben erhaltene Rest $= r$ und der Fehler $= f$ sein. Da der Rest r durch das Doppelte der Wurzel (denn so grofs ist stets der Divisor) dividiert worden ist $\left(= \frac{r}{2w}\right)$, so hat man die vorher berechnete Wurzel w noch um diesen Quotient $\frac{r}{2w}$ vermehrt. Die auf diese Weise gefundene Quadratwurzel ist folglich $= w + \frac{r}{2w}$, welcher Ausdruck die wahre Wurzel $\sqrt{b}$ und den Fehler f enthält.

Folglich ist: $\sqrt{b}+f=w+\frac{r}{2w}$; beide Seiten quadriert:

$$b+2\sqrt{b}\cdot f+f^2=w^2+r+\left(\frac{r}{2w}\right)^2.$$

Da nun $w^2+r=b$ ist [vergl. $64^2+90{,}09=4186{,}09$ im Abschnitt h unter Y], so heben sich diese Glieder auf beiden Seiten und es ist:

$$2\sqrt{b}\cdot f+f^2=\left(\frac{r}{2w}\right)^2,\text{ folglich } 2\sqrt{b}\cdot f<\left(\frac{r}{2w}\right)^2,\text{ s. §. 1, 6;}$$

daher auch $2wf<\left(\frac{r}{2w}\right)^2$. Mithin ist der Fehler $f<\left(\frac{r}{2w}\right)^2:2w$.

Im vorstehenden Beispiele für $\sqrt{19}$ ist

$$4{,}35889=w,\ 0{,}0000779679=\text{Rest } r.$$

Setzt man annähernd $r=0{,}000078$, $2w=2\cdot 4{,}35=8{,}7$, so ist der Fehler

$$f<\left(\frac{0{,}000078}{8{,}7}\right)^2:8{,}7,\ \text{d. i. } f<0{,}000009^2:8{,}7$$

oder $f<0{,}000000000081:8{,}7$, d. i. $f<0{,}000000000009$ und folglich ist die berechnete Wurzel auf 11 Decimalstellen richtig.

3. Zusatz. Um beim Quadratwurzelausziehen aus einer auf n Stellen abgebrochenen Decimalzahl zu bestimmen, auf wie viel Stellen die Wurzel richtig sein mufs, hat man zu berücksichtigen, dafs durch die ganze Rechnung hindurch die n^{te} Stelle (weil abgebrochen) nicht ganz richtig ist, die rechts von ihr liegenden Stellen mithin falsch sein müssen.

Es sei z. B. die Basis der Wurzel $\sqrt{5{,}64973}$ ein abgebrochener Decimalbruch.

$$\sqrt{5,|64|97|\mathbf{3}0}=2{,}37692$$

$$23^2=5\ 29$$

$$35\,97:46_7$$
$$32\,69$$
$$3\,28\,\mathbf{3}0:474_6$$
$$2\,84\,\mathbf{7}6$$
$$43\,\mathbf{5}400:4752_9$$
$$42\,\mathbf{7}761$$
$$\mathbf{7}63900:47538_2$$

Hier kann nur noch annähernd die 5. Decimalstelle (2) der Wurzel richtig sein, weil in allen Zahlen die Stellen rechts von

den hervorgehobenen (senkrecht unter einander stehenden) Ziffern falsch sein müssen und mithin auch alle Stellen derjenigen Zahlen, die bei fortgesetzter Rechnung auf 763900 folgen.

4. Zusatz. Hat man $\sqrt{b} = w$ auf n Stellen bestimmt, so erhält man die $\sqrt{\ }$ durch Berechnung des Ausdrucks

$$\frac{1}{2}\left(w + \frac{b}{w}\right)$$

auf nahe $2n$ Stellen richtig.

1. Beispiel. $\sqrt{0{,}0000731707317} = 0{,}00855.$

Da hier die Wurzel auf 3 Stellen (855) bestimmt ist, so mufs man sie durch

$$\frac{1}{2}\left(0{,}00855 + \frac{0{,}00007317073}{0{,}00855}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}00855 + 0{,}00855798) = 0{,}008553990$$

auf etwa 6 Stellen (855399) richtig erhalten.

(Die wahre Wurzel ist hier 0,0085539892.)

2. Beispiel. Es sei $\sqrt{19}$ vorläufig auf 4 Stellen $= 4{,}358$ bestimmt. Folglich erhält man auf etwa 8 Stellen:

$$\sqrt{19} = \frac{1}{2}\left(4{,}358 + \frac{19}{4{,}358}\right) = \frac{1}{2}(4{,}358 + 4{,}3597980\ldots)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8{,}7177980 = 4{,}3588990$$

(s. $\sqrt{19}$ im vorstehenden 2. Zusatz).

Beweis. Ist $\sqrt{b} = w$ auf n Stellen richtig und setzt man den genauern Wert

$$\sqrt{b} = w + u \quad \ldots\ldots \text{(Y)}$$

so ist $b = (w + u)^2$

$$b = w^2 + 2wu + u^2.$$

Vernachläfsigt man u^2, so erhält man die Wurzel auf $2n$ Stellen richtig, weil sich u auf n Stellen bezieht. Aus

$b = w^2 + 2wu$ ergiebt sich aber

$2wu = b - w^2$ und folglich

$$u = \frac{b - w^2}{2w} = \frac{b}{2w} - \frac{w}{2}.$$

Damit geht Y über in

$$\sqrt{b} = w + \frac{b}{2w} - \frac{w}{2} = \frac{1}{2}\left(w + \frac{b}{w}\right).$$

5. Zusatz. Ist annähernd $\sqrt{b} = w$, so ist sehr genau

$$\sqrt{b} = \frac{w}{3}\left[1 + \frac{8b}{b + 3w^2}\right] \text{ (Formel von R. Schurig).}$$

1. Beispiel. $\sqrt{b}$ ist nahe $= 2\frac{1}{4}$, denn $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$ Folglich ist sehr genau:

$$\sqrt{5} = \frac{2\frac{1}{4}}{3}\left[1 + \frac{8 \cdot 5}{5 + 3 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2}\right] = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{8 \cdot 5}{5 + \frac{243}{16}}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{3 \cdot 40 \cdot 4}{323} = 0{,}75 + 1{,}48606811$$

$$= 2{,}23606811.$$

(Genau ist $\sqrt{5} = 2{,}23606798!$)

2. Beispiel. $\sqrt{13}$ ist nahe $= 3{,}6$, denn $\sqrt{13} = 3{,}605\ldots$ Folglich ist sehr genau:

$$\sqrt{13} = \frac{3{,}6}{3}\left[1 + \frac{8 \cdot 13}{13 + 3 \cdot 3{,}6^2}\right] = 1{,}2 + \frac{1{,}2 \cdot 8 \cdot 13}{51{,}88}$$

$$= 1{,}2 + 2{,}4055512722 = 3{,}6055512722.$$

(Genau ist $\sqrt{13} = 3{,}6055512755!$)

3. Beispiel. $\sqrt{101}$? Nimmt man als annähernden (hier erheblich abweichenden) Wert: 10, so ergiebt sich:

$$\sqrt{101} = \frac{10}{3}\left[1 + \frac{8 \cdot 101}{101 + 3 \cdot 10^2}\right] = \frac{10}{3} + \frac{10}{3} \cdot \frac{8 \cdot 101}{401}$$

$$= 3\tfrac{1}{3} + 6\tfrac{862}{1203} = 3{,}3333333 + 6{,}7165420$$

$$= 10{,}0498753.$$

(Genau ist $\sqrt{101} = 10{,}0498756!$)

2. Quadratwurzelausziehen aus mehrgliederigen Buchstabenausdrücken.

Die Basis ist zunächst streng nach ab- oder aufsteigenden Potenzen der Hauptgröfse anzuordnen. Das 1 Glied der Wurzel ist die $\sqrt{}$ aus dem 1. Gliede der Basis. Das Quadrat dieses 1. Gliedes der Wurzel ist vom 1. Gliede der Basis abzuziehen und der Rest wie bei der Partialdivision durch das Doppelte der Wurzel zu dividieren, um das 2 Glied der Wurzel zu erhalten. Hierauf ist von jenem Reste das Produkt aus dem Divisor und dem neuen Gliede, aufserdem aber das Quadrat des neuen Gliedes abzuziehen. In der Folge erhält man jedesmal ein neues Glied, wenn man den Rest durch das Doppelte der Wurzel (also das 1. Glied des Restes durch das 1. Glied der doppelten Wurzel) dividiert. Das Produkt

aus dem ganzen Divisor und diesem neuen Gliede, sowie das Quadrat des neuen Gliedes ist alsdann stets vom Reste abzuziehen.

1. Beispiel. $\sqrt{84x - 60x^3 + 25x^4 + 49 - 34x^2}$? Geordnet:

$$\sqrt{25x^4 - 60x^3 - 34x^2 + 84x + 49} = 5x^2 - 6x - 7$$

$$\underline{25x^4}$$

$$-60x^3 - 34x^2 : 10x^2 \text{ [das Doppelte der Wurzel } 5x^2];$$

$$\text{das neue Glied} = \frac{-60x^3}{10x^2} = -6x$$

$$\underline{-60x^3 + 36x^2} = 10x^2(-6x) + (-6x)^2 \text{ [Divisor} \times \text{neues Glied} + (\text{neues Glied})^2]$$

$$-70x^2 + 84x + 49 : 10x^2 - 12x \text{ [das Doppelte der Wurzel } 5x^2 - 6x];$$

$$\text{das neue Glied} = -70x^2 : 10x^2 = -7.$$

$$\underline{-70x^2 + 84x + 49} = (10x^2 - 12x)(-7) + (-7)^2 \text{ [Dsr.} \times \text{neues Glied} + \text{neues Glied})^2].$$

$$0.$$

Beweis. Da $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, so ist umgekehrt

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b.$$

Nachdem $\underline{a^2}$, also das Quadrat des 1. Gliedes der Wurzel subtrahiert ist: $2ab + b^2$,

ergiebt sich das 2. Glied b aus $\frac{2ab}{2a}$, d. i. durch Division des 1. Gliedes des Restes durch das Doppelte der Wurzel. Wird nun $2ab + b^2$, d. i. das Produkt aus dem Divisor $(2a)$ und dem neuen Gliede (b) und

aufserdem das Quadrat des neuen Gliedes (b^2) abgezogen, so hat man $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ subtrahiert und mithin ist $a+b$ die Wurzel.

Ist $\sqrt{b} = w$ schon auf beliebig viele Glieder berechnet, und ist das neue Glied $= x$, so ist also

$$\sqrt{b} = w + x, \text{ daher}$$
$$b = w^2 + 2wx + x^2, \text{ oder}$$
$$b - w^2 = 2wx + x^2.$$

Hier stellt die linke Seite, weil das Quadrat der bisherigen Wurzel (d. i. w^2) von der Basis b subtrahiert ist, den Rest vor Nun ist zunächst

$$b - w^2 = 2wx, \text{ d. i.}$$
$$x = \frac{b - w^2}{2w}.$$

Das neue Glied x findet man mithin stets, wenn man den Rest durch das Doppelte der Wurzel dividiert. Da nun

$$(w+x)^2 = w^2 + 2wx + x^2$$

von der gegeben Basis zu subtrahieren ist, w^2 aber schon vor Bestimmung des neuen Gliedes x subtrahiert war, so ist nur noch $2wx + x^2$, d. i. „das Doppelte der Wurzel $\times$ neues Glied $+$ (neues Glied)^2" zu subtrahieren.

2. Beispiel. $\sqrt{49x^4 + 81b^2 - 126bx^2}$? Geordnet:

$$\sqrt{49x^4 - 126bx^2 + 81b^2} = 7x^2 - 9b$$
$$49x^4$$
$$-126bx^2 + 81b^2 : 14x^2 = -9b$$
$$-126bx + 81b^2 = 14x^2(-9b) + (-9b)^2$$
$$0.$$

Geht die Wurzel aus dem 1. Gliede der Basis nicht auf, so ist es vorzuziehen, durch Ausheben das 1. Glied in 1 zu verwandeln:

3. Beispiel. $\sqrt{2a - 6a^2 + \frac{5a^3}{2} - 7a^4}$? Dafür:

$$\sqrt{2a\left(1 - 3a + \frac{5a^3}{4} - \frac{7a^3}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{2a} \cdot \sqrt{1 - 3a + \frac{5a^2}{4} - \frac{7a^3}{2}}.$$

Nun ist $\sqrt{1-3a+\frac{5a^2}{4}-\frac{7a^3}{2}}=1-\frac{3a}{2}-\frac{a^2}{2}-\frac{5a^3}{2}-\frac{31a^4}{8}\ldots\ldots$

$$\begin{array}{l}
1 \\
\hline
-3a+\frac{5a^2}{4} \;:\; 2 \;\; [\text{das neue Glied} = -3a:2] \\
-3a+\frac{9a^2}{4} = 2\left(-\frac{3a}{2}\right)+\left(-\frac{3a}{2}\right)^2 \\
\hline
-a^2-\frac{7a^3}{2} \;:\; (2-3a) \;\; [\text{das neue Glied} = -a^2:2] \\
-a^2+\frac{3a^3}{2}+\frac{a^4}{4} = (2-3a)\left(-\frac{a^2}{2}\right)+\left(-\frac{a^2}{2}\right)^2 \\
\hline
-5a^3-\frac{a^4}{4} \;:\; (2-3a-a^2) \\
-5a^3+\frac{15a^4}{2}+\frac{5a^5}{2}+\frac{25a^6}{4} \\
\hline
-\frac{31a^4}{4}-\frac{5a^5}{2}-\frac{25a^6}{4} \;:\; (2-3a-a^2-5a^3)
\end{array}$$

u. s. w.

Die gesuchte Wurzel ist daher

$$=\sqrt{2a}\left[1-\frac{3a}{2}-\frac{a^2}{2}-\frac{5a^3}{2}-\frac{31a^4}{8}\ldots\ldots \textit{in inf.}\right].$$

4. Beispiel.

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{8} + \frac{b^3}{16} - \frac{5b^4}{128} + \dots$$

$$
\begin{array}{l}
1 \\
\hline
b : 2 \\
b + \frac{b^2}{4} \\
\hline
-\frac{b^2}{4} : 2 + b \\
-\frac{b^2}{4} - \frac{b^3}{8} + \frac{b^4}{64} \\
\hline
+\frac{b^3}{8} - \frac{b^4}{64} : 2 + b - \frac{b^2}{4} \\
\frac{b^3}{8} + \frac{b^4}{16} - \frac{b^5}{64} + \frac{b^6}{256} \\
\hline
-\frac{5b^4}{64} + \frac{b^5}{64} - \frac{b^6}{256} : 2 + b - \frac{b^2}{4} + \frac{b^3}{8}
\end{array}
$$

u. s. w.

Dasselbe würde man durch den binomischen Lehrsatz erhalten haben, denn $\sqrt{1+b} = (1+b)^{\frac{1}{2}}$ verwandelt sich nach §. 62, 7, 1. Zus. mit $n = \frac{1}{2}$ in

$$(1+b)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot b + \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2} b^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{2 \cdot 3} b^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot b + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} b^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2 \cdot 3} b^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{2 \cdot 3 \cdot 4} b^4 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2^2 \cdot 2} b^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 2 \cdot 3} b^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} b^5 - \dots$$

(Vorstehender Ausdruck zeigt in sehr übersichtlicher Weise das Gesetz der Coefficienten). Es ist also:

$$✵ \sqrt{1+b} = 1 + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{8} + \frac{b^3}{16} - \frac{5b^4}{128} + \frac{7b^5}{256} - \frac{21b^6}{1024} + \frac{33b^7}{2048} - \ldots \text{ (A)}$$

Nimmt man hier b negativ oder benutzt man §. 62, 7, 2. Zus., so erhält man:

$$✵ \sqrt{1-b} = 1 - \frac{b}{2} - \frac{b^2}{8} - \frac{b^3}{16} - \frac{5b^4}{128} - \frac{7b^5}{256} - \frac{21b^6}{1024} - \frac{33b^7}{2048} - \ldots \text{ (B)}$$

Mittelst dieser Formeln kann man unmittelbar die Wurzel aus einem Polynom finden. So ist (s. oben das 3. Beisp.):

$$\sqrt{1 - 3a + \frac{5a^2}{4} - \frac{7a^3}{2}} = \sqrt{1 - \left(3a - \frac{5a^2}{4} + \frac{7a^3}{2}\right)}.$$

Dies aber ist, wenn man in B an die Stelle von b den Ausdruck $3a - \frac{5a^2}{4} + \frac{7a^3}{2}$ setzt:

$$1 - \frac{1}{2}\left(3a - \frac{5a^2}{4} + \frac{7a^3}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(3a - \frac{5a^2}{4} + \frac{7a^3}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(3a - \frac{5a^2}{4}\ldots\right)^3 - \ldots$$

Behält man hiervon nur die Glieder bis a^3 und vernachlässigt die höheren Potenzen, so ergiebt sich:

$$1 - \frac{3a}{2} + \frac{5a^2}{8} - \frac{7a^3}{4} - \frac{1}{8}\left(9a^2 - \frac{15a^3}{2}\right) - \frac{1}{16}\cdot 27a^3 \ldots$$

$$= 1 - \frac{3a}{2} + \frac{5a^2}{8} - \frac{7a^3}{4} - \frac{9a^2}{8} + \frac{15a^3}{16} - \frac{27a^3}{16}$$

$$= 1 - \frac{3a}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{5a^3}{2} \ldots \text{ (wie oben im 3. Beisp.).}$$

Ferner lassen sich die Formeln A und B zur schnellen Berechnung der $\sqrt{\ }$ aus speciellen Zahlen benutzen, wenn man zuvor einen Wert sucht, welcher der zu bestimmenden Wurzel nahe genug liegt.

Beispiel. Es ist $\sqrt{3} = 1{,}73\ldots.$ Annähernd ist also

$$\sqrt{3} = \frac{7}{4}, \text{ oder nahe } 3 = \frac{49}{16}.$$

Um die rechte Seite dieser Gleichung der linken gleich zu machen, sei $3 = \frac{49}{16} + x$, woraus sich $x = 3 - \frac{49}{16} = -\frac{1}{16}$ ergiebt. Es wird nun $3 = \frac{49}{16} + x = \frac{49}{16} - \frac{1}{16}$ und

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{49}{16}\left(1 - \frac{1}{49}\right)} = \frac{7}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{49}}.$$

Mit $b = \frac{1}{49}$ ergiebt sich jetzt aus B:

$$\sqrt{3} = \frac{7}{4}\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{49}\right)^3 - \frac{5}{128}\left(\frac{1}{49}\right)^4 - \ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{1}{8\cdot 7} - \frac{1}{32\cdot 7^3} - \frac{1}{64\cdot 7^5} - \frac{5}{512\cdot 7^7}\ldots.$$

$$= 1\tfrac{3}{4} - \frac{1}{4\cdot(2\cdot 7)} - \frac{1}{4\cdot(2\cdot 7)^3} - \frac{1}{2\cdot(2\cdot 7)^5} - \frac{5}{4\cdot(2\cdot 7)^7} - \ldots$$

$$= 1{,}75 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{14} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{14^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{14^5} - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{14^7} - \ldots.$$

$1{,}0000 : 14$	
$\frac{1}{14} = 0{,}071428571 : 14$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{14} = 0{,}017857143$
$0{,}005102041 : 14$	
$\frac{1}{14^3} = 0{,}000364431 : 14$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{14^3} = 0{,}000091108$
$0{,}000026031 : 14$	
$\frac{1}{14^5} = 0{,}000001859 : 14$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{14^5} = 0{,}000000903$
$0{,}000000133 : 14$	
$\frac{1}{14^7} = 0{,}000000009$	$\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{14^7} = 0{,}000000011$

$$\sqrt{3} = 1{,}75 - 0{,}017949192$$

oder $\sqrt{3} = 1{,}732050808.$

§. 71. Ausziehen der Kubikwurzel.

1. Aus speciellen Zahlen.

Das Verfahren ist in den nachstehenden Abschnitten a bis g enthalten.

a. Die Basis ist in Klassen von je 3 Ziffern abzuteilen. (Vergl. §. 70, I).

b. Jede Klasse giebt eine Stelle in der Wurzel.

c. Aus der ersten, Einheiten enthaltenden Klasse ist mittelst der nachstehenden Tafel die Kubikwurzel zu ziehen.

$n =$	1	8	27	64	125	216	343	512	729
$\sqrt[3]{n} =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Beispiel. $\sqrt[3]{0{,}00009576} = \sqrt[3]{0{,}|000|095|760}$
$= 0,\ 0\ \ 4\ \ \bullet$, weil

$\sqrt[3]{64} = 4,\ \sqrt[3]{125} = 5.$

d. Der Kubus der durch Abschnitt c bestimmten Wurzel ist von der betr. Klasse zu subtrahieren und dem Reste die folgende Klasse hinzufügen.

Beispiel. $\sqrt[3]{0{,}000|095|760} = 0{,}04$
$4^3 = 64$
$\overline{31\ 760.}$

e. Annähernd findet man stets eine neue Stelle der Wurzel, wenn man die durch Abschnitt d erhaltene Zahl (vergröfserten Rest) ohne die beiden letzten Stellen durch das 3fache Quadrat der bis dahin gefundenen Wurzel dividiert. In bezug auf das letzte Beispiel würde also die neue Stelle

$$317\not{6}\not{0} : (3 \cdot 4^2) = 317 : 48 = 6 \text{ sein.}$$

Bei Bestimmung der 2. und wohl auch der 3. Stelle der Wurzel kann man noch weit leichter einen zu grofsen Quotient annehmen, als es bei der Quadratwurzel der Fall war. Durch die nach Abschnitt f mit diesem Quotient vorzunehmenden Rechnungen erkennt man jedoch, ob derselbe zu grofs ist.

Anmerkung. Weiter unten im Abschnitt g lernen wir ein weit einfacheres Bilden des jedesmaligen Divisor kennen.

f. Man bestimmt nun die folgenden 3 Zahlen:

1) das 3fache Quadrat der frühern Wurzel (= dem so eben benutzten Divisor);

2) das 3fache Produkt aus der frühern Wurzel und der neuen Stelle;

3) das Quadrat der neuen Stelle.

Diese 3 Zahlen addiert man, nachdem jede nachfolgende Zahl 1 Stelle nach rechts ausgerückt worden ist, multipliciert die Summe mit der neuen Stelle und subtrahiert das Produkt von dem in Abschnitt d vergröfserten Reste. Dem neuen Reste fügt man die folgende Klasse hinzu und wiederholt event. die Operationen der Abschnitte e und f.

Beispiel.

$\sqrt[3]{0{,}000|095|760} = 0{,}0457503\ldots$

64

31 760; 317 : $(3 \cdot \overline{4}^2)$ = 317 : 48 = 5 (s. u. die Anmerk.)

$3 \cdot \overline{4}^2 = 48$

$3 \cdot \overline{4} \cdot 5 = \quad 60$

$5^2 = \quad 25$

27 125 = ... 5425 · 5

4 635000; 46350 : $(3 \cdot 45^2)$ = 46350 : 6075 = 7

$3 \cdot 45^2 = 6075$

$3 \cdot 45 \cdot 7 = \quad 945$

$7^2 = \quad 49$

4 318993 = ... 616999 · 7

316007000; 3160070 : $(3 \cdot 457^2)$

= 3160070 : 626547 = 5

$$\left.\begin{array}{r} 3 \cdot 457^2 = 626547 \\ 3 \cdot 457 \cdot 5 = \quad 6855 \\ 5^2 = \quad 25 \end{array}\right\} \text{(W)}$$

313616375 = ... 62723275 · 5

2390625000; 23906250 : $(3 \cdot 4575^2)$

= 23906250 : 62791875 = 0 . . . . (Y)

0 = der Summe der 3 Zahlen × 0

2390625000000; 23906250000 : $(3 \cdot 45750^2)$

= 3.

Anmerkung. Als 2. Stelle der Wurzel würde 317 : 48 = 6 zu grofs sein, weil

$3 \cdot 4^2 = 48$

$3 \cdot 4 \cdot 6 = \quad 72$

$6^2 = \quad 36$

5556 · 6 = 33336 nicht von 31760 subtrahiert werden kann.

g. Das Bilden des Divisor wird sehr beschwerlich, wenn schon etliche Stellen der Wurzel gefunden sind.

Man erhält denselben einfacher dadurch, daſs man von den vorher berechneten 3 Zahlen die 1. unverändert läſst, die 2. mit 2, die 3. mit 3 multipliciert und sie dann in derselben Stellung (immer um 1 Stelle ausgerückt) addiert.

Im letzten Beispiele erhält man daher den Divisor Y aus den 3 Zahlen W in folgender Weise:

$$\begin{array}{rl} & 626547 \\ 6855 \cdot 2 = & 13710 \\ 25 \cdot 3 = & 75 \\ \hline & 62791875 \text{ der neue Divisor.} \end{array}$$

2. Beispiel. $\sqrt[3]{244700} =$

$\sqrt[3]{244|700,|000} = 62,5447$

$6^3 = 216$

$28\,700;\ 287 : (3 \cdot 6^2) = 287 : 108 = 2$

$3 \cdot 6^2 = 108$ — 108
$3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$ — 72
$2^2 = 4$ — 12

$22\,328 = \ldots\ldots 11164 \cdot 2$ — 11532 der folgende Dsr.

$6\,372\,000;\ 63720 : (3 \cdot 62^2) = 63720 : 11532 = 5$

$3 \cdot 62^2 = 11532$ — 11532
$3 \cdot 62 \cdot 5 = 930$ — 1860
$5^2 = 25$ — 75

$5\,812\,625 = \ldots\ldots\ldots 1162525 \cdot 5$ — 1171875 der folgende Dsr.

$559\,375000;\ 5593750 : 1171875 = 4$

$3 \cdot 625^2 = 1171875$ — 1171875
$3 \cdot 625 \cdot 4 = 7500$ — 15000
$4^2 = 16$ — 48

$469\,050064 = \ldots\ldots\ldots 117262516 \cdot 4$ — 117337548 der folgende Dsr.

$90\,324936000 : 117337548 = 7$

u. s. w.

h. Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens.

Das Abteilen der Basis nach Klassen von je 3 Stellen folgt aus §. 57 (9, 3. Zus. und 16, 8. Zus.).

Die Rechnungsoperationen aber ergeben sich aus der Formel:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,ab^2 + b^3.$$

Soll z. B. $\sqrt[3]{244700}$ berechnet werden (s. vorstehendes Beisp.), so mufs nach jenen Sätzen in §. 57 die Wurzel 2stellig sein.

Sind daher die Zehner der Wurzel $= z$, so müfste (z Zehner)^3 der Wurzelbasis möglichst nahe kommen. Aus

$$(10z)^3 = 244700, \text{ d. i.}$$
$$1000z^3 = 244700 \text{ aber folgt}$$
$$z^3 = 244 \text{ und folglich } z = 6.$$

In $\sqrt[3]{244700}$ sind also 6 Zehner ($= 60$) enhalten. Setzt man die noch zu bestimmenden Einer $= e$, so ist:

$$\sqrt[3]{244700} = 60 + e, \text{ oder}$$
$$(60 + e)^3 = 244700.$$

Nach §. 62, 4 verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$216000 + 3 \cdot 60^2 \cdot e + 3 \cdot 60 \cdot e^2 + e^3 = 244700, \text{ folglich}$$
$$3 \cdot 60^2 \cdot e + 3 \cdot 60 \cdot e + e^3 = 28700.$$

Hier ist $3 \cdot 60^2 \cdot e$ weit gröfser als die beiden folgenden Glieder und folglich ist annähernd:

$$3 \cdot 60^2 \cdot e = 28700 \text{ oder}$$
$$e = \frac{28700}{3 \cdot 60^2} = \frac{287}{3 \cdot 6^2} = \frac{287}{108} = \underline{2}.$$

(Die Operationen vergleiche stets mit dem 2. Beispiele!)

Es geht nun $3 \cdot 60^2 \cdot e + 3 \cdot 60 \cdot e^2 + e^3$, welche Summe der Zahl 28700 gleich sein soll, über in

$$3 \cdot 60^2 \cdot e + 3 \cdot 60 \cdot 2^2 + 2^3$$
$$= (3 \cdot 60^2 + 3 \cdot 60 \cdot 2 + 2^2) \cdot 2$$

$$\begin{aligned} \text{oder } 3 . 60^2 &= 108\,.\,. \\ 3 \cdot 60 \cdot 2 &= \;\;36\,. \\ 2^2 &= \;\;\;\;\underline{4} \\ 22328 &= 11164 \cdot 2 \text{ (wie oben im 2. Beisp.)} \end{aligned}$$

Setzt man ferner, um den Divisor in einfacherer Weise zu erhalten (s. Abschnitt g), die bis dahin erhaltene Wurzel $10x + y$, so ist der neue Divisor

$$= 3 \cdot (10x + y)^2 = 3 \cdot x^2 \cdot 100 + 3xy \cdot 10 \cdot 2 + y^2 \cdot 3.$$

Es ist aber $3x^2$ der vorhergehende Divisor, also die erste jener 3 Zahlen, $3xy$ die zweite und y^2 die dritte derselben.

1. Zusatz. Von Vorteil ist es, zuerst sogleich den bekannten Kubus einer mehrstelligen Zahl zu subtrahieren.

Beispiel. $\sqrt[3]{\frac{1}{2200}} = \sqrt[3]{0,|000|454|545|4\ldots}$

Da die Wurzel offenbar 0,07 ... sein mufs, so kann man in der Kubikzahlentafel aus den Zahlen von 700 bis 799 diejenige heraussuchen, deren Kubus der Zahl 454|545|454 am nächsten kommt. Man findet:

$$\sqrt[3]{0,000|454|545|454} = 0,076888$$

$$768^3 = 452\,984\,832$$

$$1\,560\,622545 : (3 \cdot 768^2 \text{ oder}) \; 1769472 = 8$$

$$3 \cdot 768^2 = 1769472$$

$$3 \cdot 768 \cdot 8 = \quad 18432$$

$$8^2 = \quad 64$$

$$1\,417\,052672 = \ldots\ldots 177131584 \cdot 8$$

$$143569873454 : 177316032 = 8.$$

2. Zusatz. Hat man etliche Stellen und zwar n Stellen der Wurzel berechnet, so erhält man weitere $n-1$ (oder n) Stellen der Wurzel, wenn man zunächst von dem ohne die neue Klasse vergröfserten Reste nur die ersten n Stellen beibehält. Ist dieser Rest hierdurch um r Stellen verkürzt worden, so hat man von dem nun zu bildenden Divisor die $r+1$ letzten Stellen abzuschneiden und jene Zahl durch die letztere mittelst der abgekürzten Division (s. §. 43, 5) zu dividieren.

Beispiel. $\sqrt[3]{0,00000308795} =$

$$\sqrt[3]{0,000|003|087|950} = 0,014562$$

$$1^2 = 1$$

$$2\,087 : (3 \cdot 1^2 \text{ oder}) \; 3 = 4$$

$$3 \cdot 1^2 = 3 \qquad\qquad 3$$

$$3 \cdot 1 \cdot 4 = 12 \qquad\qquad 24$$

$$4^2 = 16 \qquad\qquad 48$$

$$1\,744 = \ldots\ldots 436 \cdot 4 \qquad 588 \text{ der folgende Dsr.}$$

$$343\,950 : 588 = 5$$

$$3 \cdot 14^2 = 588 \qquad\qquad 588$$

$$3 \cdot 14 \cdot 5 = 210 \qquad\qquad 420$$

$$5^2 = 25 \qquad\qquad 75$$

$$304\,625 = \ldots\, 60925 \cdot 5 \qquad 63075 \text{ der folgende Dsr.}$$

$$39\,325\,000 : 63075 = 6$$

$39325000 : 63075 = 6$ (wiederholt!)

$3 \cdot 145^2 = 63075$		63075
$3 \cdot 145 \cdot 6 =$	2610	5220
$6^2 =$	36	108
$38001816 = \ldots\ldots$	$6333636 \cdot 6$	6359808 der folgende Dsr.

$1323184000 : 6359808 = 2$

$3 \cdot 1456^2 = 6359808$		6359808
$3 \cdot 1456 \cdot 2 =$	8736	17472
$2^2 =$	4	12
$1272136328 = \ldots\ldots\ldots$	$636068164 \cdot 2$	636155532 der folgende Dsr.

51047672.

Da jetzt 5 ($=n$) Stellen, nämlich 14562, berechnet sind, so hat man vom Reste ($n =$) 5 Stellen, also 51048, als Dividend für die abgekürzte Division beizubehalten. Hierdurch ist dieser Rest um die Stellen 672, also um ($r =$) 3 Stellen, verkürzt worden und mithin hat man vom neuen Divisor 636155532 ($r + 1 =$) 4 Stellen abzuschneiden, daher 63616 als Divisor für die nachstehende abgekürzte Division zu benutzen.

$51048 : 63616 = 0$

$51048 : 63616 = 08$

50893

$155 : 63616 = 080$

$155 : 63616 = 0802$

127

$28 : 636 = 08024.$

Diese Stellen 08024 sind jenen zuerst erhaltenen 0,014562 hinzuzufügen und folglich ist:

$$\sqrt[3]{0,00000308795} = 0,01456208024.$$

(Der wahre Wert ist 0,0145620802429 . . . .)

3. Zusatz. Hat man $\sqrt[3]{b} = n$ auf n Stellen bestimmt, so erhält man die Wurzel durch $\frac{1}{3}\left(\frac{b}{w^2} + 2w\right)$ auf nahe $2n$ Stellen richtig. Es sei z. B.

$$\sqrt[3]{3,1415926536} = 1,464$$

berechnet, so ist die vollständigere Wurzel:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{3,1415926536}{1,464^2}+2\cdot 1,464\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3,1415926536}{2,143296}+2,928\right)$$
$$=\frac{1}{3}(1,465776+2,928)=\frac{1}{3}\cdot 4,393776$$
$$=1,464592.$$

(Der wahre Wert ist 1,46459188 ....)

Beweis. Ist $\sqrt[3]{b}=w$ auf n Stellen richtig und setzt man den genauern Wert:

$$\sqrt[3]{b}=w+u,$$
$$\text{so ist } b=w^3+3w^2u+3wu^2+u^3.$$

Vernachlässigt man u^2 und u^3, so ist die Wurzel nur auf $2n$ Stellen richtig, weil sich u auf n Stellen bezieht. Aus

$$w^3+3w^2u=b \text{ ergiebt sich}$$
$$u=\frac{b-w^3}{3w^2}=\frac{b}{3w^2}-\frac{w}{3}, \text{ folglich ist}$$
$$\sqrt[3]{b}=w+u=w+\frac{b}{3w^2}-\frac{w}{3}=\frac{b}{3w^3}+\frac{2w}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{b}{w^2}+2w\right).$$

4. Zusatz. Ist $\sqrt[3]{b}$ annähernd $=w$, so ist sehr genau:

$$\sqrt[3]{b}=\frac{w}{2}\left[1+\frac{3b}{2w^3+b}\right]. \quad \text{(Formel von Schurig.)}$$

1. Beispiel. $\sqrt[3]{2}=1,259\ldots$, folglich annähernd

$$\sqrt[3]{2}=1\tfrac{1}{4}=\frac{5}{4}.$$

Mithin ist sehr genau:

$$\sqrt[3]{2}=\frac{\frac{5}{4}}{2}\left[1+\frac{3\cdot 2}{2\left(\frac{5}{4}\right)^3+2}\right]=\frac{5}{8}\left[1+\frac{6}{\frac{125}{32}+2}\right]$$
$$=\frac{5}{8}\left[1+\frac{192}{125+64}\right]=\frac{5}{8}\cdot 2\tfrac{1}{63}=\frac{10}{16}\cdot 2,0158730$$
$$=1,2599206.$$

(Der wahre Wert ist 1,25992105.)

2. Beispiel. $\sqrt[3]{296} = 6{,}6644\ldots$, folglich annähernd

$$\sqrt[3]{296} = 6\tfrac{2}{3} = \frac{20}{3}.$$

Mithin ist sehr genau:

$$\sqrt[3]{296} = \frac{\frac{20}{3}}{2}\left[1 + \frac{3 \cdot 296}{2 \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^3 + 296}\right]$$

$$= \frac{10}{3}\left[1 + \frac{3 \cdot 296}{2 \cdot \frac{8000}{27} + 296}\right]$$

$$= \frac{10}{3}\left[1 + \frac{3 \cdot 37}{2 \cdot \frac{1000}{27} + 37}\right]$$

$$= \frac{10}{3}\left[1 + \frac{3 \cdot 37 \cdot 27}{2 \cdot 1000 + 37 \cdot 27}\right]$$

$$= \frac{10}{3} \cdot \frac{5996}{2999} = \frac{59960}{8997}$$

$$= 6{,}66444370346.$$

(Der wahre Wert ist $\sqrt[3]{296} = 6{,}66444370329$!)

2. Kubikwurzel aus mehrgliederigen Buchstabenausdrücken.

Nachdem das Polynom richtig angeordnet ist, bestimmt man aus dem 1. Gliede die 3. Wurzel und zieht den Kubus derselben von jenem 1. Gliede ab. Um das 2. Glied zu finden, ist der Rest (resp. das 1. Glied desselben) durch das dreifache Quadrat der Wurzel zu dividieren. Sind schon beliebig viele Glieder der Wurzel berechnet, so findet man stets ein neues Glied, wenn man den Rest (resp. das 1. Glied desselben) durch das dreifache Quadrat der bisherigen Wurzel (resp. durch das 1. Glied dieses dreifachen Quadrats) dividiert. Hierauf multipliciert man den ganzen Divisor mit dem neuen Gliede, fügt dem Produkte noch das dreifache Produkt aus der frühern Wurzel und dem Quadrat des neuen Gliedes, sowie den Kubus des neuen Gliedes hinzu und zieht diese Summe von Gliedern von jenem Reste ab. Auf gleiche Weise findet man aus dem neuen Reste das folgende Glied der Wurzel.

Beispiel.

$$\sqrt[3]{125x^6 - 300x^5 - 210x^4 + 656x^3 + 252x^2 - 432x - 216} = 5x^2 - 4x - 6$$

$$(5x^2)^3 = 125x^6$$

$$-300x^5 - 210x^4 + 656x^3 : [3 \cdot (5x^2)^2 \text{ oder } | \, 75x^4 = -4x$$

$$-300x^5 + 240x^4 - 64x^3 = 75x^4 \cdot (-4x) + 3 \cdot 5x^2 \cdot (-4x)^2 + (-4x)^3$$

$$-450x^4 + 720x^3 + 252x^2 - 432x - 216 : 3(5x^2 - 4x)^2, \text{ d. i.}$$

$$:(75x^4 - 120x^3 + 48x^2) = -6$$

$$-450x^4 + 720x^3 + 252x^2 - 432x - 216 = -6(75x^4 - 120x^3 + 48x^2) + 3(5x^2 - 4x)(-6)^2 + (-6)^3$$

$$0.$$

Der Beweis folgt aus $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Denn ist $\sqrt[3]{w} = a + b$, wo a die bisher gefundene $\sqrt[3]{}$ und b das neue Glied ist, so ist

$$w = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ folglich } 3a^2b + 3ab + b^3 = w - a^3 \quad \ldots \ldots . \text{ (Y)}$$

Aus Rest $w - a^3 = 3a^2b$ ergiebt sich das neue Glied

$$b = \frac{w - a^3}{3a^2} = \frac{\text{Rest}}{3\,(\text{frühere Wurzel})^2}.$$

Zu subtrahieren ist nun (s. Y): $3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Zusatz. Man findet entweder durch dieses Verfahren oder auch mit $(1 \pm b)^{\frac{1}{3}}$ nach dem binomischen Lehrsatz (§. 62, 7, 1. und 2. Zusatz)

$$\sqrt[3]{1 \pm b} = 1 \pm \frac{b}{3} - \frac{b^2}{9} \pm \frac{5b^3}{81} - \frac{10b^4}{243} \pm \frac{22b^5}{729} + \frac{154b^6}{6561} \pm \ldots\ldots \text{(Z)}$$

1. Anwendung. Die $\sqrt[3]{}$ aus mehrgliederigen Buchstaben-Ausdrücken kann mittelst dieser Formel unmittelbar gefunden werden. Ist z. B. $\sqrt[3]{5a - 3d + 4e}$ gegeben, so setze dies

$$= \sqrt[3]{5a\left(1 - \frac{3d}{5a} + \frac{4e}{5a}\right)} = \sqrt[3]{5a} \cdot \sqrt[3]{1 - \left[\frac{3d}{5a} - \frac{4e}{5a}\right]}$$

und substituiere in Z für b den Ausdruck $\frac{3d}{5a} - \frac{4e}{5a}$.

2. Anwendung. Es ist $\sqrt[3]{296} = 6{,}664\ldots$, folglich ist annähernd $\sqrt[3]{296} = 6\frac{2}{3}$ oder annähernd $296 = \left(\frac{20}{3}\right)^3$. Setzt man

$$296 = \left(\frac{20}{3}\right)^3 + x,$$

so ergiebt sich hieraus:

$$x = 296 - \frac{8000}{27} = 296 - 296\tfrac{8}{27} = -\frac{8}{27}.$$

Folglich ist

$$\sqrt[3]{296} = \sqrt[3]{\left(\frac{20}{3}\right)^3 - \frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{20}{3}\right)^3 \left[1 - \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^3\right]}$$

$$= \frac{20}{3} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{1000}}.$$

Nach Formel Z erhält man mit $b = \frac{1}{1000}$ und dem untern Zeichen:

$$\sqrt[3]{1 - \frac{1}{1000}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1000} - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{1000}\right)^2 - \frac{5}{81}\left(\frac{1}{1000}\right)^3 - \frac{10}{243}\left(\frac{1}{1000}\right)^4 - \ldots$$

$$= 1 - \frac{0{,}001}{3} - \frac{0{,}000001}{9} - \frac{5 \cdot 0{,}000000001}{81} - \frac{10 \cdot 0{,}000000000001}{243} - \ldots$$

$$= 1 - 0{,}000333333333333 - 0{,}000000111111111$$
$$- 0{,}000000000061728 - 0{,}000000000000041$$
$$= 1 - 0{,}000333444506213$$
$$= 0{,}999666555493787.$$

Nun ist $\sqrt[3]{296} = \frac{20}{3} \cdot 0{,}999666555493787 = 6{,}66444370329191.$

§. 72. Höhere Wurzeln.

1. Ausziehen der 4. Wurzel.

Die Berechnung der $\sqrt[4]{\ }$ würde mit der Formel

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

sehr unbequem werden, daher benutzt man lieber $\sqrt[4]{\ } = \sqrt{\sqrt{\ }}$ (siehe §. 69, 21).

Beispiel.

$$\sqrt[4]{\frac{1}{7}} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{7}}} = \sqrt{\sqrt{0{,}14285714\ldots}} = \sqrt{0{,}377964473}$$
$$= 0{,}614791.$$

2. Die 5. Wurzel.

Das Ausziehen der 5., wie jeder andern Wurzel aus speciellen Zahlen ist mit Logarithmen (s. §. 73) eine ungemein einfache Rechnung. Ohne Logarithmen kann die 5. Wurzel nur mittelst der Formel $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$ berechnet werden. Das ziemlich zusammengesetzte Verfahren ist folgendes:

Zunächst ist die Basis vom Komma an in Klassen von je 5 Ziffern abzuteilen.

$n =$	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
$\sqrt[5]{n} =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Aus der 1. Klasse ist mittelst der vorstehenden Tafel die $\sqrt[5]{\ }$ zu ziehen, die 5. Potenz der Wurzel von der betr. Klasse zu subtrahieren und an den Rest die folgende Klasse zu hängen. Die neue Stelle erhält man jetzt, sowie auch in jedem spätern Stadium, aus dem um die neue Klasse vergröfserten Reste, wenn man denselben um 4 Stellen verkürzt und durch das 5fache Biquadrat der bisherigen Wurzel dividiert. Die alsdann abzuziehende Zahl bestimmt man in folgender Weise:

Das Quadrat der jetzt bekannten, die neue Stelle schon enthaltenden Wurzel vermindert man um das Produkt aus den Zehnern dieser Wurzel und der neuen Stelle. (Unter „Zehner der Wurzel" ist z B. 640 zu verstehen, wenn die Wurzel 643 ist.) Den Rest multipliciert man mit 5, mit den Zehnern der Wurzel und mit der ganzen Wurzel. Dieses Produkt vermehrt man um die 4. Potenz der neuen Stelle und multipliciert die Summe mit der neuen Stelle. Die erhaltene Zahl ist von jenem Reste zu subtrahieren und das Verfahren eventuell zu wiederholen.

Beispiel.

$$\sqrt[5]{10991|44686|11443} = 643$$

$6^5 = 7776$

$321544686;\ 32154 : (5 \cdot 6^4) = 32154 : 6480 = 4.$

$64^2 = 4096$ (64 ist die bisherige Wurzel)

$60 \cdot 4 = 240$ subtr.

$3856 \cdot 5 \cdot 60 \cdot 64$

d. i. $3856 \cdot 19200$

34704

7712

74035200

$256 = 4^4$ addiert

$296141824 = \ldots\ldots 74035456 \cdot 4$

$2540286211443;\quad 254028621 : (5 \cdot 64^4)$

$= 254028621 : 83886080 = 3$

$643^2 = 413449$

$640 \cdot 3 = 1920$ subtr.

$411529 \cdot 5 \cdot 640 \cdot 643$

d. i. $411529 \cdot 2057600$

$= 846762070400$

$81 = 3^4$

$2540286211443 = \ldots\ldots 846762070481 \cdot 3$

0.

3. $\sqrt[6]{} = \sqrt{\sqrt[3]{}}$ oder $= \sqrt[3]{\sqrt{}}$ (s. §. 69, 21).

Beispiel.

$$\sqrt[6]{2} = \sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt{1{,}2599210499} = 1{,}122462.$$

4. $\sqrt[7]{}$ kann wieder nur mit dem aus $(a+b)^7$ abgeleiteten 8gliederigen Ausdrucke berechnet werden.

5. $\sqrt[8]{} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$, also durch 3maliges Quadratwurzelausziehen.

Beispiel. $\sqrt[8]{\frac{3}{41000}}$?

Zuerst $\sqrt{\frac{3}{41000}} = \sqrt{0,00007317073\ldots} = 0,0085539892$,

dann $\sqrt{0,0085539892} = 0,092486778$,

endlich $\sqrt{0,092486778} = 0,304116319$.

6. $\sqrt[9]{} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{}}$;

$\sqrt[12]{} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{}}}$ oder $= \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{}}}$ oder $= \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{}}}$;

$\sqrt[16]{} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}}$.

§. 73. Logarithmen.

Die Kenntnis der in den §§. 16 und 17 gegebenen Entwickelung der 7. und letzten Species, des Logarithmierens, und der unmittelbar damit verbundenen Begriffe und Ausdrücke mufs zunächst vorausgesetzt werden, wenn die in den nachfolgenden Sätzen enthaltenen weiteren Ausführungen und die aus denselben entspringenden Anwendungen verstanden werden sollen.

Aus jenen §§. mag hier nur wiederholt werden:

$${}^{a}lg\, b = c \text{ entstanden aus } a^c = b.$$

Basis (a), Numerus (b), Logarithmus (c)

1. Offenbar kann die (reelle und positive) Basis des Logarithmus nur eine bestimmte Zahl sein, wenn Numerus und Logarithmus gegeben sind. So kann z. B. für den Numerus 1000 und Logarithmus 3 nur 10 die Basis sein, weil nur $10^3 = 1000$ und folglich auch nur ${}^{10}lg\, 1000 = 3$ sein kann.

Ist $lg\,32 = 5$ gegeben, so ist die Basis offenbar 2, weil nur $2^5 = 32$ ist und darum mufs jene gegebene Gleichung vollständig $^2lg\,32 = 5$ heifsen.

Zu einem gegebenen Numerus und Logarithmus wird sich also immer eine Basis finden lassen, die der betreffenden logarithmischen Gleichung Genüge leistet.

Die höheren Teile der Mathematik führen unmittelbar zu der Gleichung:

$$lg\,(1 + a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^5}{5} - \ldots,$$

wo also $1 + a$ der Numerus, die durch die Reihe

$$a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \ldots\ldots$$

ausgedrückte Zahl der Logarithmus ist. Bei der Entwickelung dieser Formel (Reihe) ist nun zwar die Basis des Logarithmus nicht bekannt, aber im Anschlufs an diese Entwickelung findet sich auch die Basis, die freilich keine einfache ganze Zahl, sondern die irrationale Zahl 2,718281828459 ... ist und die man mit e abkürzt. Es ist also:

$$^{2,71828}lg\,(1 + a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \ldots.$$

$$\text{oder}\quad ^{e}lg\,(1 + a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \ldots.$$

Die Logarithmen dieser Basis nennt man natürliche oder hyperbolische*) und kürzt sie mit „*lg nat*" (d. i. *logarithmus naturalis*) oder auch nur mit „*l.*" ab.

Da z. B. $2{,}71828^{9,21034} = 10000$, so ist (s. §. 17)

$$^{2,71828}lg\,10000 = 9{,}21034$$

und weil hier die Basis des Logarithmus 2,71828, so ist dieser Logarithmus der natürliche. Man schreibt daher die letzte Gleichung:

$$lg\,nat\,10000 = 9{,}21034 \quad\text{oder}\quad l.\,10000 = 9{,}21034.$$

Jene Reihe läfst sich jetzt auch schreiben:

$$lg\,nat\,(1 + a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^5}{5} - \ldots. \quad (A)$$

Mittelst derselben lassen sich die natürlichen Logarithmen gegebener Zahlen unmittelbar berechnen. Will man z. B. den natürlichen Logarithmus von 1,1 wissen, so hat man $a = 0{,}1$ zu setzen und es ergiebt sich:

*) Mittelst dieser Logarithmen berechnet man Teile der Hyperbel.

$$lg\,nat(1+0{,}1) = 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} - \ldots, \text{ oder}$$

$$\begin{aligned} lg\,nat\,1{,}1 &= 0{,}1 - \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}001}{3} - \frac{0{,}0001}{4} + \ldots \\ &= 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}00033333 - 0{,}000025 \\ &\quad + 0{,}000002 - 0{,}00000017 + 0{,}00000001 \\ &= 0{,}10033534 - 0{,}00502517 \\ lg\,nat\,1{,}1 &= 0{,}09531017. \end{aligned}$$

Der 11. Satz dieses Paragraphen wird uns zeigen, dafs man den Logarithmus eines Numerus für jede andere Basis (aufser 2,71828 . . .) berechnet, indem man erst den natürlichen Logarithmus dieses Numerus sucht und diesen dann mit einer bestimmten, für die gegebene Basis unveränderlichen Zahl multipliciert. So findet man den Zehn-Logarithmus eines jeden Numerus, wenn man den natürlichen Logarithmus desselben mit 0,43429448 multipliciert. Es ist also immer:

$$^{10}lg\,n = 0{,}43429448 \cdot lg\,nat\,n$$

und daher auch (s. oben A):

$$^{10}lg\,(1+a) = 0{,}43429448\left(a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \ldots\right)$$

Mithin ist z. B.

$$^{10}lg\,1{,}1 = 0{,}43429448 \cdot 0{,}09531017 = 0{,}0413927.$$

Es erklärt sich nun auch der Ausdruck „natürlicher“ Logarithmus, denn die Reihe $a - \frac{a^2}{2} + \ldots\ldots$ giebt die natürlichen Logarithmen unmittelbar, während für jede andere Basis der berechnete natürliche Logarithmus erst noch mit einer bestimmten Zahl multipliciert werden mufs.

Die Logarithmen, welche die Basis 2,71828 nicht haben, nennt man künstliche und bezeichnet sie mit *lg art* (d. i. *logarithmus artificiosus*). Zu diesen gehören mithin auch die Logarithmen mit der Basis 10 (die dekadischen Logarithmen).

Die Berechnung der dekadischen Logarithmen ist demnach zwar zusammengesetzter als die der natürlichen, das Rechnen mit denselben jedoch weit einfacher und bequemer als mit den natürlichen oder mit anderen künstlichen Logarithmen, weshalb jene in der Praxis auch allein im Gebrauche sind und darum gemeine oder vulgäre genannt werden.

Die dekadischen Logarithmen bezeichnet man nicht mit ^{10}lg, sondern einfach mit *lg* (oder auch *log*) und zum Unterschiede von den *lg nat* mit *lg vulg* (= *logarithmus vulgaris*). So ist z. B.

$$lg\,10000 = 4 \text{ oder } lg\,vulg\,10000 = 4,$$

$$\text{d. i. } {}^{10}lg\,10000 = 4, \text{ weil } 10^4 = 10000 \text{ ist.}$$

2. Die Logarithmen und zwar ursprünglich die natürlichen Logarithmen sind von John Neper (eigentlich Napier), Baron von Merchiston, einem Schottländer, wahrscheinlich um das Jahr 1610 erfunden worden. Erst im Jahre 1614 trat er jedoch mit dem Werke „*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, *Edinburg*, 4°" an die Öffentlichkeit. Dasselbe enthielt die natürlichen Logarithmen der Sinusse und Tangenten. Henry Briggs, der Freund Napiers, erfand die dekadischen Logarithmen und gab im Jahre 1618: „*Logarithmorum chilias prima*" (auf 8 Decimalstellen) heraus. Hierauf berechnete er mit 8 Gehilfen die dekadischen Logarithmen in gröſserem Umfange. Das unter dem Titel: „*Arithmetica, logarithmica, London,* 1624" von ihm herausgegebene Werk enthält die gemeinen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 und 90000 bis 100000 auf 14 Decimalstellen. Erst im Jahre 1634 erschienen die gemeinen Logarithmen aller Zahlen von 10000 bis 100000. Briggs starb 1630 als Professor in Oxford.

Die natürlichen Logarithmen werden daher auch „nepersche", die dekadischen Logarithmen „briggs'sche" genannt.

Um die Berechnung der Logarithmen machten sich vorzüglich Vlacq, Sharp, Gardiner, Prony verdient.

Unabhängig von den englischen Erfindungen und schon vor denselben hat der Deutsche Bürg ein künstliches Logarithmensystem erfunden, indem er die Potenzen der Zahl 1,00001 berechnete, so daſs

der bürgsche Logarithmus von 2,71826823801647251 2 = 100000,
„ „ „ „ 10 = 230259,6606 ist.

Das von ihm herausgegebene Werk erschien unter dem Titel: „Arithmetische und geometrische Progreſs-Tabuln, Prag 1620". Diese Logarithmen kommen zwar im Princip den natürlichen am nächsten, aber sie würden (wie die natürlichen) Tafeln von ungeheurem Umfange nötig gemacht haben.

Die zunächst zu entwickelnden allgemeinen logarithmischen Sätze, welche die Grundlage des Rechnens mit Logarithmen bilden, sollen sich auf jede nur mögliche Basis beziehen, da es jedenfalls rationeller ist, nicht bloſs die im Gebrauche befindlichen Basen 10 und 2,71828 . . . zu berücksichtigen.

3. Da ${}^a lg\,b = c$ aus $a^c = b$ hervorgegangen ist, so muſs ${}^a lg\,b = c$ richtig sein, wenn es $a^c = b$ ist. Die logarithmische Gleichung ist also richtig, wenn die logarithmische Basis mit dem Logarithmus potenziert den Numerus giebt, oder wenn

$$\text{„Basis}^{\text{Logarithmus}} = \text{Numerus"}$$

ist. (Beweisführung der logarithmischen Sätze!)

In der Folge mag Basis, Logarithmus und Numerus mit Bas., Log., Num. abgekürzt werden.

Beispiele.

$^{5}lg\,25 = 2,$ weil $\text{Bas.}^{\text{Log.}} = 5^2 = 25 = \text{Num.}$

$^{\frac{1}{3}}lg\,\frac{1}{81} = 4,$ „ „ $= \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} = \text{Num.}$

$^{-7}lg\,(-343) = 3,$ „ „ $= (-7)^3 = -343 = \text{Num.}$

$^{2}lg\,\frac{1}{64} = -6,$ „ „ $= 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = \text{Num.}$

$^{10}lg\,\frac{1}{100000} = -5,$ „ „ $= 10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000}$
$= \text{Num.}$

4. Ist umgekehrt $^{a}lg\,b = c$ richtig, so mufs $a^c = b$ sein. Ist z. B. $^{10}lg\,1000 = 3$ richtig, so mufs $10^3 = 1000$ sein.

5. Gleiches mit Gleichem logarithmiert giebt Gleiches.

Ist $A = B$ (Voraussetzung)

so ist auch $^{n}lg\,A = {}^{n}lg\,B$ (Behauptung).

Man schreibt auch:

$$\left.\begin{array}{r} A = B \\ n = n \end{array}\right\} \text{(Vorauss.)}$$

$$^{n}lg\,A = {}^{n}lg\,B \text{ (Behaupt.)}$$

Beweis. $^{n}lg\,A = {}^{n}lg\,A$ (s. 1. Axiom) geht, wenn an die Stelle des A der rechten Seite das ihm gleiche B (s. Vorauss.) gesetzt wird, über in

$$^{n}lg\,A = {}^{n}lg\,B.$$

1. Zusatz. Ist $A = B$, so ist also auch $^{10}lg\,A = {}^{10}lg\,B$, d.i.

$$lg\,A = lg\,B.$$

2. Zusatz. Ist

$$\left.\begin{array}{r} A = B \\ m = n \end{array}\right\}$$

so ist auch $^{m}lg\,A = {}^{n}lg\,B$ (vergl. §. 7, 9, Zus.)

3. Zusatz. Umkehrung:

Ist $^{n}lg\,A = {}^{n}lg\,B$, so ist $A = B$.

4. Zusatz. Folglich auch:

Ist $lg\,vulg\,A = lg\,vulg\,B$,

so ist $A = B$.

6. ${}^{b}lg\, b^{c} = c.$ Der Logarithmus einer Potenz, dessen Basis gleich der Basis der Potenz, ist dem Exponent gleich.

Beweis. Man unterscheide in

$$\underset{\text{Bas.}}{{}^{b}}lg\, \underset{\text{Num.}}{b^{c}} = \underset{\text{Log.}}{c}:$$

Da nun Bas.$^{\text{Log.}} = b^{c} =$ Num., so ist jene Gleichung richtig.

Beispiele. ${}^{7}lg\, 7^{4} = 4;\ {}^{10}lg\, 10^{2} = 2;$

${}^{3}lg\, \frac{1}{3} = {}^{3}lg\, 3^{-1} = -1.$

1. Zusatz. Setzt man $c = 0$, so erhält man ${}^{b}lg\, b^{0} = 0$, d. i.

$$✵\ {}^{b}lg\, 1 = 0.$$

Da b jede Zahl sein kann, so ist für jede Basis $lg\, 1 = 0.$

Beispiele. ${}^{10}lg\ 1 = 0$, d. i. $lg\ vulg\ 1 = 0;$

${}^{e}lg\, 1 = 0$, d. i. $lg\ nat\ 1 = 0.$

2. Zusatz. $c = 1$ giebt ${}^{b}lg\, b^{1} = 1$, d. i.

$$✵\ {}^{b}lg\, b = 1.$$

Der Logarithmus der Basis ist stets $= 1.$

Beispiele. ${}^{10}lg\, 10 = 1$, d. i. $lg\ vulg\ 10 = 1;$

${}^{e}lg\ e = 1$, d. i. $lg\ nat\ 2{,}7182818 = 1.$

3. Zusatz. $b = 10$ giebt ${}^{10}lg\ 10^{c} = c$, d. i.

$$✵\ lg\ vulg\ 10^{c} = c.$$

Der vulgäre Logarithmus einer Potenz von 10 ist dem Exponent gleich.

Die Gleichung geht mit:

$c = 0$ über in $lg\ vulg\ 10^{0} = 0$, d. i. $lg\ vulg\ 1 = 0,$
$c = 1$ „ „ $lg\ vulg\ 10^{1} = 1$, d. i. $lg\ vulg\ 10 = 1,$
$c = 2$ „ „ $lg\ vulg\ 10^{2} = 2$, d. i. $lg\ vulg\ 100 = 2,$
$c = 3$ „ „ $lg\ vulg\ 10^{3} = 3$, d. i. $lg\ vulg\ 1000 = 3,$
$c = 4$ „ „ $lg\ vulg\ 10^{4} = 4$, d. i. $lg\ vulg\ 10000 = 4,$
$c = 5$ „ „ $lg\ vulg\ 10^{5} = 5$, d. i. $lg\ vulg\ 100000 = 5,$
$c = \infty$ „ „ $lg\ vulg\ 10^{\infty} = \infty$, d. i. $lg\ vulg\ \infty = \infty,$
$c = -1$ „ „ $lg\ vulg\ 10^{-1} = -1$, d. i.

$lg\ vulg\ \frac{1}{10} = -1$ oder $lg\ vulg\ 0{,}1 = -1,$

$c = -2$ über in $lg\ vulg\ 10^{-2} = -2$, d. i.

$$lg\ vulg \frac{1}{10^2} = -2 \text{ oder } lg\ vulg\ 0{,}01 = -2,$$

$$\text{eben so } lg\ vulg\ 0{,}001 = -3,$$
$$lg\ vulg\ 0{,}0001 = -4,$$

$c = -\infty$ „ „ $lg\ vulg\ 10^{-\infty} = -\infty$, d. i.

$$lg\ vulg \frac{1}{10^\infty} = -\infty \text{ oder}$$

$$lg\ vulg \frac{1}{\infty} = -\infty \text{ oder } lg\ vulg\ 0 = -\infty.$$

4. Zusatz. Die 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} lg\ \infty = \infty \\ lg\ \ 1 = 0 \\ lg\ \ 0 = -\infty \end{array}\right\} (W)$$

führen unmittelbar zu den nachstehenden Sätzen:

1) Ist der Num. > 1, so ist der vulg. Logarithmus > 0, also positiv.
2) Ist der Num. < 1 und > 0, also ein echter Bruch, so ist der vulg. Logarithm. < 0 und $> -\infty$, also eine negative Zahl.
3) Da die Logarithmen auf der rechten Seite der Gleichungen W schon die unterste Grenze $-\infty$ der reellen Zahlen erreichen, so ist der zugehörige Numerus 0 die unterste Grenze derjenigen Zahlen, für welche es reelle Zahlen als Logarithmen giebt. Für Zahlen, die mithin < 0 sind, kann es keine Logarithmen geben, oder:

   Die Logarithmen negativer Zahlen sind imaginär.

5. Zusatz. Selbstverständlich ist es nicht nötig, als Exponenten der Potenz von 10 nur ganze Zahlen zu setzen, denn mit $c = \frac{1}{2}$ findet man

$$lg\ 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \text{ d. i. } lg\ \sqrt{10} = \frac{1}{2} \text{ oder}$$
$$lg\ 3{,}162278 = 0{,}5;$$

mit $c = \frac{1}{4} = 0{,}25$ wird der Num. $10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{10^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{3{,}16227\ldots}$

$$= 1{,}77827\ldots, \text{ daher } lg\ 1{,}77827\ldots = 0{,}25;$$

mit $c = \frac{1}{8} = 0{,}125$ wird der Num. $10^{\frac{1}{8}} = \sqrt{10^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{1{,}77827\ldots}$
$= 1{,}33352\ldots$, daher $lg\ 1{,}33352\ldots = 0{,}125$;

mit $c = \frac{1}{16} = 0{,}0625$ wird der Num. $10^{\frac{1}{16}} = \sqrt{10^{\frac{1}{8}}} = \sqrt{1{,}33352\ldots}$
$= 1{,}15478\ldots$, daher $lg\ 1{,}15478\ldots = 0{,}625$.

Durch fortwährendes Halbieren des Logarithmus (c) und Quadratwurzelausziehen aus dem Numerus können diese Werte leicht fortgesetzt werden (s. u. die Tabelle).

Mit $c = \frac{3}{4} = 0{,}75$ wird der Num. $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{1000} = 5{,}62341\ldots$,
daher $lg\ 5{,}62341\ldots = 0{,}75$;

$c = \frac{3}{8}$ giebt $10^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{10^3} = 2{,}37137\ldots$,
daher $lg\ 2{,}37137\ldots = 0{,}375$;

$c = \frac{5}{8}$ „ $10^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{10^5} = 4{,}21696\ldots$,
daher $lg\ 4{,}21696\ldots = 0{,}625$;

$c = \frac{7}{8}$ „ $10^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{10^7} = 7{,}49894\ldots$,
daher $lg\ 7{,}49894\ldots = 0{,}875$;

$c = \frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots$ giebt $10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} = 2{,}15443\ldots$,
daher $lg\ 2{,}15443\ldots = 0{,}33333\ldots$;

$c = \frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots$ giebt $10^{\frac{1}{6}} = \sqrt{10^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2{,}15443\ldots}$
$= 1{,}46779\ldots$, daher $lg\ 1{,}46779\ldots = 0{,}16666\ldots$;

$c = \frac{1}{12} = 0{,}08333\ldots$ giebt $10^{\frac{1}{12}} = \sqrt{10^{\frac{1}{6}}} = \sqrt{1{,}46779\ldots}$
$= 1{,}21152\ldots$, daher $lg\ 1{,}21152\ldots = 0{,}16666\ldots$

Diese Werte können gleichfalls durch Halbieren des Logarithmus (c) und Quadratwurzelausziehen aus dem Numerus fortgesetzt werden.

$c = \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ giebt $10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{100} = 4{,}64158\ldots$;

$c = \frac{5}{6} = 0{,}833\ldots$ „ $10^{\frac{5}{6}} = \sqrt{10 \cdot 10^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{46{,}4158\ldots}$
$= 6{,}81292\ldots$;

$$c=\frac{5}{12}=0{,}4166\ldots \text{ giebt } 10^{\frac{5}{12}}=\sqrt{10^{\frac{5}{6}}}=\sqrt{6{,}81292\ldots}$$
$$=2{,}61015\ldots;$$

$$c=\frac{7}{12}=0{,}5833\ldots \quad \text{„} \quad 10^{\frac{7}{12}}=\sqrt{10\cdot 10^{\frac{1}{6}}}=\sqrt{14{,}6779\ldots}$$
$$=3{,}83118\ldots;$$

$$c=\frac{11}{12}=0{,}9166\ldots \quad \text{„} \quad 10^{\frac{11}{12}}=\sqrt{10\cdot 10^{\frac{5}{6}}}=\sqrt{68{,}1292\ldots}$$
$$=8{,}25404\ldots$$

Durch die hier angedeuteten Rechnungen gelangt man zu folgender Tabelle, die im 14. Satze zur Berechnung der Logarithmen benutzt wird.

Numerus	Logarithmus (c)	Numerus	Logarithmus (c)
8,25404 18527	0,91666 66667	1,00014 05485	0,00006 10352
7,49894 20933	0,875	1,00009 36968	0,00004 06901
6,81292 06906	0,83333 33333	1,00007 02718	0,00003 05176
5,62341 32519	0,75	1,00004 68473	0,00002 03451
4,64158 88336	0,66666 66667	1,00003 51353	0,00001 52588
4,21696 50343	0,625	1,00002 34234	0,00001 01725
3,83118 68496	0,58333 33333	1,00001 75675	0,00000 76294
3,16227 76602	0,5	1,00001 17116	0,00000 50863
2,61015 72157	0,41666 66667	1,00000 87837	38147
2,37137 37057	0,375	1,00000 58558	25431
2,15443 46900	0,33333 33333	43918	19073
1,77827 94100	0,25	29278	12716
1,46779 92676	0,16666 66667	21959	09537
1,33352 14322	0,125	14639	06358
1,21152 76586	0,08333 33333	10980	04768
1,15478 19847	0,0625	07320	03179
1,10069 41713	0,04166 66667	05490	02384
1,07460 78283	0,03125	03660	01589
1,04913 97291	0,02083 33333	02745	01192
1,03663 29284	0,01562 5	01830	00795
1,02427 52214	0,01041 66667	01372	00596
1,01815 17217	0,00781 25	00915	00397
1,01206 48306	0,00520 83333	00686	00298
1,00903 50448	0,00390 625	00457	00199
1,00601 43292	0,00260 41667	00343	00149
1,00450 73643	0,00195 3125	00229	00099
1,00300 26566	0,00130 20833	00172	00075
1,00225 11483	0,00097 65625	00114	00050
1,00150 02030	0,00065 10417	00086	00037
1,00112 49414	0,00048 82813	00057	00025
1,00074 98204	0,00032 55208	00043	00019
1,00056 23126	0,00024 41406	00029	00012
1,00037 48399	0,00016 27604	00021	00009
1,00028 11168	0,00012 20703	00014	00006
1,00018 74024	0,00008 13802	1,00000 00011	0,00000 00005

6. Zusatz. Berechnet man die Logarithmen der natürlichen Zahlen für eine bestimmte, unveränderliche Basis, so bilden die-

selben ein Logarithmensystem. Hat man z. B., wie in vorstehendem 3., 4. und 5. Zusatze, für alle Zahlen den Zehn-Logarithmus bestimmt, so bilden die Logarithmen das vulgäre oder briggs'sche Logarithmensystem.

7. $a^{{}^a lg b} = b$. (Wie in $a - a + b$ oder $a : a \cdot b$ heben sich die beiden ersten Zahlen und man erhält die dritte).

Beweis. Die Gleichung

$$^a lg\, b = {}^a lg\, b \;.\;.\;.\;.\;.\; (A)$$

ist unbedingt (apodiktisch) richtig, folglich ist auch (s. 4. Satz)

$$\text{Bas.}^{\text{Log.}} = \text{Num.} \;.\;.\;.\;.\;.\; (B)$$

Unterscheidet man nun in jener Gleichung A: Basis (links oben $= a$), Numerus (links die 2. Zahl $= b$), Logarithmus (die rechte Seite $= {}^a lg\, b$), so geht die Gleichung B über in:

$$a^{{}^a lg\, b} = b.$$

Zusatz. Also ist auch umgekehrt: $b = a^{{}^a lg\, b}$.

8. $\underset{\text{Bas.}\;\text{Num.}}{{}^d lg\, n} = \underbrace{{}^d lg\, r \cdot {}^r lg\, n}_{\text{Log.}}$. $\left(\text{Vergl. der Form nach } \frac{d}{n} = \frac{d}{r} \cdot \frac{r}{n}!\right)$

Beweis. $\text{Bas.}^{\text{Log.}} = d^{{}^d lg\, r \,.\, {}^r lg\, n} = \left(d^{{}^d lg\, r}\right)^{{}^r lg\, n} = r^{{}^r lg\, n}$ (s. 7. Satz) $= n$ (7. Satz) $=$ Num.

1. Zusatz. $d = 10$, $r = e = 2{,}71828 \ldots$ (s. 1. Satz) giebt:

$$^{10} lg\, n = {}^{10} lg\, e \cdot {}^e lg\, n, \text{ d. i.}$$

$$lg\, vulg\, n = lg\, vulg\, e \cdot lg\, nat\, n.$$

2. Zusatz. $d = e = 2{,}71828 \ldots$, $r = 10$ giebt:

$$^e lg\, n = {}^e lg\, 10 \cdot {}^{10} lg\, n, \text{ d. i.}$$

$$lg\, nat\, n = lg\, nat\, 10 \cdot lg\, vulg\, n.$$

Setzt man $lg\, nat\, 10 = 2{,}302585092994$ als bekannt voraus, so ist

$$✵\; lg\, nat\, n = 2{,}302585092994 \cdot lg\, vulg\, n.$$

Ist z. B. $lg\, nat\, 113$ aus $lg\, vulg\, 113 = 2{,}0530784435$ zu bestimmen, so hat man:

$$lg\, nat\, 113 = 2{,}30258509299 \cdot 2{,}0530784435.$$

Diese Multiplication erleichtert man sich mit der in den Bruhns-schen Logarithmen S. 186 (links) enthaltenen Tafel. Nachdem der vulgäre Logar. in Klassen von je 2 Ziffern abgeteilt ist:

2,0|53|07|84|43|50,

findet man daselbst:

$$\left.\begin{array}{lr} 20 \cdot 2{,}30258\ldots = & 46{,}0517018599 \\ 53 \cdot 2{,}30258\ldots = & 122{,}03700993 \\ 07 \cdot 2{,}30258\ldots = & 16{,}118096 \\ 84 \qquad = & 193{,}4171 \\ 43 \qquad = & 99{,}01 \\ 50 \qquad = & 115, \end{array}\right\} \text{stets 2 Stellen nach rechts ausgerückt.}$$

$$\overline{4727387819}$$

Die richtige Stellung des Komma ergiebt sich aus der gegebenen Gleichung: $2{,}3 \cdot 2{,}05 = 4{,}7 \ldots.$ Folglich ist:

$$lg\ nat\ 113 = 4{,}72738781 9.$$

9. Umkehrung: ${}^{d}lg\, r \cdot {}^{r}lg\, n = {}^{d}lg\, n.$

10. Setzt man im 9. Satze $n = d$, so ist:

$${}^{d}lg\, r \cdot {}^{r}lg\, d = {}^{d}lg\, d, \text{ d. i. (s. 6. Satz, 2. Zus.)}$$

$$✵\ {}^{d}lg\, r \cdot {}^{r}lg\, d = 1. \quad \left(\text{Analoge Form: } \frac{d}{r} \cdot \frac{r}{d} = 1!\right)$$

Beispiel. $\quad {}^{10}lg\, e \cdot {}^{e}lg\, 10 = 1,$ d. i.

$$lg\ vulg\ e \cdot lg\ nat\ 10 = 1.$$

11. ${}^{r}lg\, n = \dfrac{{}^{d}lg\, n}{{}^{d}lg\, r}.$

Beweis. $\text{Bas.}^{\text{Log.}} = r^{\frac{{}^{d}lg\, n}{{}^{d}lg\, r}} = \left(d^{{}^{d}lg\, r}\right)^{\frac{{}^{d}lg\, n}{{}^{d}lg\, r}}$ [s. 7. Satz, Zus.]

$$= d^{{}^{d}lg\, r \cdot \frac{{}^{d}lg\, n}{{}^{d}lg\, r}} = d^{{}^{d}lg\, n} = n = \text{Num.!}$$

Anmerkung. Dieser Satz ist nicht aus dem 9. Satze dadurch abzuleiten, dafs man beide Seiten durch ${}^{d}lg\, r$ dividiert, weil in der Zahlenlehre die Sätze der Algebra (Gleiches durch Gleiches dividiert) vermieden werden müssen.

Beispiel. Um den ${}^{6}lg\, n$ mittelst der Zehn-Logarithmen zu bestimmen, setzt man $r = 6$, $d = 10$, und es ergiebt sich:

$${}^{6}lg\, n = \frac{{}^{10}lg\, n}{{}^{10}lg\, 6} = \frac{{}^{10}lg\, n}{0{,}7781513} = 1{,}285097 \cdot {}^{10}lg\, n.$$

Z. B. ${}^{6}lg\, 10000 = 1{,}285097 \cdot {}^{10}lg\, 10000 = 1{,}285097 \cdot 4$

$$= 5{,}140388.$$

1. Zusatz. $d = e$ giebt:

$$^{r}lg\, n = \frac{^{e}lg\, n}{^{e}lg\, r} = \frac{1}{^{e}lg\, r} \cdot {}^{e}lg\, n, \text{ oder}$$

$$✵\ ^{r}lg\, n = \frac{1}{lg\ nat\ r} \cdot lg\ nat\ n.$$

Um also den r-Logarithmus einer Zahl n aus dem schon bekannten natürlichen Logarithmus von n zu erhalten, multipliciert man letzteren mit dem reciproken natürlichen Logarithmus der Basis r jenes gesuchten künstlichen Logarithmus.

Diese Zahl, mit welcher der natürliche Logarithmus eines gegebenen Numerus multipliciert werden mufs, um einen bestimmten künstlichen Logarithmus desselben Numerus zu erhalten, nennt man „Modul dieses künstlichen Logarithmensystems".

Beispiel. $r = 10$ giebt:

$$^{10}lg\, n = \frac{1}{lg\ nat\ 10} \cdot lg\ nat\ n \text{ oder}$$

$$^{10}lg\, n = \frac{1}{2{,}302585092994} \cdot lg\ nat\, n \text{ (s. 8. Satz, 2. Zus.).}$$

Führt man die Division aus, so erhält man:

$$✵\ lg\ vulg\ n = 0{,}434294481903 \cdot lg\ nat\ n.$$

Da 0,43429 ... (abgekürzt mit M oder m) die Zahl ist, mit welcher der natürliche Logar. multipliciert werden mufs, um den briggs'schen Logar. zu erhalten, so ist dieselbe der Modul des riggs'schen Logarithmensystems.

1. Beispiel. $lg\ nat\ 3 = 1{,}0986122887$, folglich:

$$lg\ vulg\ 3 = 0{,}4342944819 \cdot 1{,}0986122887.$$

Mit 10|98|61|22|88|70 ergiebt sich nun mittelst der in den Bruhns'schen Logarithmen S. 186 (rechts) enthaltenen Tafel:

10 · 0,43429 ...	=	4,34294 481900
98 · 0,43429 ...	=	42,560 859227
61	=	26,4 919634
22	=	9,55448
88	=	38,218
70	=	30,4
		477121 2547.

Aus $0{,}434 \cdot 1{,}09 = 0{,}47$ ergiebt sich die Stellung des Komma, folglich:

$$lg\ vulg\ 3 = 0{,}4771212547.$$

2. Beispiel. $lg\, nat \frac{11}{13} = -\ 0{,}16705408$; folglich $lg\, vulg \frac{11}{13}$ $= 0{,}434 \ldots \cdot (-\ 0{,}167 \ldots) = -\ 0{,}07255067$.

2. Zusatz. Mit $r = 10$, $n = d = e$ ergiebt sich aus dem Hauptsatze:

$$^{10}lg\,e = \frac{^{e}lg\,e}{^{e}lg\,10} = \frac{1}{^{e}lg\,10} \text{ (s. 6. Satz, 2. Zus.), d. i.}$$

$$lg\,vulg\,e = \frac{1}{lg\,nat\,10} = \frac{1}{2{,}30258\ldots} = 0{,}434294\ldots \text{ oder}$$

$$lg\,vulg\,2{,}71828\ldots = 0{,}434294\ldots$$

3. Zusatz. $r = e$, $d = 10$:

$$^{e}lg\,n = \frac{^{10}lg\,n}{^{10}lg\,e} = \frac{1}{^{10}lg\,e} \cdot {}^{10}lg\,n, \text{ oder}$$

$$lg\,nat\,n = \frac{1}{lg\,vulg\,2{,}71828\ldots} \cdot lg\,vulg\,n.$$

4. Zusatz. $r = e$, $n = d = 10$:

$$^{e}lg\,10 = \frac{^{10}lg\,10}{^{10}lg\,e} = \frac{1}{^{10}lg\,e}, \text{ oder}$$

$$lg\,nat\,10 = \frac{1}{lg\,vulg\,e} = \frac{1}{lg\,vulg\,2{,}71828}.$$

12. Umkehrung: $\frac{^{d}lg\,n}{^{d}lg\,r} = {}^{r}lg\,n.$

1. Zusatz. $d = n = 10$, $r = e$:

$$\frac{^{10}lg\,10}{^{10}lg\,e} = {}^{e}lg\,10 \text{ oder}$$

$$\frac{1}{lg\,vulg\,e} = lg\,nat\,10.$$

2. Zusatz. $d = n = e$, $r = 10$:

$$\frac{^{e}lg\,e}{^{e}lg\,10} = {}^{10}lg\,e, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{lg\,nat\,10} = lg\,vulg\,e.$$

13. Ist $a^n = a^r$, so ist $n = r$.

Beweis. $a^n = a^r$, folglich nach dem 5. Satze:

$$^{a}lg\,a^n = {}^{a}lg\,a^r, \text{ d. i. (s. 6. Satz)}$$

$$n = r.$$

Beispiel. $5^x = 5^{a-b}$, mithin $x = a - b$.

Zusatz. Folglich auch umgekehrt:

Ist $n = r$, so ist $a^n = a^r$.

14. ${}^d lg\,(ab) = {}^d lg\,a + {}^d lg\,b$.

Für jede Basis (d) ist der Logarithmus eines Produkts gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Beweis. Hier ist die Basis (links oben) $= d$, der Numerus (links) $= ab$, der Logarithmus (die rechte Seite) $= {}^d lg\,a + {}^d lg\,b$ und (s. den 3. Satz)

$$\text{Bas.}^{\text{Log.}} = d^{\,{}^d lg\,a + {}^d lg\,b} = d^{\,{}^d lg\,a} \cdot d^{\,{}^d lg\,b} \text{ (s. §. 57, 4)} = a \cdot b \text{ (s. 7. Satz)}$$
$$= \text{Num.!}$$

1. Zusatz. Folglich auch ${}^{10} lg\,(ab) = {}^{10} lg\,a + {}^{10} lg\,b$, d. i.

✷ $lg\,vulg\,(ab) = lg\,vulg\,a + lg\,vulg\,b$.

Beispiel. $lg\,vulg\,(7 \cdot 9) = lg\,vulg\,7 + lg\,vulg\,9$
$= 0{,}8450980 + 0{,}9542425$
$lg\,vulg\,63 = 1{,}7993405$.

2. Zusatz. Ist y ein imaginärer Wert von ${}^d lg\,(-1)$ [siehe 6. Satz, 4. Zusatz], so ist $lg\,(-a) = lg\,a + (2n+1)\,y$, wo $2n+1$ irgend eine ungerade Zahl.

Beweis. Da ${}^d lg\,(-1) = y$, so ist $d^y = -1$ (s. 4. Satz), folglich ist auch $(d^y)^3 = (-1)^3$, d. i. $d^{3y} = -1$;

ferner $(d^y)^5 = (-1)^5$, d. i. $d^{5y} = -1$ u. s. w.

Mithin ist nun auch (s. 3. Satz)

$${}^d lg\,(-1) = y,\ {}^d lg\,(-1) = 3y,\ {}^d lg\,(-1) = 5y,$$

allgemein:
$${}^d lg\,(-1) = (2n+1)\,y$$
und folglich:
$${}^d lg\,(-a) = {}^d lg\,[a\,(-1)] = {}^d lg\,a + {}^d lg\,(-1) = {}^d lg\,a + (2n+1)\,y.$$

3. Zusatz. Mittelst der im 5. Zus. des 6. Satzes gegebenen Tabelle läſst sich jetzt der vulgäre Logarithmus jeder zwischen 1 und 10 liegenden Zahl a sehr leicht bestimmen. Die links stehenden Zahlen dieser Tabelle mögen mit b, die rechts stehenden mit c bezeichnet werden, so daſs zu $b = 1{,}33352\ldots : c = 0{,}125$ gehört und daher $lg\,1{,}33352\ldots = 0{,}125$ ist.

Man dividiere die gegebene Zahl a durch die nächstkleinere Zahl b_1 (der linken Seite der Tabelle), den erhaltenen Quotient q_1 wiederum durch die nächstkleinere Zahl b_2, den neuen Quotient q_2

durch die nächstkleinere Zahl b_3 u. s. w., bis man den Quotient 1 erhält. Ist nun $lg\, b_1 = c_1$, eben so $lg\, b_2 = c_2$ u. s. w., so ist

$$lg\, a = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots\ldots \text{(A)}$$

Beweis. Der Kürze wegen sei schon der 5. Quotient $= 1$ und es sei:

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & a : b_1 = q_1 \\ \text{II.} & q_1 : b_2 = q_2 \\ \text{III.} & q_2 : b_3 = q_3 \\ \text{IV.} & q_3 : b_4 = q_4 \\ \text{V.} & q_4 : b_5 = 1. \end{array}$$

Aus V folgt $q_4 = b_5 \cdot 1 = b_5$

aus IV: $q_3 = b_4\, q_4 = b_4 b_5$ (s. vorhergehende Zeile),

" III: $q_2 = b_3\, q_3 = b_3 b_4 b_5$,

" II: $q_1 = b_2\, q_2 = b_2 b_3 b_4 b_5$,

" I: $a = b_1\, q_1 = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5$.

Folglich ist $lg\, a = lg\, b_1 + lg\, b_2 + lg\, b_3 + lg\, b_4 + lg\, b_5$, d. i.

$$lg\, a = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5.$$

Beispiel. Es sei $lg\, vulg\, 7$ auf 7 Decimalstellen zu berechnen.

Das nächstkleinere b der Tabelle in bezug auf den gegebenen Num. 7 ist $6{,}8129\ldots = b$, und zwar:

$$lg\, vulg\, 6{,}81292\ldots = 0{,}833333\ldots = c_1.$$

Nun ist $7 : 6{,}8129206906 = 1{,}0274594873$.

Das nächstkleinere b in bezug auf diesen Quotient $1{,}0274\ldots$ ist $1{,}024275\ldots = b_2$ und zwar:

$$lg\, vulg\, 1{,}024275\ldots = 0{,}0104166 = c_2.$$

Man erhält:

$$1{,}0274594873 : 1{,}0242752214 = 1{,}0031087991.$$

Ferner:

$$1{,}0031087991 : 1{,}0030026566 = 1{,}0001058247,$$
$$[c_3 = 0{,}0013020833];$$
$$1{,}0001058247 : 1{,}0000936968 = 1{,}0000121268,$$
$$[c_4 = 0{,}0000406901];$$
$$1{,}0000121268 : 1{,}0000117116 = 1{,}0000004152,$$
$$[c_5 = 0{,}0000050863];$$
$$1{,}0000004152 : 1{,}0000003660 = 1{,}0000000492,$$
$$[c_6 = 0{,}0000001589];$$

$$1{,}0000000492 : 1{,}0000000457 = 1{,}0000000035,$$
$$[c_7 = 0{,}0000000199];$$
$$1{,}0000000035 : 1{,}0000000029 = 1{,}0000000006,$$
$$[c_8 = 0{,}0000000012].$$

Da dieser letzte Quotient nahe $= 1$, das zugehörige c (c_8!) erst in der 9. Decimalstelle, voraussichtlich also das folgende c (c_9) erst in der 10. Decimalstelle abweicht, so wird

$$lg\, 7 = c_1 + c_2 + \ldots + c_8 \text{ (s. ob. A)}$$

offenbar auf 7 Decimalstellen richtig kommen.

$$\begin{aligned}
c_1 &= 0{,}83333\ 33333 \\
c_2 &= 0{,}01041\ 66667 \\
c_3 &= \phantom{0{,}0}130\ 20833 \\
c_4 &= \phantom{0{,}000}4\ 06901 \\
c_5 &= \phantom{0{,}0000\ }50863 \\
c_6 &= \phantom{0{,}0000\ }01589 \\
c_7 &= \phantom{0{,}0000\ }00199 \\
c_8 &= \phantom{0{,}0000\ }00012 \\
\hline
lg\, 7 &= 0{,}84509\ 80.
\end{aligned}$$

Anmerkung. Andere Methoden, die man an dieser Stelle giebt und sich nicht auf die jetzt noch nicht auffindbare Reihe

$$lg(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \ldots$$

gründen, stehen der hier gegebenen in jeder Beziehung nach. Die Methode von Kramp, welche man häufig angegeben findet, erfordert eine Tabelle der Werte $10^{0,9}$, $10^{0,8}$ bis $10^{0,1}$, $10^{0,09}$ bis $10^{0,01}$ u. s. w., deren Berechnung aber nur mit jener Reihe möglich und dann noch sehr zusammengesetzt ist. Auch ist die Berechnung eines Log. mittelst der Kramp'schen Tabelle weit mühsamer als durch die vorstehend gegebene Methode.

15. Umkehrung: $^d lg\, a + {}^d lg\, b = {}^d lg\, ab$,
insbesondere: $lg\, vulg\ a + lg\, vulg\ b = lg\, vulg\ ab$.

Beispiele. $lg\, 3 + lg\, 5 + lg\, 7 = lg\,(3 \cdot 5 \cdot 7) = lg\, 105$;

$$lg\,(a+1) + lg\,(a-1) + lg\,(a^2+1) = lg\,[(a+1)(a-1)(a^2+1)]$$
$$= lg\,(a^4 - 1).$$

16. $^d lg \dfrac{a}{b} = {}^d lg\, a - {}^d lg\, b$.

Für jede Basis (d) ist der Log. eines Quotient = der Differenz aus dem Log. des Dividend und dem Log. des Divisor.

Beweis.

$$\text{Bas.}^{\text{Log.}} = d^{\,{}^d lg\, a - {}^d lg\, b} = \frac{d^{\,{}^d lg\, a}}{d^{\,{}^d lg\, b}} \text{ (s. §. 57, 6)} = \frac{a}{b} = \text{Num.}$$

1. Zusatz. Daher auch ${}^{10}lg\,\frac{a}{b} = {}^{10}lg\,a - {}^{10}lg\,b$, d. i.

$$\text{✵}\quad lg\ vulg\ \frac{a}{b} = lg\ vulg\ a - lg\ vulg\ b.$$

Beispiele.

$$lg\ vulg\ 1\tfrac{3}{8} = lg\ vulg\ \frac{11}{8} = lg\ vulg\ 11 - lg\ vulg\ 8$$

oder $lg\ vulg\ 1{,}375 = 1{,}0413927 - 0{,}9030900 = 0{,}1383027.$

$$lg\,\frac{ab}{cd} = lg\,(ab) - lg\,(cd) = lg\,a + lg\,b - (lg\,c + lg\,d).$$

2. Zusatz.

$a = 1$ giebt ${}^d lg\,\frac{1}{b} = {}^d lg\,1 - {}^d lg\,b$, d. i. (s. 6. Satz, 1. Zus.)

$$\text{✵}\quad {}^d lg\,\frac{1}{b} = -\,{}^d lg\,b.$$

Beispiel. ${}^{10}lg\,\frac{1}{14} = -\,{}^{10}lg\,14.$

3. Zusatz. Setzt man im vorstehenden Zusatze $b = \frac{c}{a}$, so erhält man:

$$\text{✵}\quad {}^d lg\,\frac{a}{c} = -\,{}^d lg\,\frac{c}{a}.$$

Nimmt man also den Numerus reciprok, so erhält der Logarithmus das entgegengesetzte Zeichen.

Beispiel. $lg\ vulg\ \frac{4}{7} = -\,lg\ vulg\ \frac{7}{4} = -\,lg\ vulg\ 1{,}75.$

17. Umkehrung: ${}^d lg\,a - {}^d lg\,b = {}^d lg\,\frac{a}{b}$,

inbesondere: $lg\ vulg\ a - lg\ vulg\ b = lg\ vulg\ \frac{a}{b}$.

Beispiele. $lg\,13 - lg\,5 = lg\,\frac{13}{5} = lg\,2{,}6.$

$$lg\,a - lg\,b - lg\,c = lg\,a - (lg\,b + lg\,c) = lg\,a - lg\,(bc)$$
$$= lg\,\frac{a}{bc}.$$

$$lg\,(a+1) - lg\,(a-1) = lg\,\frac{a+1}{a-1}.$$

18. $^{d}lg\,a^n = n \cdot {}^{d}lg\,a.$

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponent und dem Logarithmus der Basis.

Beweis. $\text{Bas.}^{\text{Log.}} = d^{n \cdot {}^{d}lg\,a} = \left(d^{{}^{d}lg\,a}\right)^n$ [s. §. 57, 10] $= a^n = \text{Num.}$

1. Zusatz. Folglich auch $^{10}lg\,a^n = n \cdot {}^{10}lg\,a$, d. i.

$$\text{✵}\; lg\;vulg\;a^n = n \cdot lg\;vulg\;a.$$

Beispiele.

$lg\;vulg\;3^{100} = 100 \cdot lg\;vulg\;3 = 100 \cdot 0{,}4771213 = 47{,}71213.$

$lg\left(\frac{a}{b}\right)^n = n\,lg\,\frac{a}{b} = n\,(lg\,a - lg\,b).$

2. Zusatz. $lg\left(-a^n\right) = lg\left[a^n\,(-1)\right] = lg\left(a^n\right) + lg\,(-1)$
$= n\,lg\,a + (2n+1)\,y$ [s. 14. Satz, 2. Zus.].

19. Umkehrung: $n\,{}^{d}lg\,a = {}^{d}lg\,a^n.$

Beispiele. $n\;lg\;vulg\;a = lg\;vulg\;a^n.$

$3\,lg\,x = lg\left(x^3\right);\; -5\,lg\,4 = lg\left(4^{-5}\right) = lg\,\frac{1}{4^5} = lg\,\frac{1}{1024}.$

20. $^{d}lg\,\sqrt[n]{a} = \frac{{}^{d}lg\,a}{n}.$

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus der Wurzelbasis dividiert durch den Wurzelexponent.

Beweis. $\text{Bas.}^{\text{Log.}} = d^{\frac{{}^{d}lg\,a}{n}} = \sqrt[n]{d^{{}^{d}lg\,a}}$ [s. §. 69, 20] $= \sqrt[n]{a}$
$= \text{Num.}$

1. Zusatz. $^{10}lg\,\sqrt[n]{a} = \frac{{}^{10}lg\,a}{n}$ oder

$$\text{✵}\; lg\;vulg\;\sqrt[n]{a} = \frac{lg\;vulg\;a}{n}.$$

Beispiele.

$lg\,\sqrt{67} = lg\,\sqrt[2]{67} = \frac{lg\,67}{2} = \frac{1{,}8260748}{2} = 0{,}9130374.$

$lg\,\sqrt[3]{1\tfrac{5}{14}} = lg\,\sqrt[3]{\frac{19}{14}} = \frac{lg\,\frac{19}{14}}{3} = \frac{lg\,19 - lg\,14}{3}.$

2. Zusatz. $lg \sqrt[n]{a^r} = \frac{lg(a^r)}{n} = \frac{r\, lg\, a}{n}$.

Beispiele. $lg \sqrt[13]{9876^4} = \frac{4\, lg\, 9876}{13}$.

$$lg \sqrt[n]{\frac{a}{bc^r}} = \frac{lg \frac{a}{bc^r}}{n} = \frac{lg\, a - lg(bc^r)}{n} = \frac{lg\, a - [lg\, b + lg(c^r)]}{n}$$
$$= \frac{lg\, a - lg\, b - r\, lg\, c}{n}.$$

21. Umkehrung: $\frac{{}^d lg\, a}{n} = {}^d lg \sqrt[n]{a}$.

Beispiel. $\frac{lg\, 64}{3} = lg \sqrt[3]{64} = lg\, 4$.

22. Die vulgären Logarithmen.

Von jetzt an beschäftigen wir uns nur noch mit den Logarithmen, deren Basis $= 10$, da diese vulgären (oder gemeinen, dekadischen, briggs'schen) Logarithmen allein ein bequemes Rechnen zulassen und darum auch allein im Gebrauch sind.

I. Nur die vulgären Logarithmen der ganzzahligen Potenzen von 10, also $lg\, 1$, $lg\, 10$, $lg\, 100 \ldots$, $lg \frac{1}{10}$, $lg \frac{1}{100} \ldots$, sind rationale Zahlen (s. 6. Satz, 3. Zus.). Die Logarithmen aller übrigen ganzen Zahlen sind irrational, der zugehörige Decimalbruch also unendlich und unperiodisch (vergl. §. 45, 6 u. 7).

Beweis. Wäre $lg\, n = \frac{a}{b}$, d. i. ${}^{10}lg\, n = \frac{a}{b}$ und $\frac{a}{b}$ ein irreducibler, gemeiner Bruch, so müſste $10^{\frac{a}{b}} = n$ (s. 4. Satz), daher auch $\left(10^{\frac{a}{b}}\right)^b = n^b$ (s. §. 15, 7), d. i. $10^a = n^b$ oder $(2 \cdot 5)^a = n^b$ oder
$$2^a \cdot 5^a = n^b$$
sein und mithin wäre a durch b teilbar (s. §. 68, 17), was gegen die Voraussetzung.

II. Da die Decimalbrüche der Logarithmen doch nur mit einer bestimmten Anzahl von Stellen benutzt werden können, so sind dieselben in den vorhandenen logarithmischen Tafeln ohne Ausnahme abgebrochene. Man hat daher beim Rechnen mit Logarithmen stets zu berücksichtigen, daſs die in den Tafeln ent-

haltenen Decimalbrüche nie vollkommen genau sind, vielmehr nahe um eine halbe Einheit der letzten Stelle zu grofs oder zu klein sein können.

Anstatt $lg\,2 = 0{,}30102\ 99956\ 63981\ 19521\ 37\ldots$
$lg\,3 = 0{,}47712\ 12547\ 19662\ 43729\ 50\ldots$

finden wir daher in den 7stelligen Logarithmentafeln:

$$lg\,2 = 0{,}3010300;\ lg\,3 = 0{,}4771213.$$

III. Die besten 7stelligen Tafeln sind die von Bruhns (2. Aufl.). Alle übrigen — Vega (geb. 1756, ermordet 1802, log. Tafeln 1783), Taylor, Callet, Bagay, Hutton, Bremiker, Hülfse, Schrön, Köhler, Shertred u. s. w. — stehen diesen hinsichtlich des bequemen Gebrauchs, der übersichtlichen Anordnung und Vollständigkeit bei weitem nach. In den Callet'schen Tafeln findet man aufserdem die vulgären Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1100 und 999980 bis 1000021 auf 61 Decimalstellen. Die verbreitetsten 5stelligen Logarithmen sind die von Schlömilch und Wittstein. Der umfangreiche „*Thesaurus logarithmorum completus*" von Vega enthält die Logarithmen der absoluten Zahlen und der trigonometrischen Funktionen auf 10 Decimalstellen, jedoch ist die 10. Decimalstelle nicht immer ganz richtig.

Obgleich 5- (oder 6-) stellige Logarithmen im allgemeinen ausreichen und für den Schüler ihres geringern Umfanges wegen besonders handlich sind, benutzen wir dennoch die 7stelligen von Bruhns, da jene in gewissen Fällen (Rentenrechnungen u. s. w.) ein zu ungenaues Resultat geben. Auch findet man die ersten 5 Ziffern eines Resultats in den 7stelligen Logarithmen unmittelbar, während die 5stelligen hierzu erst noch besondere Zwischenrechnungen nötig machen.

Ferner ist die Einrichtung der 7stelligen eine derartige, dafs man trotz der gröfsern Umfänglichkeit in denselben weit schneller einen Logarithmus auffindet, als in den 5stelligen. Endlich rechnet der an 7stellige Logarithmen Gewöhnte mit derselben Leichtigkeit mit 5- und 6stelligen, nicht aber umgekehrt.

IV. Beim Logarithmus unterscheidet man die Ganzen und den Decimalbruch. Jene nennt man Kennziffer oder Charakteristik, letzteren Mantisse (im Lateinischen: *mantissa*, die Zugabe).

In $$lg\,300 = 2{,}4771213$$

ist 300 der Numerus, 2,4771213 der Logarithmus, 2 (die Ganzen des Log.) die Kennziffer, 4771213 die Mantisse.

23. Die Logarithmen der Numeri, welche gröfser als 1 sind.

Der Gebrauch der Logarithmen erfordert zunächst die nachstehenden 3 Fundamentalsätze:

I. **Die Logarithmen derjenigen Numeri, welche ohne Rücksicht auf die Stellung des Komma aus gleichen Ziffern bestehen, haben gleiche Mantissen.**

1.—3. Beispiel. $lg\,3{,}1416 = 0{,}4971509.$
$lg\,314{,}16 = 2{,}4971509.$
$lg\,31416000 = 7{,}4971509.$

Der Numerus besteht hier überall aus den Ziffern

3141600000 . . .,

die Mantisse ist überall 4971509.

II. **Bestehen die Ganzen des Numerus aus n Stellen, so ist die Kennziffer des zugehörigen Logarithmus $n-1$.**

Im vorstehenden 1. Beispiele bestehen die Ganzen aus einer Ziffer, die Kennziffer ist daher $= \mathbf{1} - 1 = 0$.

Die Ganzen des 2. Beispiels bestehen aus 3 Ziffern, die Kennziffer $= \mathbf{3} - 1 = 2$.

Die Ganzen des 3. Beispiels bestehen aus 8 Ziffern, die Kennziffer $= \mathbf{8} - 1 = 7$.

4. Beispiel. $lg\,5678{,}9$? Die Tafeln geben, wie weiter unten gezeigt werden soll, für den aus den Ziffern 56789 bestehenden Numerus die Mantisse 7542642. Da ferner die Ganzen aus 4 Ziffern, nämlich 5678, bestehen, so ist die Kennziffer nach unserm II. Satze: $\mathbf{4} - 1 = 3$, folglich:

$$lg\,5678{,}9 = \mathbf{3}{,}7542642.$$

5. Beispiel. $lg\,1{,}2$? Die Tafeln geben für den aus den Ziffern 12 bestehenden Numerus die Mantisse 0791812. Da die Ganzen der Zahl 1,2 aus einer Ziffer bestehen, so ist die Kennziffer $\mathbf{1} - 1 = \mathbf{0}$, daher: $lg\,1{,}2 = \mathbf{0}{,}0791812.$

6. Beispiel. $lg\,234900000000$? Die Tafeln geben für den aus den Ziffern 2349 bestehenden Numerus die Mantisse 3708830. Die Ganzen des gegebenen Numerus bestehen aus **12** Ziffern, folglich ist die Kennziffer $\mathbf{12} - 1 = 11$. Daher:

$$lg\,234900000000 = 11{,}3708830.$$

III. **Ist umgekehrt die Kennziffer eines Logarithmus $= k$, so sind die Ganzen des zugehörigen Numerus $k+1$ stellig.**

Im 2. Beispiele unter I ist die Kennziffer (s. die rechte Seite der Gleichung) $= \mathbf{2}$, daher müssen die Ganzen des Numerus aus $\mathbf{2} + 1 = 3$ Stellen bestehen (s. 314 der linken Seite).

Im 6. Beispiele unter II ist die Kennziffer **11**, daher bestehen die Ganzen des Numerus (s. die linke Seite) aus $\mathbf{11} + 1 = 12$ Stellen.

Ist mithin in der Gleichung $lg\,x = 1{,}4971509$ der Numerus x zu bestimmen, so sucht man nach dem 25. Satze zuerst in den Tafeln die Ziffern des Numerus, welche der Mantisse 4971509 angehören. Man findet 31416. Da nun die Kennziffer **1** ist (siehe **1**,4971509), so mufs der gesuchte Numerus x nach Satz III: **1** + 1 = 2 stellig sein. Daher $x = 31{,}416$.

Ist y aus $lg\,y = 0{,}8805850$ zu suchen, so findet man zunächst 7596 als Ziffern des Numerus, dessen Mantisse 8805850. Da nun die Kennziffer **0** ist (s. **0**,8805850), so ist der gesuchte Numerus y: **0** + 1 = 1 stellig. Daher $y = 7{,}596$.

Ist z aus $lg\,z = 6{,}9169800$ zu bestimmen, so findet man zunächst 826 als Ziffern des Numerus, dessen Mantisse 9169800. Wäre nun die Kennziffer nicht 6, sondern 0, so müfsten die Ganzen des Numerus 1stellig sein, der Numerus also

$$8{,}26 = 8{,}26000\ldots$$

Bei 1 als Kennziffer wäre der Numerus 2stellig, der Numerus also $82{,}6 = 82{,}6000\ldots$

Bei 2 als Kennziffer wäre der Numerus 3stellig, der Numerus also $826 = 826{,}000\ldots$

Gegeben ist die Kennziffer **6**, folglich mufs der Numerus **6** + 1, d. i. 7stellig sein. Mithin:

$$z = 8260000{,}00\ldots = 8260000.$$

Die fehlenden Stellen sind mithin durch Nullen zu ergänzen.

Beweis für die Sätze I, II und III. $lg\,3{,}1416$ ist gröfser als $lg\,1 = 0$ und kleiner als $lg\,10 = 1$, folglich ist jener Logarithmus = 0 Ganze mit einem Decimalbruche. Es sei daher:

$$lg\,3{,}1416 = 0{,}4971509.$$

Nun ist $lg(10 \cdot 3{,}1416) = lg\,10 + lg\,3{,}1416$ (s. 14. Satz),

d. i. $lg\,31{,}416 = 1 + 0{,}4971509$

oder $lg\,31{,}416 = 1{,}4971509$.

Der Numerus ist hier 2stellig, die Kennziffer 1.

Ferner $lg(10^2 \cdot 3{,}1416) = lg(10^2) + lg\,3{,}1416$

d. i. $lg(100 \cdot 3{,}1416) = 2\,lg\,10 + lg\,3{,}1416$ (s. 18. Satz),

oder $lg\,314{,}16 = 2 \cdot 1 + 0{,}4971509$

$= 2{,}4971509$.

Der Numerus ist 3stellig, die Kennziffer 2.

Eben so $lg(10^3 \cdot 3{,}1416) = lg(10^3) + lg\,3{,}1416$.

d. i. $lg(1000 \cdot 3{,}1416) = 3\,lg\,10 + 0{,}4971509$,

oder $lg\,3141{,}6 = 3 \cdot 1 + 0{,}4971509$

$= 3{,}4971509$.

Der Numerus ist 4stellig, die Kennziffer 3.

Allgemein:

$$\begin{aligned} lg(10^k \cdot 3{,}1416) &= lg\,10^k + lg\,3{,}1416 \\ &= k \cdot lg\,10 + 0{,}497\ldots \\ &= k \cdot 1 + 0{,}497\ldots \\ &= k + 0{,}4971509. \end{aligned}$$

Da k eine ganze Zahl ist, so rückt im Numerus (in der Zahl $10^k \cdot 3{,}1416$) das Komma k Stellen nach rechts. Die Ganzen, die zuerst **1**stellig waren (**3**,1416) werden hierdurch $k+1$ stellig. Zugleich erhält der Logarithmus (siehe $k + 0{,}497\ldots$ der rechten Seite) die ganze Zahl $k + 0 = k$ als Kennziffer, während sich die Mantisse 4971509 nicht ändert.

Ist also der Numerus $k+1$ stellig, so ist die Kennziffer k. Setzt man hier $k = n - 1$, so ergiebt sich:

> Ist der Numerus $(n-1)+1$, d. i. $n$stellig, so ist die Kennziffer $n - 1$.

Zusatz. Den vorstehenden Sätzen zufolge ist es nicht nötig, dafs die logarithmischen Tafeln die Numeri (natürlichen Zahlen) von 1 an bis zu einer sehr grofsen Zahl und hierzu die vollständigen Logarithmen mit der Kennziffer enthalten, vielmehr genügt eine Tafel, welche die Numeri z. B. nur von 10000 bis 100000 nebst den Mantissen der zugehörigen Logarithmen ohne die Kennziffern enthält.

Diese Tafel würde also bei 7stelligen Mantissen aus folgenden Zahlen bestehen:

Numerus	Log. (Mantisse)		Numerus	Log. (Mantisse)
10000	0000000		99995	9999783
10001	0000434		99996	9999826
10002	0000869	bis	99997	9999870
10003	0001303		99998	9999913
10004	0001737		99999	9999957
10005	0002171		100000	0000000

In dieser Tafel würde nun nicht blofs $lg\,10005 = 4{,}0002171$, sondern auch:

$$\begin{aligned} lg\,100{,}05 &= 2{,}0002171 \\ lg\,1{,}0005 &= 0{,}0002171 \\ lg\,1000.5 &= 4{,}0002171 \\ lg\,10005000 &= 7{,}0002171 \end{aligned}$$

enthalten sein, weil nach I und II der Mantisse 0002171 die Kennziffer leicht hinzugefügt werden kann.

Umgekehrt würde man zu der gegebenen Mantisse 0002171 als Ziffern des zugehörigen Numerus 10005 finden. Wäre daher $lg\,x = 1{,}0002171$ gegeben, so müfsten die Ganzen des Numerus x

wegen der Kennziffer **1** : **2** stellig sein und man hätte mithin in derselben Tafel auch $x = 10{,}005$ gefunden.

24. Die Logarithmen der echten Brüche (der Numeri, welche kleiner als 1 sind).

I. Die Logarithmen echter Brüche sind, wie im 4. Zusatze des 6. Satzes gezeigt worden ist, negativ.

Beispiele. $lg\frac{1}{16} = -lg\,16$ (s. 16. Satz, 2. Zus.) . . . . . (Y)

d. i. $lg\,0{,}0625 = -1{,}2041200$ (s. 23. Satz) . . . . (Z).

$lg\frac{43}{271} = lg\,43 - lg\,271$ (s. 16. Satz)

$= 1{,}6334685 - 2{,}4329693 = -0{,}7995008.$

Nach dem 23. Satze sind die Mantissen von $lg\,6250$, $lg\,625$, $lg\,62{,}5$, $lg\,6{,}25$ unveränderlich $= 7998800$ und umgekehrt giebt die in den Tafeln aufgesuchte Mantisse 7998800 für den Numerus die Ziffern 625. Die in den Tafeln enthaltene Mantisse 2041200 (s. Z) würde für den Numerus nur die Ziffern 16, nicht aber 625 geben, und darum eignet sich die negative Mantisse, wie sie in der Form Z auftritt, nicht für das praktische Rechnen. Setzt man jedoch

$$lg\,0{,}625 = lg\frac{6{,}25}{100} = lg\,6{,}25 - lg\,100 \text{ (s. 16. Satz)} = 0{,}7998800 - 2,$$

so ergiebt sich für einen solchen echten Bruch, sobald er nur dieselben Ziffern 625 enthält, die positive Mantisse 7998800, ganz wie bei den Logarithmen im 23. Satze, und umgekehrt würde die positive Mantisse 7998800 unmittelbar zu jenem Numerus 0,0625 führen.

Hieraus folgt, dafs

> der Logarithmus eines echten Bruches von der Form eines Decimalbruchs am besten gleich einer Differenz gesetzt wird, bei welcher der positive Teil (der Minuend) die Mantisse enthält, die mit derjenigen eines Logarithmus übereinstimmt, dessen Numerus gröfser als 1 ist und aus denselben Ziffern besteht, wie jener Decimalbruch, der negative Teil (der Subtrahend) aber eine ganze Zahl ist.

$lg\,0{,}31416$, $lg\,0{,}000031416$ erhalten somit dieselbe Mantisse 4971509, wie wir sie für $lg\,3{,}1416$ oder $lg\,3141{,}6$ u. s. w. im 23. Satze fanden.

Bei einer solchen Differenz als Logarithmus eines echten Bruches unterscheidet man die positive Kennziffer, welche mit der Mantisse verbunden ist und die negative Kennziffer, die den Subtrahend bildet. In $lg\,0{,}0625 = 0{,}7998800 - 2$ ist demnach 0,0625 der Numerus, $0{,}7998800 - 2$ der Logarithmus, 7998800 die

Mantisse, die vor derselben stehende 0 die positive Kennziffer, die Zahl 2 (nach der Mantisse) die negative Kennziffer.

II. Für die Logarithmen echter Brüche (Decimalbrüche) existieren 2 verschiedene Formen, die sich nur hinsichtlich der positiven und negativen Kennziffern unterscheiden.

1. Form. Die positive Kennziffer ist unveränderlich 0. Die zugehörige Mantisse ist gleich der Mantisse eines aus denselben Ziffern bestehenden Numerus, der gröfser als 1 ist (s. 23. Satz). Die negative Kennziffer ist $-n$, wenn der Numerus in der n^{ten} Decimalstelle beginnt.

Beispiele. *lg* 0,00031416? Die positive Kennziffer ist = 0. Die Mantisse ist die des *lg* 3,1416 oder *lg* 31,416 u. s. w., also = 4971509. Die negative Kennziffer ist — 4, weil der gegebene Numerus in der 4. Decimalstelle beginnt. Daher:

$$lg\ 0{,}00031416 = 0{,}4971509 - 4.$$

lg 0,6? Die positive Kennziffer = 0. Die Mantisse ist die des *lg* 6 oder *lg* 60 u. s. w., also = 7781513. Die negative Kennziffer ist — 1, weil der Numerus in der 1. Decimalstelle beginnt. Daher *lg* 0,6 = 0,7781513 — 1.

lg 0,0000000000013579? Die Mantisse von *lg* 1,3579 oder *lg* 13,579 u. s. w. ist = 1328678. Die negative Kennziffer = — 13, weil der Numerus in der 13. Decimalstelle beginnt. Daher:

$$lg\ 0{,}0000000000013579 = 0{,}1328678 - 13.$$

Anmerkung. Manche kürzen die Logarithmen 0,4971509 — 4; 0,7781513 — 1 unpassender Weise mit $\overline{4}$,4971509; $\overline{1}$,7781513 ab.

2. Form. Die Mantisse ist die der 1. Form (also auch die des 23. Satzes). Die negative Kennziffer ist unveränderlich — 10. Die positive Kennziffer ist 10 — n, wenn der Numerus in der n^{ten} Decimalstelle beginnt, oder speciell:

Beginnt der Num. in der 1. Decimalst., so ist die pos. Kennz. 9,
" " " " " 2. " " " " " " 8,
" " " " " 3. " " " " " " 7
u. s. w.

Man zähle daher von der 1. Decimalstelle an mit 9, 8, 7 . . . rückwärts und benutze die Zahl als pos. Kennziffer, bei welcher der Numerus beginnt.

Beispiele.

	(Zählziffern)	
lg 0,00031416	9 8 7 6	= 6,4971509 — 10;
lg 0,7	9	= 9,8450980 — 10;
lg 0,0000013579	9 8 7 6 5 4	= 4,1328678 — 10;
lg 0,00456	9 8 7	= 7,6589648 — 10;
lg 0,0000000567	9 8 7 6 5 4 3 2	= 2,7535831 — 10.

Wir rechnen vorzugsweise mit dieser 2. Form, da dieselbe ein weit bequemeres Rechnen zuläſst als jene erste. Sie kann zwar nicht benutzt werden, wenn der Numerus in der 11. oder einer spätern Decimalstelle beginnt, jedoch kommen solche Numeri in der Praxis nicht vor.

Beweis. $lg\,3{,}1416 = 0{,}4971509$ (s. den Beweis im 23. Satze),

$$lg\,(3{,}1416:10) = lg\,3{,}1416 - lg\,10 \text{ (s. 16. Satz), d. i.}$$
$$lg\,0{,}31416 = 0{,}4971509 - 1 \text{ (1. Form!)}$$
$$= 9 + 0{,}4971509 - 1 - 9$$
$$= 9{,}4971509 - 10 \text{ (2. Form!)}$$
$$lg\,(3{,}1416:100) = lg\,3{,}1416 - lg\,100, \text{ d. i.}$$
$$lg\,0{,}031416 = 0{,}4971509 - 2 \text{ (1. Form!)}$$
$$= 8 + 0{,}4971509 - 2 - 8$$
$$= 8{,}4971509 - 10 \text{ (2. Form!)}$$

u. s. w.

III. a. Hat umgekehrt $lg\,x$ die Form $0, \ldots . - n$ (1. Form), so beginnt der Numerus x in der n^{ten} Decimalstelle.

Beispiele. $lg\,x = 0{,}3763944 - 5$. Die Mantisse 376 ... giebt für den Numerus die Ziffern 2379. Die negative Kennziffer 5 sagt uns, daſs der Numerus x in der 5. Decimalstelle beginnt. Daher:

$$x = 0{,}00002379.$$

$lg\,y = 0{,}8318698 - 2$. Die Mantisse 831 ... giebt für den Numerus die Ziffern 679. Der Numerus y beginnt in der 2. Decimalstelle, da die negative Kennziffer $= -2$. Folglich:

$$y = 0{,}0679.$$

$lg\,z = 0{,}6674623 - 11$. Die Mantisse 667 ... giebt für den Numerus die Ziffern 46501. Der Num. z beginnt in der 11. Decimalstelle, weil die negative Kennziffer $= -11$. Daher:

$$z = 0{,}000000000046501.$$

b. Ist k irgend eine 1stellige Zahl und hat $lg\,x$ die Form $k, \ldots . - 10$ (2. Form), so beginnt der Numerus in der $10 - k^{ten}$ Decimalstelle.

Bei $lg\,x = 9, \ldots - 10$ beginnt daher der Numerus x in der 1. Decimalstelle;
„ $lg\,y = 8, \ldots - 10$ beginnt er in der 2. Decimalst.,
„ $lg\,z = 7, \ldots - 10$ „ „ „ „ 3. „

u. s. w.

1. Beispiel. $lg\,x = 8{,}3763944 - 10$. Die Mantisse 376 ... giebt für den Numerus die Ziffern 2379. Da die positive Kennziffer 8 ist, so beginnt der Numerus x in der $10 - 8^{ten}$ oder 2. Decimalstelle. Daher $x = 0{,}02379$.

Besser ist es, auch hier von der 1. Decimalstelle des Numerus an mit 9, 8, 7 ... rückwärts zu zählen. Der Numerus beginnt alsdann bei der Zahl, die der positiven Kennziffer gleich ist. In bezug auf vorstehendes Beispiel ist wegen der positiven Kennziffer 8 rückwärts bis 8 zu zählen:

$$x = 0{,}\overset{9}{0}\overset{8}{.}\,;\ \text{daher}\ x = 0{,}02379.$$

2. Beispiel. $lg\,y = 6{,}7318304 - 10$.

Die Mantisse 731 ... giebt für den Numerus die Ziffern 5393.

Wegen der positiven Kennziffer 6: $y = 0{,}\overset{9\,8\,7\,6}{000\,.}$

$$\text{daher}\ y = 0{,}0005393.$$

3. Beispiel. $lg\,z = 9{,}6989700 - 10$. Die Mantisse 698 ... giebt für den Numerus die Ziffer 5, denn

$$lg\,5 = 0{,}6989700,\ lg\,50 = 1{,}6989700\ \text{u. s. w.}$$

Wegen der positiven Kennziffer 9 aber ist $z = 0{,}\overset{9}{.}$, folglich:

$$z = 0{,}5.$$

4. Beispiel. $lg\,u = 3{,}1461280 - 10$.

Die Mantisse 1461 ... giebt für den Numerus die Ziffern 14, folglich:

$$u = 0{,}\overset{9\,8\,7\,6\,5\,4\,3}{0000001}4.$$

IV. Dennoch kommt es zuweilen vor, dafs ein in der Differenzform vorhandener negativer Logarithmus in eine einzige negative Zahl verwandelt werden mufs. Wie man nun $3 - 11$ durch $-(11 - 3) = -8$ berechnet, so würde man auch:

$$lg\,x = 3{,}9220504 - 10\ \text{in}\ -(10 - 3{,}9220504) = -6{,}0779496,$$
$$lg\,y = 0{,}3189700 - 4\ \text{in}\ -(4 - 0{,}3189700) = -3{,}6810300$$

verwandeln.

Beispiel. $x = \dfrac{7}{lg\,0{,}3} = \dfrac{7}{9{,}4771213 - 10}$ (s. II, 2. Form).

Offenbar kann hier x nur mit

$$\frac{7}{-0{,}5228787} = -\frac{7}{0{,}5228787} = -13{,}38743$$

berechnet werden.

V. Tritt umgekehrt ein rein negativer Logarithmus auf, zu dem der Numerus gesucht werden soll, so ist derselbe zunächst in die Differenzform zu bringen und zwar:

a) in die 1. Form dadurch, dafs man die nächsthöhere ganze Zahl addiert und subtrahiert. Z. B.:

$$lg\,x = -3{,}0815612 = \underbrace{4 - 3{,}0814612} - 4$$
$$= 0{,}9185388 - 4;$$

b) in die 2. Form dadurch, dafs man $+10-10$ hinzugefügt. Z. B.:

$$lg\,x = -3{,}0814612 = \underbrace{10 - 3{,}0814612} - 10$$
$$= \quad 6{,}9185388 \quad -10.$$

Nun erst kann dieses x (beider Beispiele) bestimmt werden. Denn die Mantisse 9185388 in den Tafeln aufgesucht, giebt 82897 als Ziffern des Numerus. Daher $x = 0{,}00082897$ (s. III).

25. Einrichtung des logarithmischen Handbuchs von Bruhns. Aufsuchen der unmittelbar in demselben enthaltenen Zahlen (Logarithmen und Numeri).

I. Das Werk von Bruhns enthält (ebenso wie die meisten der übrigen 7stelligen Handbücher) die Logarithmen von 10000 bis 100000, von diesen aber nur die Mantissen, da die Kennziffern je nach der Stellung der Ziffern des Numerus leicht zu ergänzen sind (s. den Zus. des 23. Satzes).

Seite 2 bis 5 befinden sich die Mantissen der Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000. Seite 3, Zeile 1 findet man z. B. für $lg\,250$ die Mantisse 3979400. Diese Mantisse gehört aber auch allen Logarithmen an, deren Numeri durch Verschiebung des Komma in der Zahl 250 entstehen (s. 23. u. 24. Satz). Es ist also:

$lg\,250 = 2{,}3979400$;

$lg\,25 = 1{,}3979400$ (s. S. 2, Mitte der 1. Spalte);

$lg\,25000 = 4{,}3979400$;

$lg\,0{,}25 = 9{,}3979400 - 10$ (oder $0{,}3979400 - 1$) u. s. w.

II. Der aus 1 bis 5 Ziffern bestehende Numerus gegeben, der zugehörige Logarithmus gesucht.

a. Die Haupttafel, in welcher alle Numeri von mehr als 3 Stellen und alle gegebenen Logarithmen, resp. Mantissen, aufzusuchen sind, ist die von Seite 6 bis 185. Die ersten 4 Ziffern des Numerus sind in der mit N über- und unterschriebenen Spalte enthalten, die 5. Ziffer des Numerus rechts von N als Über- oder Unterschrift der übrigen 10 Spalten.

Den Numerus 48517 z. B. findet man S. 83 und zwar die ersten 4 Stellen 4851 in der 2. Zeile der N-Spalte, die 5. Stelle 7 rechts von N als Überschrift der drittletzten Spalte.

In der mit 0 überschriebenen Spalte befinden sich 3 abgesonderte Ziffern. Dies sind die 3 ersten Ziffern der Mantisse. Die in den mit 0, 1, 2 bis 9 überschriebenen Spalten befindlichen 4stelligen Zahlen sind die 4 letzten Ziffern (4. bis 7. Decimalstelle) der Mantisse. S. 59 findet man z. B.

in der 1. Zeile: $lg\,36500 = \cdot, 5622929$; $lg\,36501 = \cdot, 5623048$;
„ „ 2. „ $lg\,36510 = \cdot, 5624118$; $lg\,36519 = \cdot, 5625189$;

in der 6. Zeile: *lg* 36550 = ·, 5628874; *lg* 36556 = ·, 5629587;
„ „ 7. „ *lg* 36560 = ·, 5630062; *lg* 36561 = ·, 5630181.

Folglich ist:

lg 36,5 = 1,5622929;	*lg* 36561 = 4,5630181;
lg 0,0365 = 8,5622929 — 10;	*lg* 0,36561 = 9,5630181 — 10;
lg 3,65 = 0,5622929;	*lg* 365,61 = 2,5630181;
lg 3650000 = 6,5622929;	*lg* 0,000036561 = 5,5630181 — 10.

b. Um *lg* 9,2608 zu bestimmen, sucht man zunächst den Numerus und zwar in der N-Spalte die vier ersten Stellen 9260 auf. Dieselben finden sich S. 171, 11. Zeile. Da die 5. Stelle des gegebenen Numerus 8 ist, so sind die 4 Ziffern 6485, welche sich in der 8-Spalte und zugleich in jener 11. Zeile befinden, die 4 letzten Ziffern der gesuchten Mantisse. Die noch fehlenden 3 Stellen der Mantisse 966 findet man in der 1. Zeile der 0-Spalte.

Da ferner die Ganzen des gegebenen Numerus 1stellig sind, so ist die Kennziffer 0 und folglich *lg* 9,2608 = 0,9666485.

lg 0,0027163? Zunächst sind die Ziffern 2716 in der N-Spalte und die 5. Stelle 3 rechts von N aufzusuchen. 2716 findet sich S. 40, 17. Zeile. Die mit 3, der 5. Ziffer des gegebenen Numerus, überschriebene Spalte enthält in dieser Zeile die 4 letzten Ziffern 9777 der gesuchten Mantisse. Die ersten 433 findet man 5 Zeilen weiter oben in der 0-Spalte.

Da ferner der Numerus in der 3. Decimalstelle beginnt, so ist *lg* 0,0027163 = 7,4339777 — 10 oder 0,4339777 — 3.

1. Anmerkung. Um die Logarithmen schneller aufzufinden, berücksichtige man, dafs der Numerus auf der linken Seite aufzusuchen ist, wenn die 3. Ziffer < 5 ist (s. das letzte Beispiel 27**1**63), dagegen auf der rechten Seite, wenn die 3. Ziffer > 4 ist (s. das vorletzte Beispiel 92**6**08).

2. Anmerkung. Da die mit 4 und 5 überschriebenen Spalten durch einen stärkern Strich getrennt sind, so weifs man sofort, dafs z. B. die 2. Spalte nach dem starken Striche mit 6 überschrieben ist, ohne diese 6 in der Überschrift aufzusuchen.

3. Anmerkung. Die 5 letzten Zeilen jeder Seite unterhalb des 2. N (z. B. S. 83 unten die mit 48500″ beginnenden Zeilen) finden erst in der Trigonometrie Anwendung.

Noch einige Beispiele.

lg 0,7? Da *lg* 7000, *lg* 700, *lg* 70, *lg* 7, *lg* 0,7, *lg* 0,07 u. s. w. gleiche Mantissen haben, so findet man die zugehörige Mantisse

.. 8450980	auf S.	126,	1. Zeile;		
	ferner „	4,	1. „	letzte Spalte;	
	„ „	2,	21. „	2. Mantissenspalte;	
	und „	2,	8. „	1.	„

Daher *lg* 0,07 = 9,8450980 — 10.

lg 64,2? Entweder ist 64200 auf S. 114 in der 21. Zeile oder 642 S. 4 in der mittelsten Spalte aufzusuchen. Man findet

lg 64,2 = 1,8075350.

lg 0,010759? 7. Seite findet man genau in der Mitte der N-Spalte die Zahl 1075 und in derselben Zeile in der 9-Spalte (9 die letzte Stelle des Numerus) die Ziffern 7719 der Mantisse, 1 Zeile weiter oben in der 0-Spalte die Ziffern 031 der Mantisse. Daher *lg* 0,010759 = 8,0317719 — 10 oder 0,0317719 — 2.

c. S. 165 ist jede Mantisse um 49 oder 48 (Einheiten der 7. Decimalstelle) gröfser als die vorhergehende. (Diese Differenzen findet man in der letzten mit P. P. bezeichneten Spalte!) Z. B. in der 1. Zeile:

lg 89502 = ., 9518327
lg 89501 = ., 9518279
Differenz 48.

Auch *lg* 89537 ist um 48 gröfser als *lg* 89536. Da nun (siehe 4. Zeile) *lg* 89536 = ., 95**1**9977, so erhält man durch Addition von 48

lg 89537 = ., 95**2**0025.

Hieraus folgt, dafs von den 4 Ziffern $\overline{0}025$ an nicht die in der 0-Spalte weiter oben befindlichen Ziffern 951, sondern die in der folgenden Zeile verzeichneten 952 vorzusetzen sind.

Befindet sich mithin über der viertletzten Stelle der Mantisse ein horizontaler Strich, so sind die 3 ersten Stellen der Mantisse zwar auch in der 0-Spalte, aber in der folgenden Zeile aufzusuchen.

Beispiele.

S. 125, 1. Zeile: *lg* 6950200 = 6,84**1**9973,
dagegen: *lg* 69507 = 4,84**2**0285,
lg 69,503 = 1,84**2**0036.

S. 33, 6. Zeile: *lg* 2,3550 = 0,37**1**9909,
dagegen: *lg* 235,59 = 2,37**2**1569,
lg 0,23551 = 9,37**2**0094 — 10.

Anmerkung. Aufser dieser überstrichenen viertletzten Stelle findet man zuweilen in der letzten Stelle der Mantisse eine überstrichene 5, z. B. S. 83, 1. Zeile $795\overline{5}$ (4. bis 7. Decimalstelle des *lg* 48506). Diese $\overline{5}$ bedeutet, dafs der vollständigere Logarithmus in der 8. Decimalstelle eine Ziffer enthielt, die > 4 war, nämlich:

lg 48506 = ., 685795**4**6243 . . .

Dieser Decimalbruch auf 7 Stellen abgebrochen (s. §. 40), gab mithin für die Tafeln:

$$lg\ 48506 = .,685795\overline{5}.$$

In lg 48505 = ., 6857865 dagegen ist die 5 in der letzten (7.) Decimalstelle nicht überstrichen, weil der vollständigere Logarithmus in dieser Stelle schon 5 enthielt. Es ist nämlich:

lg 48505 = ., 6857865**0**892 . . ., daher auf

7 Stellen: lg 48505 = ., 6857865.

Diese Unterscheidung läfst stets ein richtiges Abbrechen der Mantisse auf weniger als 7 Stellen zu. Will man z. B. die Logarithmen 6stellig benutzen, so ist:

lg 48505 = ., 685787 }
lg 48506 = ., 685795 } Vergl. die 7stelligen Mantissen der Tafeln!

III. Der Logarithmus, dessen Mantisse unmittelbar in den Tafeln enthalten ist, sei gegeben, der zugehörige Numerus werde gesucht.

Die 3 ersten Ziffern der Mantisse sucht man in der 0-Spalte und rechts von diesen in den 4stelligen Zahlen die 4 letzten Stellen der Mantisse auf. Links von diesen letztern in der N-Spalte findet man die 4 ersten Stellen des Numerus. Die Ziffer, welche der jene 4 letzten Stellen der Mantisse enthaltenden Spalte überschrieben ist, bildet die 5. Stelle des gesuchten Numerus.

1. Beispiel. $lg\,x = 4{,}5986483$. Die Ziffern 598 der gegebenen Mantisse sind in der 0-Spalte aufzusuchen. Man findet sie S. 65, 14. Zeile. Da diese 598 aber für alle Logarithmen der 14. bis 22. Zeile gilt, so hat man noch die Ziffern 6483 der gegebenen Mantisse rechts von 598 in den 4stelligen Zahlen dieser 9 Zeilen aufzusuchen. Man findet sie in der 19. Zeile in der mit 7 überschriebenen Spalte. Diese 7 bildet mithin die 5. Ziffer des gesuchten Numerus. Links von jenen Ziffern 6483 findet man in der N-Spalte die ersten Stellen 3968 des Numerus. Wegen der Kennziffer 4 des gegebenen Logarithmus ist der Numerus eine 5stellige Zahl. Folglich $x = 39687$.

Wäre nicht jener Logarithmus, sondern $lg\,x = 6{,}5986483 - 10$ gegeben (die Mantisse dieselbe und nur die Kennziffer verschieden), so würde das Aufsuchen genau dasselbe gewesen sein und zu denselben 5 Ziffern 39687 des Numerus geführt haben, nur wäre der Kennziffern 6, . . . — 10 wegen $x = 0{,}00039687$.

2. Beispiel. $lg\,y = 0{,}5308909$. Seite 53 findet man in der 0-Spalte 12 Zeilen oberhalb des untern N die Ziffer 530 der gegebenen Mantisse, 6 Zeilen oberhalb desselben N in der mit 4 überschriebenen Spalte die letzten Stellen 8909. Diese 4 bildet mithin die 5. Stelle des Numerus, welcher die links von 8909 in der

N-Spalte befindliche Zahl 3395 vorzusetzen ist. Daher sind die Ziffern des Numerus 33954. Wegen der Kennziffer 0 ist

$$y = 3{,}3954.$$

3. Beispiel. $lg\,z = 7{,}6080123$. Die Ziffern 608 der gegebenen Mantisse in der 0-Spalte aufzusuchen. Man findet sie S. 67, Zeile 7. Diese Ziffern 608 gelten aber nicht blofs für die Logarithmen der Numeri 40560 bis 40644, sondern auch für die in der 6. Zeile befindlichen Logarithmen der Numeri 40551 bis 40559, denn bei diesen ist die viertletzte Stelle mit einem Striche versehen (s. II, b). Da nun schon $lg\,40560 = .,6080979$ gröfser als der gegebene Logarithmus 6080123 ist, so mufs offenbar der letztere schon in der Zeile vorher enthalten sein. Man findet auch wirklich $\bar{0}123$ in der 6. Zeile in der mit 2 überschriebenen Spalte. Diese 2 bildet mithin die 5. Stelle des Numerus. Links von $\bar{0}123$ in der N-Spalte trifft man auf die 4 ersten Stellen 4055. Der gesuchte Numerus hat mithin die Ziffern 40552. Der Kennziffer 7 wegen ist der Numerus 8stellig. Folglich $z = 40552000$.

4. Beispiel. $lg\,u = 9{,}4715851 - 10$. Seite 45, Zeile 13 findet sich für die gegebene Mantisse der Numerus 29620. Wegen $9, \ldots - 10$ beginnt der Numerus in der 1. Decimalstelle. Folglich $u = 0{,}29620$ oder $0{,}2962$.

5. Beispiel $lg\,v = 0{,}8790328 - 13$. Die hier gegebene Mantisse gehört dem Numerus 75689 (s. S. 137, Zeile 19) an, denn die Tafeln zeigen hier $\bar{0}328$ und folglich sind die Ziffern 879 der folgenden Zeile die zugehörigen 3 ersten Stellen der Mantisse. Wegen $0, \ldots - 13$ beginnt der Numerus in der 13. Decimalstelle, mithin ist $v = 0{,}000000000000075689$.

6. Beispiel. $lg\,w = 2{,}9030900$. S. 146, 1. Zeile, 0-Spalte giebt für den Numerus 80000; weil aber die Kennziffer 2 ist, so ist der Numerus 3stellig. Daher $w = 800{,}00 = 800$.

26. Der Numerus von mehr als 5 Stellen gegeben, der Logarithmus gesucht.

I. Gewisse Eigenschaften der Zahlenreihen mathematischer Tafeln.

a. Verändert man gegebene Zahlen nach einem bestimmten Gesetz, so nennt man jede hierdurch erhaltene Zahl eine Funktion der gegebenen Zahl. Bildet man z. B. von den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16 . . ., so ist die Quadratzahl 9 eine Funktion von 3, die Quadratzahl 49 eine Funktion von 7. Die Logarithmen sind mithin Funktionen der gegebenen Numeri, da sie aus den letztern nach dem Gesetze

$$lg\ nat\ (1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \dots \text{ oder}$$

$$lg\ vulg\ (1+a) = 0{,}43429448 \left(a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} \dots\right)$$

entstanden sind.

b. Finden gewisse Funktionen öfter Anwendung, so stellt man dieselben in einer Tafel den gegebenen Zahlen, aus welchen sie entstehen, gegenüber. Die in der 1. Spalte enthaltenen Zahlen. von welchen die in der 2. Spalte enthaltenen Funktionen gebildet sind, nennt man das Argument. Eine solche Tafel läfst sich vorzüglich dann bequem benutzen, wenn die Zahlen des Arguments in gleichen Differenzen fortschreiten. Z. B.:

Argum. x	Funktion $\sqrt{x}$
1	$\sqrt{1} = 1$
2	$\sqrt{2} = 1{,}41421$
3	$\sqrt{3} = 1{,}73205$
4	$\sqrt{4} = 2$
5	$\sqrt{5} = 2{,}23068$

u. s. w.

c. Die Differenzen der Funktionen können gleich und ungleich sein. Z. B.

A

Argument Réaumur	Funktion Celsius	Differenz der Funktion	
0^0	0		Gleiche Differenzen.
1^0	$1^0{,}25$	1,25	
2^0	2,50	1,25	
3^0	3,75	1,25	
4^0	5	1,25	

Argument Numerus	Funktion Mantisse	Differenz der Funktion	
20001	3010517		Gleiche Differenzen.
20002	3010734	217	
20003	3010951	217	
20004	3011168	217	

Argument	Funktion	Differenz der Funktion	
Numerus	Mantisse		
11	0414	378	Ungleiche Differenzen.
12	0792	347	
13	1139	322	
14	1461		

B

Berechnet man die Funktion $\sqrt{1+x}$, indem man für x der Reihe nach die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe setzt, so erhält man:

Argument	Funktion	Differenz der Funkt.
x	$\sqrt{1+x}$	
1	$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 1{,}4142$	0,3179
2	$\sqrt{1+2} = \sqrt{3} = 1{,}7321$	0,2679
3	$\sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2{,}0000$	0,2361
4	$\sqrt{1+4} = \sqrt{5} = 2{,}2361$	

A′

Setzt man in derselben Funktion für x die Werte 0,0001, 0,0002, 0,0003 u. s. w., so ergiebt sich:

Argument	Funktion	Differenz der Funkt.
x	$\sqrt{1+x}$	
0,0001	$\sqrt{1+0{,}0001} = 0{,}00005$	0,00005
0,0002	$\sqrt{1+0{,}0002} = 0{,}00010$	0,00005
0,0003	$\sqrt{1+0{,}0003} = 0{,}00015$	0,00005
0,0004	$\sqrt{1+0{,}0004} = 0{,}00020$	

B′

Obgleich sowohl in A und A′ als auch in B und B′ die Zahlen des Arguments in gleichen Differenzen fortschreiten, zeigen dennoch die Funktionen in B und A′ ungleiche, in A und B′ gleiche Differenzen.

Der Grund dieser Erscheinung läfst sich leicht einsehen, wenn man $\sqrt{1+x}$ nach §. 70, II, 4. Beisp. auflöst:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \cdots$$

Berechnet man $\sqrt{1+x}$ mittelst der vorstehenden Reihe und zwar mit $x = 0{,}0001$, 0,0002, 0,0003 u. s. w. auf 5 Decimalstellen, so erhält man:

Argument	Funktion	Differenz der Funkt.
x	$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots$	
0,0001	$1 + \frac{0{,}0001}{2} - \frac{0{,}00000001}{8} \ldots = 1{,}00005$	
		0,00005
0,0002	$1 + \frac{0{,}0002}{2} - \frac{0{,}00000004}{8} \ldots = 1{,}00010$	
		0,00005
0,0003	$1 + \frac{0{,}0003}{2} - \frac{0{,}00000009}{8} \ldots = 1{,}00015$	

Die Differenzen müssen hier gleich sein (vergl. oben B′), da die Werte von $-\frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \ldots$ keinen Einflufs auf die 5. Decimalstelle ausüben.

Berechnet man dagegen dieselbe Reihe mit $x = 1, 2, 3, \ldots$, so ergiebt sich:

Argument	Funktion
x	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \ldots$
1	$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$
2	$1 + \frac{2}{2} - \frac{4}{8} + \frac{8}{16} \ldots$
3	$1 + \frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{27}{16} \ldots$

Da hier die Glieder mit x^2, $x^3 \ldots$ nicht vernachlässigt werden können und diese selbst in ungleichen Differenzen fortschreiten $\left(\text{in bezug auf } x^2 \text{ z. B. } \frac{1}{8}, \frac{4}{8}, \frac{9}{8} \ldots\right)$, so müssen auch die Funktionen ungleiche Differenzen zeigen (s. oben A′).

Analoge Erscheinungen müssen aber auch bei den Logarithmen auftreten, denn es ist:

$$lg\,(10 + x) = lg\left[10\left(1 + \frac{x}{10}\right)\right] = lg\,10 + lg\left(1 + \frac{x}{10}\right)$$

$$= 1 + 0{,}43429448\ lg\ nat\left(1 + \frac{x}{10}\right)$$

(s. 11. Satz, 1. Zus.)

$$= 1 + 0{,}43429448\left[\frac{x}{10} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{10}\right)^3 \ldots\right]$$

(s. 1. Satz, Gleichung A)

$$= 1 + 0{,}043429\,x - 0{,}00217\,x^2 \ldots$$

Setzt man hier $x = 1, 2, 3 \ldots$, berechnet man also:

$$lg\,(10+1),\; lg\,(10+2),\; lg\,(10+3) \ldots, \text{ d. i.}$$
$$lg\,11, \quad lg\,12, \quad lg\,13 \ldots,$$

so können die Glieder mit x^2, $x^3 \ldots$ nicht vernachlässigt werden, da sie offenbar auf die 7. Decimalstelle von Einflufs sind. Aber schon das Glied $0{,}00217\,x^2$ bewirkt ungleiche Differenzen (siehe oben B), denn dasselbe wird mit $x = 1, 2, 3 \ldots$ der Reihe nach

$$0{,}00217 \cdot 1,\; 0{,}00217 \cdot 4,\; 0{,}00217 \cdot 9.$$

Zwischen der 1. und 2. dieser Zahlen ist die Differenz $= 0{,}00217 \cdot 3$, zwischen der 2. und 3. jedoch $= 0{,}00217 \cdot 5$.

Dagegen ist:

$$lg\,(20000 + x) = lg\left[20000\left(1 + \frac{x}{20000}\right)\right]$$
$$= lg\,20000 + lg\left(1 + \frac{x}{20000}\right)$$
$$= 4{,}3010300 + 0{,}434 \ldots lg\,nat\left(1 + \frac{x}{20000}\right)$$
$$= 4{,}3010300 + 0{,}434294\left[\frac{x}{20000} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{20000}\right)^2 + \ldots\right]$$
$$= 4{,}3010300 + 0{,}0000217147\,x - 0{,}00000000027\,x^2 + \ldots$$

Setzt man hier der Reihe nach $x = 1, 2, 3 \ldots$, berechnet man also

$$lg\,(20000+1),\; lg\,(20000+2),\; lg\,(20000+3) \ldots, \text{ d. i.}$$
$$lg\,20001, \quad lg\,20002, \quad lg\,20003 \ldots$$

so üben die Glieder mit x^2, $x^3 \ldots$ keinen Einflufs auf die 7. Decimalstelle aus. Es ist daher:

$$lg\,(20000 + x) = 4{,}3010300 + 0{,}000021715\,x.$$

Für $x = 1, 2, 3 \ldots$ erscheinen nun gleiche Differenzen, weil jeder Logarithmus um $0{,}000021715 \cdot 1$ gröfser als der vorhergehende werden mufs. (S. oben A).

Schreiten folglich (wie im logarithmischen Handbuch) die Numeri in Differenzen fort, die im Verhältnis zu den Numeri selbst

sehr klein sind (20002 — 20001 = 1 im Verhältnis zu 20001 sehr klein), so müssen die Mantissen gleiche (oder doch wenigstens nahe gleiche) Differenzen zeigen (s. A).

Schreiten dagegen die Numeri in Differenzen fort, die im Verhältnis zu den Numeri selbst grofs genug sind (12 — 11 = 1 im Verhältnis zu 11 grofs), so müssen die Mantissen ungleiche Differenzen zeigen (s. B.)

d. Berechnet man der Reihe nach für $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ die Werte der beliebig angenommenen Funktion $0{,}5678 + 0{,}000438\,x$, so erhält man folgende Tabelle:

Argument x	Funktion $0{,}5678 + 0{,}000438\,x$	Differenz der Funkt.
0	0,567800	
		438
1	0,568238	
		438
2	0,568676	
		438
3	0,569114	
		438
4	0,569552	
		438
5	0,569990	
		438
6	0,570428	
		438
7	0,570866	

Hier zeigen die Werte der Funktion gleiche Differenzen (jede = 438). Dieselbe Funktion würde auf 4 Decimalstellen berechnet die nachstehende Tabelle geben:

Argument x	Funktion	Differenz der Funkt.
0	0,5678	
		4
1	0,5682	
		5
2	0,5687	
		4
3	0,5691	
		5
4	0,5696	
		4
5	0,5700	
		4
6	0,5704	
		5
7	0,5709	

Die Differenzen schwanken in dieser 2. Tabelle zwischen den beiden in der natürlichen Zahlenreihe auf einander folgenden Zahlen 4 und 5 hin und her.

Hieraus folgt, dafs die Differenzen einer Zahlenreihe mit abgebrochenen Decimalbrüchen als gleiche anzusehen sind, wenn sie zwischen 2 auf einander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe hin- und herschwanken.

Wenn also die Logarithmen der Numeri 30500, 30501, 30502 u. s. w. der Reihe nach die Differenzen 143, 142, 143, 142, 142, 143, . . . zeigen (s. Bruhns, S. 47, 1. Zeile), so kann man anneh-

men, dafs die Ungleichheit der Differenzen nur eine Folge der abgebrochenen 7. Decimalstelle ist.

Selbstverständlich können die Differenzen nur für eine geringe Anzahl auf einander folgender Mantissen als gleich (nahe gleich) betrachtet werden, da sie nach und nach immer mehr abnehmen (von S. 6 bis S. 185 von 435 bis auf 43).

e. Sucht man zu einer Zahl, die sich nicht unmittelbar im Argument vorfindet, mittelst der gegebenen Zahlen der beiden Zahlenreihen die zugehörige Funktion, so nennt man dies: Interpolieren. Soll z. B. aus den Zahlen der Tabelle A (im Abschnitt c) zum Numerus 20001,75 ($= 20001\frac{3}{4}$) der Logarithmus berechnet werden, so könnte die Interpolation mit Rücksicht auf die gleichen Differenzen durch Anwendung der Proportionalität in folgender Weise ausgeführt werden.

Nimmt die Zahl des Arguments stets um 1 (von 20001 bis 20002, von 20002 bis 20003 u. s. w.) zu, so nimmt die Mantisse stets um 217 (von 3010517 bis 3010734, von 3010734 bis 3010951 u. s w.) zu. Um wie viel mufs die Mantisse 3010517 zunehmen, wenn die Zahl des Arguments um $\frac{3}{4}$ (von 20001 bis $20001\frac{3}{4}$) zunimmt?

Antwort: Um $\frac{3}{4} \cdot 217 = 162\frac{3}{4}$. Folglich ist die gesuchte Mantisse

$$= 3010517 + 162\tfrac{3}{4}$$
$$= 3010517 + 163 = 3010680$$

und daher $lg\, 20001{,}75 = 4{,}3010680$.

f. Eine solche Interpolation durch einfache Proportionalität ist nicht anwendbar, wenn die Zahlen des Arguments zwar gleiche, die Funktionen aber ungleiche Differenzen zeigen.

Beispiel.

Zahl x	Kuben x^3	Differenzen.
5	125	
		218
7	343	
		386
9	729	
		602
11	1331	

Aus den Zahlen dieser Tabelle möge der Kubus von 6 gleichfalls mittelst der Proportionalität gesucht werden.

Steigt die Zahl um 2 (von 5 bis 7), so steigt die Funktion von 125 auf 343, d. i. um 218. Um wie viel mufs 125 steigen, wenn die Zahl nur um 1 (von 5 auf 6) steigt?

Antwort: Bei 2 : 218, folglich
bei 1 = 109.

Der Kubus von 6 wäre demnach 125 + 109 = 234, während derselbe in Wirklichkeit 216 beträgt. Der Fehler liegt darin, dafs die Differenzen der Funktionen ungleich sind (218, 386 ...) und auch zwischen den Kuben von 5, 6 und 7 ungleich sein werden, so dafs man für das Argument 6, d. i. für die Mitte zwischen 5 und 7, nicht auch die Mitte zwischen 125 und 343 für die gesuchte Funktion erhalten wird.

Wegen der ungleichen Differenzen läfst sich daher auch nicht *lg* 12 aus *lg* 11 und *lg* 13 der Tabelle B (s. Abschn. c) durch einfache Proportionalität ableiten.

II. Da die auf einander folgenden Differenzen der Mantissen in Bruhns Logarithmen von Seite 6 an entweder ganz gleich sind (s. I, c, A), oder zwischen 2 auf einander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe hin- und herschwanken und daher als ursprünglich gleich betrachtet werden können (s. I, d), so wird man auch immer zu einem gegebenen Numerus, der nicht unmittelbar in den Tafeln enthalten ist, also zu einem Numerus, der aus mehr als 5 Ziffern besteht, den zugehörigen Logarithmus durch Interpolation mittelst einfacher Proportionalität finden können.

Es sei z. B. *lg* 15601,7 zu bestimmen.

Wie in I, e: *lg* $20001\frac{3}{4}$ aus den Mantissen von *lg* 20001 und *lg* 20002 gesucht wurde und hierzu hauptsächlich die Differenz 217 der beiden Mantissen nötig war, so kann auch hier *lg* 15601,7 aus

$$\left.\begin{array}{l} lg\ 15601 = 1931524 \\ lg\ 15602 = 1931803 \end{array}\right\} \text{(Bruhns, S. 17, 11. Zeile)}$$

und der Differenz dieser beiden Mantissen gefunden werden.

Anstatt aber diese Differenz durch die vollständige Subtraktion 803 — 524 zu berechnen, genügt es, die Subtraktion nur hinsichtlich der letzten Stelle auszuführen. Hier ist

$$\ldots 180\mathbf{3} - 152\mathbf{4} = \ldots \mathbf{9}$$

und man weifs, dafs die Differenz sich auf 9 endigt.

Da nun die letzte mit *P. P.* (*Partes proportionales* = Proportionalteile) bezeichnete Spalte für diese Seite als Differenz der Mantissen 281, 280, 279 bis 271 angiebt, so sucht man sich aus diesen Zahlen diejenige heraus, die sich auf 9 endigt und der 11., jenen *lg* 15601 enthaltenden Zeile am nächsten liegt. Es ist die Differenz 279.

Steigt also der Numerus um 1 (von 15601 auf 15602), so steigt die Mantisse um 279 (von 1524 auf 1803). Steigt daher der Numerus nur um $\frac{1}{10} = 0{,}1$ (von 15601 auf 15601,1), so steigt die Mantisse auch nur um $\frac{1}{10}$ der Differenz 279, d. i. um 27,9 (also von 1931524 auf 1931524 + 27,9),

steigt der Num. um 0,2, so steigt die Mant. um $2 \cdot 27,9 = 55,8$,
„ „ „ „ 0,3, „ „ „ „ „ $3 \cdot 27,9 = 83,7$,
„ „ „ „ 0,7 (von 15601 auf 15601,7, siehe d. Aufg.),
so steigt die Mant. um $7 \cdot 27,9 = 195,3$, d. i. von 1931524 auf

$$\begin{array}{r} 1931524 \\ + \quad 195,3 \\ \hline \end{array}$$ folglich ist

$lg\ 15601,7 = .\ ,1931719.$

Da die Mantisse 1931524 als abgebrochener Decimalbruch schon in der 7. Decimalstelle nicht ganz richtig ist, die fehlende 8. Stelle also auch nicht $= 0$ ist, so müssen die über die 7. Decimalstelle hinausgehenden Stellen (hier die 3 der Zahl 195,3) gleichfalls abgeworfen werden.

Die Proportionalteile der Differenz der Mantisse für die Zehntel (der 6. Stelle) des Numerus hat man nicht erst, wie es vorstehend geschehen ist, zu berechnen, sondern findet sie unmittelbar in der mit *P. P.* bezeichneten Spalte:

		279	
	1	27,9	
	2	55,8	
	3	83,7	(Bruhns, S. 17).
	.		
	.		
für $\frac{7}{10}$ unseres Beispiels:	**7**	195,3	

2. Beispiel. $lg\ 2,38429$?

S. 33 findet man zunächst $lg\ 23842 = .\ ,3773427$. Aus diesem Logarithmus und dem nächsthöhern $lg\ 23843 = .\ ,3773609$ findet man $\ldots 9 - \ldots 7 = \ldots$ **2** als letzte Stelle der Differenz der beiden Mantissen und mithin ist die vollständige Differenz die in der Spalte *P. P.* angegebene Zahl 18**2**. Steigt mithin der Numerus um 1 (von 23842 auf 23843), so steigt die Mantisse 3773427 um 182. Steigt der Numerus um 0,1, so steigt die Mantisse um 18,2; steigt der Numerus um 0,9 (von 23842 auf 23842,9, s. die Aufg.), so steigt die Mantisse um $9 \cdot 18,2 = 163,8$, welche Zahl ohne Multiplication unmittelbar in der Spalte *P. P.* in den Proportinonalteilen zur Differenz 182 gefunden wird.

Folglich:
$$\begin{array}{r} 3773427 \\ 163,8 \\ \hline \end{array}$$
$lg\ 23842,9 = 4,3773591$

und daher der gesuchte $lg\ 2,38429 = 0,3773591$.

3. Beispiel. $lg\ 2,384296$?

Für die ersten 6 Stellen 23842,9 dieses Numerus wurde im 2. Beisp. die Mantisse $3773427 + 163,8$ gefunden. Da 23842,86

noch um $\frac{6}{100}$ gröfser als 23842,9 ist und die Mantisse für $\frac{6}{10}$ des Numerus um 109,2 (siehe die Differenztafel zu 182 in *P. P.*) zu vermehren ist, so mufs dies für $\frac{6}{100}$ des Numerus 109,2: 10 = 10,92 betragen. Daher die gesuchte Mantisse:

$$\begin{array}{r} 3773427 \\ +\quad 163,8 \\ +\quad 10,92 \end{array} \text{ und folglich}$$

$$lg\ 2{,}384296 = 0{,}3773602.$$

Offenbar hätte man auch die Proportionalteile 109,2 unverändert der Differenztafel in *P. P.* entnehmen und addieren können, wenn man sie eine Stelle nach rechts gesetzt hätte:

$$\left.\begin{array}{lr} lg\ 23842 & = 3773427 \\ \quad\quad\ 9 & 163,8 \\ \quad\quad\ \ 6 & 109,2 \end{array}\right\} \text{(aus der Diff. 182)}$$

$$lg\ 2{,}384296 = 0{,}3773602.$$

Diese Beispiele führen zu der folgenden Regel für das Bestimmen einer Mantisse:

> Zunächst sucht man die Mantisse für die ersten 5 Stellen des Numerus (die als Ganze, die 6. Stelle als Zehntel, die 7. Stelle des Numerus als Hundertel zu betrachten sind). Die letzte Stelle der in den Tafeln nächstfolgenden Mantisse um die letzte Stelle jener zuerst aufgesuchten vermindert, giebt die letzte Stelle der Differenz beider Mantissen und damit die vollständige Differenz in der Spalte *P. P.* In derselben Spalte sucht man alsdann in der betr. Differenztafel im Argument links die **6. Stelle** (die Zehntel) des Numerus auf, um die rechts daneben stehenden Proportionalteile **unverändert** zu der schon aufgesuchten Mantisse zu addieren. Für jede nachfolgende Stelle des Numerus rückt man die Proportionalteile der Mantisse 1 Stelle nach rechts.

4. Beispiel. *lg* 0,030500695?

Nachdem *lg* 30500 aufgesucht worden ist, subtrahiert man die letzte Stelle **8** der zugehörigen Mantisse . . . 299**8** von der letzten Stelle **1** der in den Tafeln nächstfolgenden Mantisse . . . . 314**1**. Diese Differenz . . . **3** ist die letzte Stelle der Differenz 14**3** (siehe *P. P.*) der beiden Mantissen. Daher:

$$\left.\begin{array}{lr} lg\ 30500 = & 4842998 \\ \quad\quad 6 & 85{,}8 \\ \quad\quad 9 & 128{,}7 \\ \quad\quad 5 & 71{,}5 \end{array}\right\}\text{(aus der Diff. 143)}$$

$lg\ 0{,}030500695 = 8{,}4843097 - 10.$

5. Beispiel. $lg\ 568890874500$?

$$\left.\begin{array}{lr} lg\ 56889 = & 7550283 \\ \quad\quad 0 & 0{,}0;\ \text{denn}\ 7{,}6\cdot 0 = 0! \\ \quad\quad 8 & 60{,}8 \\ \quad\quad 7 & 53{,}2 \end{array}\right\}\text{(aus der Diff. } \mathbf{76} = 035\mathbf{9} - 028\mathbf{3})$$

$lg\ 568890874500 = 11{,}7550290.$

Die Proportionalteile der Ziffern 45 des gegebenen Numerus üben auf die 7. Decimalstelle der Mantisse keinen Einflufs aus.

6. Beispiel. $lg\ 237{,}58121$?

$$\left.\begin{array}{lr} lg\ 23758 = & 3758099 \\ \quad\quad 1 & 18{,}3 \\ \quad\quad 2 & 36{,}6 \\ \quad\quad 1 & 18{,}3 \end{array}\right\}\text{(aus der Differenz } 18\mathbf{3} = 828\mathbf{2} - 809\mathbf{9})$$

$lg\ 237{,}58121 = 2{,}3758121.$

(Man vergleiche die Ziffern des Numerus mit denen des Logarithmus! Gleiche Übereinstimmung zeigen

$lg\ 3550{,}2602$; $lg\ 46692{,}469$; $lg\ 576045{,}69$; $lg\ 6834720{,}8$; $lg\ 78974890$; $lg\ 895191600$; $lg\ 110430907000$; $lg\ 1208214400000$.)

Zusatz. $lg\ 49\frac{3}{11}$ denkt man sich entweder als $lg\ 49{,}27273$ oder als $lg\ \frac{542}{11}$ und berechnet den letztern nach dem 16. Satze mit $lg\ 542 - lg\ 11 = 2{,}7339993 - 1{,}0413927 = 1{,}6926066$.

$lg\ \frac{14}{47}$ würde nur mit $lg\ 14 - lg\ 47$ zu bestimmen sein (siehe 29. Satz!), weil die Verwandlung des Bruches $\frac{14}{47}$ in einen Decimalbruch zu zeitraubend wäre.

Nur wenn der Numerus eine gemischte Zahl ist, bei welcher die Ganzen aus 5 Stellen bestehen, kann man die Tafeln, wie nachstehendes Beispiel zeigt, unmittelbar benutzen, ohne den Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

$lg\ 15849\frac{7}{11}$? Steigt der Numerus um 1 (von 15849 auf 15850), so steigt die Mantisse 2000019 (des $lg\ 15849$) um 274, steigt daher der Numerus um $\frac{7}{11}$, so mufs die Mantisse um

$$\frac{7}{11} \cdot 274 = \frac{7 \cdot 274}{11}$$

steigen. Die Multiplication $7 \cdot 274$ hat man nicht auszuführen, da die in *P. P.* enthaltene Tafel zur Differenz 274 für 7 Zehntel des Numerus die Proportionalteile 191,8 (d. i. $0{,}7 \cdot 274 = 191{,}8$) giebt, folglich ist $\frac{7 \cdot 274}{11} = \frac{1918}{11} = 174$ und daher:

$$lg\ 15849 = 2000019$$
$$174 = \frac{7}{11} \cdot 274$$

$$lg\ 15849\tfrac{7}{11} = 4{,}2000193.$$

III. Vorteile.

a. Ist der gegebene Numerus der nächsthöhern 5stelligen Zahl nahe gleich, so sucht man den Logarithmus dieser letztern Zahl und vermindert denselben um die Proportionalteile des Zuvielgenommenen.

1. Beispiel. *lg* 1,35079?

Man denke sich $13507{,}9 = 13508 - 0{,}1$.

Daher *lg* 13508 = 1305911
— 0,1 . . . . . 32 (aus der Diff. 322) subtr.

lg 1,3507 = 0,1305879.

Anmerkung. Da man von 13508 aus zurückgeht, so sind die Proportionalteile nicht aus der Diff. der Mantissen des *lg* 13508 und *lg* 13509, sondern des *lg* 13507 und *lg* 13508 zu nehmen.

2. Beispiel. *lg* 0,0001880993?

Man denke sich $18809{,}93 = 18810 - 0{,}07$.

Daher *lg* 18810 = 2743888
— 0,07 . . . . . 16; denn $\frac{7}{10}$ giebt 161,7, daher $\frac{7}{100} = 16{,}17!$

lg 0,0001880993 = 6,2743872 — 10.

b. Man denke sich für die auf die 5. Stelle des Numerus folgenden Stellen den gemeinen Bruch und verfahre wie im Zusatze zum Abschnitt II.

1. Beispiel. 176,09334? $17609\frac{1}{3}$ gedacht, folglich $\frac{1}{3}$ der Mantissendifferenz addiert.

lg 17609 = 2457347
$\frac{1}{3}$ . . . . . $82 = \frac{1}{3} \cdot 247$ add.

lg 176,09334 = 2,2457429.

2. Beispiel. *lg* 0,23716427? $0,4285\ldots=\frac{3}{7}$ weicht zwar um 0,001 ab, aber $\frac{1}{1000}$ der Mantissendifferenz bewirkt keine Änderung der 7. Decimalstelle. Folglich kann man sich $23716\frac{3}{7}$ denken. Man findet 184 als Mantissendifferenz

$$\frac{3}{7}\cdot 184=\frac{3\cdot 184}{7}=\frac{552}{7}$$ (denn $0,3\cdot 184=55,2$ in *P.P.*, s. II, Zus., letztes Beisp.) $=79$. Daher:

$$\begin{array}{rl} lg\ 23716 = 3750414 & \\ 79 & \text{addiert} \\ \hline lg\ 0,23716427 = 9,3750493 - 10. & \end{array}$$

3. Beispiel. *lg* 0,020832779? $20832\frac{7}{9}=20833-\frac{2}{9}$ (s. Vorteil a). Daher ist $\frac{2}{9}$ der Mantissendifferenz $208=\frac{416}{9}=46$ zu subtrahieren.

$$\begin{array}{rl} lg\ 20833 = 3187518 & \\ -\frac{2}{9}\ \ldots\ldots\ 46 & \text{subtr.} \\ \hline lg\ 0,020832779 = 8,3187472 - 10. & \end{array}$$

27. Ein in den Tafeln nicht unmittelbar enthaltener Logarithmus gegeben, der zugehörige Numerus gesucht.

Es sei $lg\ x=1,4843689$ gegeben, der Numer. x also in bezug auf die Mantisse 4843689 zu suchen. Die in den Tafeln enthaltene nächstkleinere Mantisse 4843568 entspricht dem 5stelligen Numerus 30504.

Da die gegebene Mantisse um 121 gröfser als die aufgesuchte ist, so hat man noch aus diesem Überschufs die Zehntel (6. Stelle) des Numerus, dann die Hundertel (7. Stelle) u. s. w. zu bestimmen.

$$\begin{array}{rl} 4843689 & \\ 3568 = lg\ 30504 & \text{subtr.} \\ \hline 121\ \ldots\ldots\ (D) & \end{array}$$

Die in den Tafeln enthaltene nächstgröfsere Mantisse ... 3710 (des *lg* 30505) ist um 142 gröfser als die schon aufgesuchte ... 3568. Eine Vermehrung der letztern um 142 bewirkt mithin ein Steigen des Numerus um 1 (von 30504 bis 30505), folglich bewirkt eine Vermehrung der Mantisse um 1 ein Steigen des Numerus um $\frac{1}{142}$, jene Vermehrung der Mantisse um 121 (s. oben D) daher eine Vermehrung des Numerus um $\frac{121}{142}$. Der gesuchte Numerus wäre somit $30504\frac{121}{142}$. Die Verwandlung in einen Decimalbruch

```
121,0 : 142 = 0,852  ⎫
113 6                ⎪
-----                ⎪
  7 40               ⎬ (E)
  7 10               ⎪
  ----               ⎪
   300               ⎭
```

giebt für den Numerus die Stellen 30504/852. Die Kennziffer 1 des gegebenen Logarithmus führt mithin zu $x = 30{,}504852$.

Die Division E, durch welche die Zehntel, Hundertel und Tausendtel (die 6., 7. und 8. Stelle) bestimmt wurden, erspart man sich durch die in der Spalte *P. P.* enthaltenen Tafeln. Sucht man nämlich daselbst jene Mantissendifferenz 142 auf, so findet man in den zugehörigen Proportionalteilen, daſs 113,6 Einheiten der 7. Decimalstelle der Mantisse 8 Zehntel für den Numerus geben (vergl. E). Vermindert man jenen Rest

```
121,0 um diese Zahl
113,6, so erhält man den Rest
-----
  7,4,
```

aus welchem nun zunächst die Hundertel des Numerus zu bestimmen wären. Jene Tafel (unter *P. P.*) giebt:

bei 71,0 Einheiten der Mantisse 5 Zehntel für den Num.,
„ 85,2 „ „ „ 6 „ „ „ „

folglich kommen:

auf 7,10 Einheiten der Mantisse 5 Hundertel für den Num.,
„ 8,52 „ „ „ 6 „ „ „ „

Jener Rest 7,4 läſst somit auf 5 Hundertel (= 0,05) für den Num. schlieſsen. Giebt aber 7,4 für den Num. 0,05, so muſs 74,0 : 0,5 geben. Hieraus folgt, daſs man zu derselben 5 gelangt, wenn man in jenem Reste 7,4 das Komma 1 Stelle nach rechts setzt und die entstehende Zahl 74,0 wieder in der Differenztafel 142 aufsucht.

Diese Betrachtungen führen zu der nachstehenden Regel für das Bestimmen des Numerus aus einem nicht unmittelbar in den Tafeln enthaltenen Logarithmus:

> Zunächt sucht man in den Tafeln die nächstkleinere Mantisse auf. Der zugehörige 5stellige Numerus bildet die 5 ersten Stellen der gesuchten Zahl (x). Vermindert man die in den Tafeln enthaltene nächstgröſsere Mantisse um die schon aufgesuchte kleinere, so ergiebt sich die unter *P. P.* aufzusuchende Differenz, um aus den Proportionalteilen derselben die noch fehlende 6., 7. (u. 8.) Stelle des Numerus in folgender Weise zu bestimmen. Die gegebene Mantisse ist um jene nächstkleinere der Tafeln

zu vermindern und der Rest in der betr. Differenztafel rechts aufzusuchen. Die links stehende Ziffer ist die 6. Stelle des Numerus. Findet man den Rest nicht unmittelbar in der Differenztafel, so ist die nächstkleinere Zahl derselben zur Bestimmung der 6. Stelle zu benutzen und von jenem Reste abzuziehen. In dem neuen Reste ist das Komma 1 Stelle nach rechts zu rücken und die hierdurch erhaltene Zahl wieder in der Differenztafel rechts aufzusuchen, um hierzu links die 7. Stelle des Numerus zu finden. Will man noch eine (die 8.) Stelle des Numerus berechnen (s. unten die Anm. zum 1. Beisp.), so verfährt man wie vorher, rückt also gleichfalls im Rest das Komma 1 Stelle nach rechts und sucht die hierdurch erhaltene Zahl wieder in der Differenztafel rechts auf.

Die Rechnung für jenes Beispiel würde mithin in folgender Weise abzukürzen sein:

$lg\ x = 1{,}4843689$
568 giebt den Num. 30504
121,0
113,6 giebt 8 als 6. Stelle des Num.
74,0
71,0 giebt 5 als 7. Stelle des Num.
30,0
28,4 giebt 2 als 8. Stelle des Num.

(aus der Diff. 142 (= 3710 — 3568, s. 26. Satz, II)

Folglich $x = 30{,}504852$.

Anmerkung. Die gegebene Mantisse 4843689 und die beiden aus den Tafeln benutzten Mantissen sind abgebrochene Decimalbrüche, können also in der 7. Decimale um $\frac{1}{2}$ Einheit zu grofs oder zu klein sein. Ist nun die Mantisse des $lg\ x$ der letzten Aufgabe vollständiger

4843688,5, $lg\ 30504 = 4843568{,}5$, $lg\ 30505 = 4843710{,}5$,

so wäre die Rechnung folgende:

4843688,5	. . . 3710,5
3568,5 = lg 30504	. . . 3568,5
120,0	142,0 Mantissendiff.

Folglich $x = 30504\frac{120}{142} = 30504{,}845$.

Ist jedoch die gegebene Mantisse vollständiger

4843689,5, $lg\ 30504 = 4843567{,}5$, $lg\ 30505 = 4843709{,}5$,

so wäre die Rechnung:

4843689,5	. . . 3709,5
3567,5 = lg 30504	. . . 3567,5
122,0	142,0.

Folglich $x = 30504\frac{122}{142} = 30504/859$

Der gesuchte Numerus ist mithin zwischen den Grenzen

30504/845 und 30504/859

enthalten und folglich ist der oben mit 7stelligen Logarithmen berechnete 30504/852 nicht unbedingt richtig, vielmehr die 8. Stelle desselben eine sehr zweifelhafte. Hieraus folgt, dafs man den Numerus gewöhnlich auf nicht mehr als 7 Stellen berechnen kann. Nur bei sehr grofsen Mantissendifferenzen (z. B. Seite 6: 435, 434 . . .) könnte die 8. Stelle annähernd richtig sein. Berücksichtigt man, dafs der gegebene Logarithmus oft erst aus einer Verbindung oder Veränderung (Multiplication) anderer Logarithmen hervorgegangen ist, so wird man einsehen, dafs derselbe in der letzten (7.) Decimalstelle noch weit mehr als $\frac{1}{2}$ Einheit abweichen kann und darum der Numerus schon in der 7. (oder einer noch frühern) Stelle falsch wird.

2. Beispiel.

$lg\ y = 7{,}2260500 - 10;$
325 = lg 16828
175,0
154,8 giebt 6
202,0
180,6 giebt 7
214,0 giebt 8

(aus der Differenz 258 (= 0583 — 0325).)

Daher $y = 0{,}0016828678$.

3. Beispiel.

$lg\ z = 8{,}0002200$
2171 = lg 10005
29,0
0,0 giebt 0, denn erst 43,4 (s. die Differenz 434) giebt 1.
290,0
260,4 giebt 6
296,0 giebt 7.

$z = 100050670$.

4. Beispiel. $lg\,u = 0{,}1234567 - 11;$

$$\begin{array}{l} 269 = lg\,13287 \\ \hline 298{,}0 \\ 294{,}3 \text{ giebt } 9 \\ \hline 37{,}0 \\ 32{,}7 \text{ giebt } 1 \\ \hline 43{,}0 \text{ giebt } 1. \end{array}$$

$u = 0{,}000000000013287911.$

Vorteil. $lg\,x = 2{,}5590784$

$$\begin{array}{l} 683 = lg\,36230 \\ \hline 101. \end{array}$$

Da die Mantissendifferenz 120 ist, so denke man sich wegen der bequemen Division durch 120 den Numerus $36230\frac{101}{120}$ (s. ob. die Ableitung der Regel für die Bestimmung des Numerus). Nun ist $101:120 = 10{,}1:12 = 0{,}84$, folglich sind die Ziffern des Num. 36230/84 und $x = 362{,}3084$.

28. Berechnung des Produkts.

1. Beispiel. Es sei $3{,}4567 \cdot 45{,}678$ zu berechnen, also x aus $x = 3{,}4567 \cdot 45{,}678$ zu suchen.

Nach dem 5. Satze ist:

$$\left.\begin{array}{l} lg\,x = lg\,(3{,}4567 \cdot 45{,}678), \text{ d. i.} \\ lg\,x = lg\,3{,}4567 + lg\,45{,}678 \text{ (s. 14. Satz)} \end{array}\right\} (Y)$$

$$\begin{array}{r} lg\,3{,}4567 = 0{,}5386617 \\ lg\,45{,}678 = 1{,}6597071 \\ \hline lg\,x = 2{,}1983688 \text{ (s. S. 17)} \\ 546 \\ \hline 142{,}0 \\ 137{,}5 \\ 45{,}0 \end{array} \left.\right\} \text{aus der Diff. 275.}$$

Da nun $\qquad lg\,157{,}8952 = 2{,}1983688 \;.\;.\;.\;.\;.\; (Z)$

so ist nach §. 3, 2: $\qquad x = 198{,}7782$ (s. 28. Satz).

Anmerkung. In der Praxis läſst man die beiden Gleichungen Y und die Gleichung Z weg (s. das nachfolgende Beisp.)

2. Beispiel. $y = 76{,}5432 \cdot 23456{,}7 \cdot 1884{,}99;$

$$\begin{array}{r} lg\,76{,}5432 = 1{,}8839066 \\ lg\,23456{,}7 = 4{,}3702670 \\ lg\,1884{,}99 = 3{,}2753091 \\ \hline lg\,y = 9{,}5294827 \end{array}$$

$y = 3384408000.$

3. Beispiel. $z = 0{,}89165 \cdot 0{,}074238$.

A. Berechnung mit der unveränderlichen Kennziffer — 10.

a. Vollständige Rechnung.

$$\begin{aligned} lg\,0{,}89165 &= 9{,}9501944 - 10 \\ lg\,0{,}074238 &= 8{,}8706263 - 10 \\ \hline lg\,z &= 18{,}8208207 - 20. \end{aligned}$$

Da die negative Kennziffer stets — 10 sein mufs, so ist hier noch jede der beiden Kennziffern um 10 zu vermindern (s. §. 9, 14). Daher:

$$lg\,z = 8{,}8208207 - 10.$$

186	
21,0	Bruhns, S. 118,
19,8	Diff. 66.
12.0	

$z = 0{,}06619432.$

b. Abgekürzte Berechnungsweise.

Das Rechnen mit Logarithmen wird nur dann ein einfaches und praktisches, wenn man für den negativen Logarithmus die unveränderliche negative Kennziffer — 10 benutzt, ohne sie zu schreiben.

Im Zusammenhange mit dieser Regel läfst man beim Addieren von Logarithmen (also bei Berechnung von Produkten) die im Logarithmus des Resultats etwa entstehenden Zehner der positiven Kennziffer weg. Die Richtigkeit dieser Regel ergiebt sich aus der Vergleichung mit der vollständigen Rechnung.

Vorstehendes Beispiel rechnet man daher:

$$\begin{aligned} lg\,0{,}89165 &= 9{,}9501944 \\ lg\,0{,}074238 &= 8{,}8706263 \\ \hline lg\,z &= 8{,}8208207. \end{aligned}$$

Die Bestimmung des Numerus (hier z) aus einem solchen unvollständigen Logarithmus kann besondere Schwierigkeiten nicht bereiten, denn

I. entfernen sich in der Praxis die gegebenen Zahlen und die Resultate gewöhnlich nicht weit von der Einheit. Hat daher der Logarithmus des Resultats eine grofse Kennziffer (9 oder 8 oder 7 . . .), so wird man sich gewöhnlich — 10 hinzuzudenken haben. Hat jedoch dieser Logarithmus eine kleine Kennziffer (0 oder 1 oder 2 . . .), so ist — 10 nicht zu ergänzen, der Logarithmus ist alsdann ein positiver. In vorstehender Rechnung ist daher $lg\,z$ wegen der grofsen Kennziffer 8 noch mit — 10 zu ergänzen:

$$lg\,z = 8{,}8208207 - 10, \text{ wie oben in } a!$$

II. An den Zahlen der Aufgabe erkennt man ferner augenblicklich, ob -10 zu ergänzen ist oder nicht. Hier kann offenbar $0,89 \cdot 0,074$ keine 9stellige ganze Zahl geben, wie es der Fall sein müfste, wenn $lg\,z = 8,82\ldots$ ein positiver wäre, vielmehr ist dieses Produkt offenbar eine sehr kleine Zahl (echter Bruch) und darum fehlt dem Logarithmus die Kennziffer -10.

III. Sollte dennoch ein Zweifel entstehen, so kann man sich die Rechnung wie oben unter a vollständig ausgeführt denken.

B. Berechnung mit der veränderlichen negativen Kennziffer.

$$\begin{aligned} lg\,0,89165 &= 0,9501944 - 1 \\ lg\,0,074238 &= 0,8706263 - 2 \\ \hline &\quad 1,8208207 - 3. \end{aligned}$$

Da bei der veränderlichen negativen Kennziffer die positive Kennziffer stets 0 sein mufs, so ist hier jede der beiden Kennziffern um 1 zu vermindern.

Folglich $\quad lg\,z = 0,8208207 - 2.$

Wegen der Kennziffer -2 beginnt der Numerus in der 2. Decimalstelle: $\quad z = 0,06619432.$

4. Beispiel. $u = 0,0467759 \cdot 3,06895 \cdot 10,7154.$

A. Mit -10, abgekürzt:

$$\begin{aligned} lg\,0,0467759 &= 8,6700222 \\ lg\,3,06895 &= 0,4869898 \\ lg\,10,7154 &= 1,0300084 \\ \hline lg\,u &= 0,1870204 \\ &\qquad\quad 128 \\ \hline &\qquad\quad 76,0 \\ &\qquad\quad 56,4 \\ \hline &\qquad\quad 196,0. \end{aligned}$$

$u = 1,538227.$

Anmerkung. Der kleinen Kennziffer wegen ist $lg\,u$ jedenfalls positiv (s. 3. Beisp., I). Auch kann $0,046 \cdot 3 \cdot 10,7$ keine Zahl sein, deren Log. $0,187\ldots - 10$ wäre (s. 3. Beisp., II). Vollständig ist die Rechnung:

$$\begin{aligned} lg\,0,046\ldots &= 8,67\ldots - 10 \\ lg\,3,06\ldots &= 0,48\ldots \\ lg\,10,7\ldots &= 1,03\ldots \\ \hline lg\,u &= 10,187\ldots - 10. \end{aligned}$$

Die ausgeführte Subtraktion führt zu dem positiven Logarithmus: $\quad lg\,u = 0,1870204$, wie oben.

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer:

$$\begin{aligned} lg\,0{,}046\ldots &= 0{,}670\ldots-2\\ lg\,3{,}06\ldots &= 0{,}486\ldots\\ lg\,10{,}7\ldots &= 1{,}030\ldots\\ \hline lg\,u &= 2{,}187\ldots-2. \end{aligned}$$

Die Subtraktion führt zu:

$$lg\,u = 0{,}1870204, \text{ wie oben.}$$

5. Beispiel. $v = 0{,}639811 \cdot 0{,}952137 \cdot 0{,}00196624$.

A. Mit — 10, abgekürzt:

$$\begin{aligned} lg\,0{,}63\ldots &= 9{,}8060517\\ lg\,0{,}95\ldots &= 9{,}9786994\\ lg\,0{,}00196\ldots &= 7{,}2936365\\ \hline lg\,v &= 7{,}0783876 \quad \ldots\ldots (L) \end{aligned}$$

Die grofse Kennziffer 7 läfst auf

$$lg\,v = 7{,}0783876 - 10$$

schliefsen, daher $\qquad v = 0{,}001197809.$

Offenbar hätte auch $lg\,v = 7{,}07\ldots$ (ohne — 10, s. L) kein positiver Logarithmus sein können, weil $0{,}63 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}0019 < 1$, also keine 8stellige ganze Zahl ist.

Vollständig ist die Rechnung:

$$\begin{aligned} lg\,0{,}63\ldots &= 9{,}806\ldots-10\\ lg\,0{,}95\ldots &= 9{,}978\ldots-10\\ lg\,0{,}0019\ldots &= 7{,}293\ldots-10\\ \hline lg\,v &= 27{,}708\ldots-30. \end{aligned}$$

Beide Kennziffern um 20 vermindert:

$$lg\,v = 7{,}7083876 - 10, \text{ wie oben.}$$

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer:

$$\begin{aligned} lg\,0{,}63\ldots &= 0{,}806\ldots-1\\ lg\,0{,}95\ldots &= 0{,}978\ldots-1\\ lg\,0{,}0019\ldots &= 0{,}293\ldots-3\\ \hline lg\,v &= 2{,}078\ldots-5. \end{aligned}$$

Um 2 vermindert, um die positive Kennziffer in 0 zu verwandeln: $\qquad lg\,v = 0{,}078\ldots-3.$

v beginnt in der 3. Decimalstelle (s. oben).

6. Beispiel. $w = 2796{,}23 \cdot 36{,}0188 \cdot 0{,}00836436$.

A. Mit — 10.

$$\begin{aligned} lg\,2796{,}23 &= 3{,}4465729\\ lg\,36{,}0188 &= 1{,}5565293\\ lg\,0{,}0008\ldots &= 6{,}9224327\\ \hline lg\,w &= 1{,}9255349. \end{aligned}$$

Wegen der kleinen Kennziffer 2 ist offenbar:

$$w = 842{,}432,$$

wie auch ein flüchtiger Blick auf die Aufgabe erkennen läſst.

Vollständige Rechnung:

$$\begin{aligned} lg\,2796{,}23 &= 3{,}446\ldots \\ lg\,36{,}0\ldots &= 1{,}556\ldots \\ lg\,0{,}0008\ldots &= \underline{6{,}922\ldots - 10} \\ lg\,w &= 11{,}925\ldots - 10 = 1{,}9255349. \end{aligned}$$

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer:

$$\begin{aligned} lg\,2796\ldots &= 3{,}446\ldots \\ lg\,36{,}0\ldots &= 1{,}556\ldots \\ lg\,0{,}0008\ldots &= \underline{0{,}922\ldots - 4} \\ lg\,w &= 5{,}925\ldots - 4 = 1{,}9255349. \end{aligned}$$

7. Beispiel.

$$t = 0{,}000000942568 \cdot 0{,}00000819435 \cdot 0{,}000393248.$$

A. Mit -10.

Bei Aufgaben, die als Resultat voraussichtlich eine sehr kleine Zahl geben, ist es vorzuziehen, die Logarithmen vollständig zu schreiben.

$$\begin{aligned} lg\,0{,}00000094\ldots &= 3{,}9743127 - 10 \\ lg\,0{,}0000081\ldots &= 4{,}9135146 - 10 \\ lg\,0{,}00039\ldots &= \underline{6{,}5946665 - 10} \\ lg\,t &= 15{,}4824938 - 30. \end{aligned}$$

Hier kann die negative Kennziffer nicht auf 10 gebracht werden, weil man nicht von beiden Kennziffern 20 subtrahieren kann. Ist also der Unterschied der beiden Kennziffern gröſser als 10, so ist die Rechnung mit der positiven Kennziffer 0 und der veränderlichen negativen Kennziffer auszuführen.

Beide Kennziffern hier um 15 vermindert:

$$lg\,t = 0{,}4824938 - 15.$$

t beginnt in der 15. Decimalstelle.

$$t = 0{,}000000000000003037343.$$

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer:

$$\begin{aligned} lg\,0{,}00000094\ldots &= 0{,}974\ldots - 7 \\ lg\,0{,}0000081\ldots &= 0{,}913\ldots - 6 \\ lg\,0{,}00039\ldots &= \underline{0{,}594\ldots - 4} \\ lg\,t &= 2{,}482\ldots - 17 \end{aligned}$$

oder $lg\,t = 0{,}482\ldots - 15$, wie oben.

8. Beispiel. $s = 0{,}000000000000368194 \cdot 6543{,}21.$

Da der 1. Faktor mehr als 9 Nullen nach dem Komma

hat, so läfst sich die unveränderliche Kennziffer — 10 nicht benutzen. Folglich:

$$
\begin{array}{rl}
lg\,0,0\ldots 368194 = & 0,5660767 - 13 \\
lg\,6543,21 = & 3,8157909 \\
\hline
lg\,s = & 4,3818676 - 13 \\
\text{oder } lg\,s = & 0,3818676 - 9.
\end{array}
$$

$s = 0,00000000240917.$

29. Berechnung des Quotient.

1. Beispiel. $x = \frac{98765}{4321}$.

$$lg\,x = lg\,\frac{98765}{4321}, \text{ d. i. (s. 16. Satz)}$$

$$lg\,x = lg\,98765 - lg\,4321. \text{ Daher:}$$

$$
\begin{array}{rl}
lg\,98765 = & 4,9946031 \\
lg\,4321 = & 3,6355843 \\
\hline
lg\,x = & 1,3590188 \\
 & 002 \\
\hline
 & 186,0 \\
 & 171,0 \\
\hline
 & 150,0.
\end{array}
$$

$x = 22,85698.$

2. Beispiel. $y = \frac{58221}{4,76249}$.

$$
\begin{array}{rl}
lg\,58221 = & 4,7650797 \\
lg\,4,76249 = & 0,6778341 \\
\hline
lg\,y = & 4,0872456 \\
 & 133 \\
 & 323,0.
\end{array}
\Big\}\text{ subtr.}
$$

$y = 12224,9.$

3. Beispiel. $z = \frac{0,0058238}{0,79647}$.

A. Mit — 10!

a. Vollständig.

$$
\left.
\begin{array}{rl}
lg\,0,0058238 = & 7,7652065 - 10 \\
lg\,0.79647 = & 9,9011694 - 10
\end{array}
\right\}\text{ subtr.}
$$

Da der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, so würde die Subtraktion zu einer negativen Mantisse führen. Um dies zu vermeiden (s. 24. Satz, I) und zugleich — 10 nach der Subtraktion als negative Kennziffer zu erhalten (s. 28. Satz, 3. Beisp., A, a), hat man hier die beiden Kennziffern des Minuend um 10 zu erhöhen.

$$\begin{array}{rl} lg\,0{,}0058\ldots = 17{,}7652065 - 20 \\ lg\,0{,}79\ldots = \underline{9{,}9011694 - 10} \end{array}\Big\}\ \text{subtr.}$$

$$lg\,z = 7{,}8640371 - 10$$

$$\begin{array}{r} 362 \\ \hline 9{,}0. \end{array}$$

$$z = 0{,}007312015.$$

b. Abgekürzt. (Siehe 28. Satz, 3. Beisp., A, b).

Die negative Kennziffer -10 ist stets wegzulassen und die positive Kennziffer des Minuend um 10 zu erhöhen, wenn der Minuend kleiner als der Subtrahend sein sollte. In bezug auf den Logarithmus des Resultats gelten die Sätze I bis III im 28. Satze, 3. Beisp.

Daher: $lg\,0{,}0058\ldots = 7{,}7652065$ $\left(\text{Gedacht: } \begin{matrix} 17{,}765\ldots \\ 9{,}901\ldots \end{matrix}\right)$
$lg\,0{,}79\ldots = 9{,}9011694$

$$lg\,z = 7{,}8640371.$$

Wegen der grofsen Kennziffer 7 wird hier -10 fehlen. z kann auch keine 8stellige ganze Zahl sein, da der Dividend der Aufgabe kleiner als der Divisor ist.

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer.

$$lg\,0{,}0058\ldots = 0{,}7652065 - 3$$
$$lg\,0{,}79\ldots = 0{,}9011694 - 1.$$

Um subtrahieren zu können und die positive Kennziffer des Restes 0 werden zu lassen (s. 28. Satz, 3. Beisp., B), sind die beiden Kennziffern des Minuend um 1 zu erhöhen.

Daher: $\begin{array}{r} 1{,}7652065 - 4 \\ 0{,}9011694 - 1 \end{array}\Big\}\ \text{subtr.}$

$$lg\,z = 0{,}8640371 - 3.$$

$$z = 0{,}007312015.$$

4. Beispiel. $u = \dfrac{237{,}612}{0{,}0497389}$.

A. Mit -10, abgekürzt.

$lg\,237{,}612 = 2{,}3758684$ $\left(\text{Gedacht: } \begin{matrix} 12{,}37\ldots \\ 8{,}69\ldots \end{matrix}\right)$
$lg\,0{,}049\ldots = 8{,}6966961$

$$lg\,u = 3{,}6791723.$$

Der kleinen Kennziffer 3 wegen ist $lg\,u$ jedenfalls positiv (ohne -10). Dies läfst auch sogleich die Aufgabe erkennen.

Daher: $u = 4777{,}188.$

Vollständige Rechnung. Um subtrahieren zu können, hat man den Logarithmus des Dividend in folgender Weise umzuändern:

$$\left.\begin{array}{l} lg\,237{,}612 = 12{,}3758684 - 10 \\ lg\,0{,}049\ldots = 8{,}6966961 - 10 \end{array}\right\} \text{subtr.}$$

$$lg\,u = 3{,}6791723, \text{ wie oben.}$$

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer.

$$\left.\begin{array}{l} lg\,237{,}612 = 2{,}3758684 \\ lg\,0{,}049\ldots = 0{,}6966961 - 2 \end{array}\right\} \text{subtr.}$$

$$lg\,u = 1{,}6791723 + 2,$$

d. i. $lg\,u = 3{,}6791723$, wie oben.

5. Beispiel. $v = \frac{0{,}50729}{0{,}033268}$.

A. Mit -10, abgekürzt.

$$lg\,0{,}50729 = 9{,}7052563$$
$$lg\,0{,}033268 = 8{,}5220267$$
$$lg\,v = 1{,}1832296.$$

$v = 15{,}24859$.

Vollständige Rechnung:

$$\begin{array}{r} 9{,}705\ldots - 10 \\ 8{,}522\ldots - 10 \\ \hline lg\,v = 1{,}1832296. \end{array}$$

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer.

$$\begin{array}{r} 0{,}705\ldots - 1 \\ 0{,}522\ldots - 2 \\ \hline lg\,v = 0{,}183\ldots + 1 \end{array}$$

oder $lg\,v = 1{,}1832296$.

6. Beispiel. $w = \frac{47{,}91}{8968{,}33}$.

A. Mit -10.

$$lg\,47{,}91 = 1{,}6804262$$
$$lg\,8968{,}33 = 3{,}9527116$$
$$lg\,w = 7{,}7277146.$$

$w = 0{,}005342132$.

Vollständige Rechnung:

$$\begin{array}{r} 11{,}6804262 - 10 \\ 3{,}9527116 \\ \hline lg\,w = 7{,}7277146 - 10. \end{array}$$

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer.

$$lg\,47{,}91 = 1{,}680\ldots$$
$$lg\,8968{,}33 = 3{,}952\ldots$$

Um hier subtrahieren zu können und zugleich im Rest 0 Ganze zu erhalten, ist der Minuend $1{,}68\ldots$ in $4{,}68\ldots - 3$ zu verwandeln. Daher:

$$\begin{array}{r} 4,680\ldots-3 \\ 3,952\ldots \\ \hline lg\,w=0,727\ldots-3 \end{array}$$

$w=0,00534\ldots$

7. Beispiel. $m=\frac{0,528289}{71626,8}$.

A. Mit -10. $lg\,0,52\ldots=9,7228716$
$lg\,71626,8=4,8550756$
$lg\,m=4,8677960.$

Die Aufgabe läfst sofort $4,86\ldots-10$ erkennen. Daher:

$m=0,000007375576.$

Vollständig:

$$\begin{array}{r} 9,722\ldots-10 \\ 4,855\ldots \\ \hline 4,867\ldots-10. \end{array}$$

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer.

$lg\,0,52\ldots=0,722\ldots-1$
$lg\,71626,8=4,855\ldots$

Die Kennziffern des Minuend sind um 5 zu erhöhen:

$$\begin{array}{r} 5,72\ldots-6 \\ 4,85\ldots \\ \hline lg\,m=0,86\ldots-6. \end{array}$$

m beginnt in der 6. Decimalstelle (wie oben).

8. Beispiel. $n=\frac{0,00000501}{0,0792539}$.

A. Mit -10. lg Zähler $=4,6998377$
lg Nenner $=8,8990207$
$lg\,n=5,8008170.$

Da der Divisor der Aufgabe gröfser als der Dividend ist, so mufs n offenbar ein echter Bruch, $lg\,n$ also negativ sein, mithin ist -10 zu ergänzen:

$n=0,0000632145.$

Vollständig:

$$\begin{array}{r} 4,699\ldots-10 \\ 8,899\ldots-10 \\ \hline \end{array}$$

Dafür: $\left.\begin{array}{r} 14,699\ldots-20 \\ 8,899\ldots-10 \end{array}\right\}$ subtr.

$lg\,n=5,800\ldots-10$ (wie oben).

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer:

$$\begin{array}{r} 0{,}699\ldots-6 \\ 0{,}899\ldots-2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \text{Dafür:} & 1{,}699\ldots-7 \\ & 0{,}899\ldots-2 \\ \hline lg\,n= & 0{,}800\ldots-5. \end{array}$$

n beginnt in der 5. Decimalstelle (wie oben).

9. Beispiel. $p=\frac{1}{129}$.

A. Mit -10.

$$\begin{array}{rl} lg\,1 & =0{,}00\ldots \\ lg\,129 & =2{,}1105897 \\ \hline lg\,p & =7{,}8894103 \end{array} \quad \left(\text{Gedacht: } \begin{array}{r} 10{,}00\ldots \\ 2{,}11\ldots \\ \hline \end{array} \quad \text{s. 3. Beisp., A, b.}\right)$$

$p=0{,}007751938$.

Die vollständige Rechnung setzt hier:

$$lg\,1=0=10{,}00\ldots-10.$$

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer:

$$lg\,1=0{,}00\ldots$$
$$lg\,129=2{,}11\ldots$$

Um subtrahieren zu können und zugleich 0 als positive Kennziffer zu erhalten:

$$\begin{array}{rl} & 3{,}0000000-3 \\ & 2{,}1105897 \\ \hline lg\,p= & 0{,}8894103-3. \end{array}$$

p beginnt mit der 3. Decimalstelle.

10. Beispiel. Um $39\frac{4363}{19867}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln, ist nur $\frac{4363}{19867}$ zu berechnen und dann 39 Ganze hinzuzufügen.

$$\begin{array}{rl} lg\,4363 & =3{,}6397852 \\ lg\,19867 & =4{,}2981323 \\ \hline lg\,\frac{4363}{19867} & =9{,}3416529 \end{array}$$

$$\text{Daher } \frac{4363}{19867}=0{,}2196104.$$

Die gegebene Zahl ist mithin 39,2196104.

11. Beispiel. $r=\frac{1}{0{,}039481}$.

A. Mit -10.

$$\begin{array}{rl} lg\,1 & =0{,}00\ldots \\ lg\,0{,}039\ldots & =8{,}5963881 \\ \hline lg\,r & =1{,}4036119 \end{array}$$

$r=25{,}328643$.

Vollständig:

$$\begin{array}{r} 10{,}00\ldots\ -10 \\ 8{,}596\ldots -10 \\ \hline lg\, r = 1{,}4036119. \end{array}$$

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer:

$$\begin{array}{rl} lg\, 1 & = 1{,}000\ldots -1 \\ lg\, 0{,}039\ldots & = 0{,}596\ldots -2 \\ \hline lg\, r & = 0{,}403\ldots +1 \end{array}$$

oder $lg\, r = 1{,}4036119$.

12. Beispiel. $s = \frac{7{,}08179 \cdot 0{,}000589873}{422{,}19 \cdot 0{,}098948}$.

Nach dem letzten Beispiel im 1. Zus. des 16. Satzes:

$$\begin{array}{rl} lg\, 7{,}08\ldots & = 0{,}8501431 \\ lg\, 0{,}0058\ldots & = 7{,}7707585 \\ \hline lg\, \text{Zähler} & = 8{,}6209016 \end{array} \Big\} \text{add.} \qquad \begin{array}{rl} lg\, 422{,}19 & = 2{,}6255079 \\ lg\, 0{,}098\ldots & = 8{,}9954070 \\ \hline lg\, \text{Nenner} & = 1{,}6209149 \end{array} \Big\} \text{add.}$$

$$\begin{array}{rl} lg\, \text{Zähler} & = 8{,}6209016 \\ lg\, \text{Nenner} & = 1{,}6209149 \\ \hline lg\, s & = 6{,}9999867. \end{array} \Big\} \text{subtr.}$$

$s = 0{,}0009999693$.

Anmerkung. Die Beispiele 9, 11 u 12 werden im 30. Satze einfacher gerechnet.

13. Beispiel. $t = \frac{0{,}0000234567}{765432100}$.

Da das Resultat offenbar ein Decimalbruch wird, der nach der 9. Decimalstelle beginnt, so kann hier die negative Kennziffer — 10 nicht benutzt werden. Daher:

$$\begin{array}{rl} lg\, \text{Zähler} & = 0{,}3702670 - 5 \\ lg\, \text{Nenner} & = 8{,}8839067 \end{array}$$

Hier sind die Kennziffern des Minuend um 9 zu erhöhen:

$$\begin{array}{r} 9{,}3702670 - 14 \\ 8{,}8839067 \\ \hline lg\, t = 0{,}4863603 - 14. \end{array}$$

t beginnt in der 14. Decimalstelle.

30. Die dekadische Ergänzung (arithmetisches Complement). Ist der Dividend oder Divisor eines zu berechnenden Quotient ein Produkt (s. das 12. Beispiel des 29. Satzes) oder der Dividend $= 1$ (s. das 9. und 11. Beispiel des 29. Satzes), so läfst sich die Rechnung mittelst der dekadischen Ergänzung des Logarithmus bedeutend abkürzen. Hierbei mufs jedoch die unveränder-

liche negative Kennziffer — 10 vorausgesetzt werden, da die veränderliche negative Kennziffer wenig Vorteile bieten würde.

I. **Um die dekadische Ergänzung eines Logarithmus zu bilden,** subtrahiert man denselben von 10,0000000 — 10.

1. Beispiel. $lg\, 58{,}22 = 1{,}7650722$; folglich

$$\left.\begin{array}{r} 10{,}0000000 - 10 \\ 1{,}7650722 \end{array}\right\} \text{subtr.}$$

dekad. Ergänz. des $lg\, 58{,}22 = 8{,}2349278 - 10$.

Die linke Seite dieser Gleichung kürzt man mit *d. E. lg* 58,22 oder *c. lg* 58,22 (d. i. *complementum* des Logarithmus) oder noch einfacher mit $lg'\, 58{,}22$ ab.

2. Beispiel. $lg\, 0{,}047642 = 8{,}6779900 - 10$; folglich:

$$\left.\begin{array}{r} 10{,}0000000 - 10 \\ 8{,}6779900 - 10 \end{array}\right\} \text{subtr.}$$

$lg'\, 0{,}047642 = 1{,}3220100$.

Aus diesen Beispielen läfst sich die nachstehende einfache **Regel** für das Bilden der dekadischen Ergänzung ableiten:

> Man subtrahiert die positive Kennziffer und alle Ziffern der Mantisse (mit Ausnahme der letzten) von 9, die letzte, Einheiten enthaltende Stelle der Mantisse jedoch von 10. Ferner erhält die dekad. Ergänz. — 10 als negative Kennziffer, wenn der gegebene Logarithmus ein positiver ist, dagegen wird die dekad. Ergänz. ein positiver Logarithmus (ohne — 10), wenn der gegebene Logarithmus — 10 als Kennziffer besitzt.

3. Beispiel. $lg\, 6980 = 3{,}8438554$.

Um $lg'\, 6980$ zu bilden, subtrahiere 3 von 9 = 6, 8 von 9 = 1, 4 von 9 = 5, 3 von 9 = 6, 8 von 9 = 1, 5 von 9 = 4, 5 von 9 = 4, 4 von **10** = 6. Daher:

$$lg'\, 6980 = 6{,}1561446 - 10.$$

Siehe auch das 1. Beispiel.

4. Beispiel. $lg\, 0{,}0026595 = 7{,}4248000 - 10$.

Um lg' zu bilden: 7 von 9 = 2, 4 von 9 = 5, 2 von 9 = 7, 4 von 9 = 5, die **letzte** Stelle 8 von **10** = 2; denn

$$\left.\begin{array}{r} 10{,}0000000 \\ 7{,}4248000 \end{array}\right\} \text{subtr.}$$

$$2{,}5752000.$$

Daher $lg'\, 0{,}0026595 = 2{,}5752000$ (der Log. pos.!).

Siehe auch das 2. Beispiel.

II. Anwendung der dekadischen Ergänzung.

Anstatt einen Logarithmus (d. i. den Logarithmus einer im Divisor befindlichen Zahl) zu subtrahieren, addiert man seine dekadische Ergänzung.

Beweis. $lg \frac{a}{b} = lg\, a - lg\, b$

$= lg\, a + 10 - 10 - lg\, b$

$= lg\, a + [(10{,}0000000 - 10) - lg\, b]$, d. i.

$$lg \frac{a}{b} = lg\, a + lg'\, b.$$

Die Berechnung des 12. Beispiels im 29. Satze vereinfacht sich damit in folgender Weise:

$lg\, 7{,}08179 = 0{,}8501431$ } unverändert, weil die
$lg\, 0{,}000589\ldots = 7{,}7707585 - 10$ } Zahlen im Zähler!
$lg'\, 422{,}19 = 7{,}3744921 - 10$
$lg'\, 0{,}098948 = 1{,}0045930$

$lg\, s = 6{,}9999867 - 10$ (statt $16{,}99\ldots - 20$).
$s = 0{,}0009999693.$

Wie in den Beispielen des 28. und 29. Satzes läfst auch hier der praktische Rechner die negative Kennziffer -10 überall weg.

2. Beispiel. $x = \frac{0{,}19662}{34{,}272 \cdot sin\, 27^{\circ}\, 50'\, 0''}.$

$lg\, 0{,}19662 = 9{,}2936277$
$lg'\, 34{,}272 = 8{,}4650606$ (denn $lg\, 34{,}272 = 1{,}5349394$)
$lg'\, sin\, 27^{\circ}\, 50'\, 0'' = 0{,}3307750$ (s. S. 505, 1. Zahl links oben).

$lg\, x = 8{,}0894633.$
$x = 0{,}0122875.$

Bei den 3 ersten (den mit *sin.*, *cos.*, *tang.* überschriebenen) Spalten des Bruhns'schen Handbuchs S. 188 bis 607 ist stets -10 zu ergänzen, folglich wird $lg'\, sin$ (siehe vorstehende Rechnung) positiv.*)

*) Die in §. 28, E, 5 und im lelzten Beispiele des §. 41 aufgeführte dekadische Ergänzung kann mit Vorteil bei trigonometrischen Logarithmen angewandt werden, wenn die Winkel nicht unmittelbar in den Tafeln enthalten sind. Man schreibt nämlich die in den Tafeln gefundenen Logarithmen zu den zu addierenden Logarithmen, berechnet dann die aus den Sekunden berechneten Proportionalteile, um diese besonders zu addieren und zwar unverändert, wenn *sin* und *tg* im Zähler, *cos* und *cot* im Nenner

1. Zusatz. $-lg\,b = +lg'\,b$. Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorstehenden Beweise, wenn man in

$$lg\,a - lg\,b = lg\,a + lg'\,b$$

den $lg\,a = 0$ setzt.

2. Zusatz. $lg\,\frac{a}{b} = lg'\,\frac{b}{a}$.

Beweis. $lg\,\frac{a}{b} = -lg\,\frac{b}{a}$ (s. 16. Satz, 3. Zus.) $= lg'\,\frac{b}{a}$ (siehe vorstehenden 1. Zus.).

1. Beispiel. $lg\,\frac{4}{7} = lg'\,\frac{7}{4} = lg'\,1{,}75$. Diese dekadische Ergänzung kann unmittelbar aus den Tafeln abgelesen werden.

2. Beispiel. $lg\,\frac{5}{677} = lg'\,\frac{677}{5} = lg'\,135{,}4$.

3. Zusatz. $lg\,\frac{1}{a} = lg'\,a$.

Beweis. $lg\,\frac{1}{a} = lg'\,\frac{a}{1}$ (s. vorst. 2. Zus.) $= lg'\,a$.

1. Beispiel. $x = \frac{1}{246{,}9602}$.

$lg\,x = lg'\,246{,}9602 = 7{,}6073730$ (oder vollst. $7{,}6073730 - 10$).
Daher $x = 0{,}004049235$.

2. Beispiel. $y = \frac{1}{0{,}0720376}$.

$lg\,x = lg'\,0{,}0720376 = 1{,}1424408$. Daher $x = 13{,}88164$.

3. Beispiel. Um $\frac{1}{589}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln, sucht man $lg\,589$ (= 7701153) auf, bildet von der Mantisse allein

---

sich befinden, dagegen ihre dekadische Ergänzung (mit △, s. §. 28, E, 5), wenn *sin* und *tg* im Nenner, *cot* und *cos* im Zähler sich befinden.

$$x = \frac{0{,}7654 \,.\, cos\,76^{o}\,20'\,14'',56}{cot\,32^{o}\,47'\,23'',15 \,.\, sin\,15^{o}\,20'\,8'',37}.$$

$lg\,0{,}7654 = 9{,}8838\,885$
$lg\,cos\,76^{o}\,20'\,10'' = 9{,}3733\,273$
△605; denn $86{,}6 \,.\, 4'',56 = 395$.
$lg'\,cot\,32^{o}\,47'\,20'' = 9{,}8090\,083$
$146 = 46{,}3 \,.\, 3'',15$.
$lg'\,sin\,15^{o}\,20'\,0'' = 0{,}5776\,824$
△358; $76{,}7 \,.\, 8'',37 = 642$.

$lg\,x = 9{,}6438\,174$.
$x = 0{,}4403697$.

die dekadische Ergänzung (= 2298847), um für diese (Seite 19) den Numerus 16978 zu finden. Da nun $\frac{1}{589}$ offenbar in der 3. Decimalstelle beginnt, so ist $\frac{1}{589} = 0{,}0016978$.

4. Beispiel. $z = \frac{1}{0{,}79257 \cdot 199{,}09}$.

$$lg' \, 0{,}79257 = 0{,}1009624$$
$$lg' \, 199{,}09 = 7{,}7009506$$
$$lg \, z = 7{,}8019130.$$
$$z = 0{,}00633743.$$

Anmerkung. Selbstverständlich wendet man die dekadische Ergänzung bei der einfachen Form $\frac{a}{b}$ nicht an, sondern vermindert $lg\, a$ um $lg\, b$.

31. Berechnung der Potenz.

1. Beispiel. $x = 6{,}57489^4$.

$$lg\, x = lg\left(6{,}57489^4\right) = 4\, lg\, 6{,}57489 \quad \text{(s. 18. Satz)}$$
$$lg\, 6{,}57489 = 0{,}8178885 \; (\cdot 4$$
$$lg\, x = 3{,}2715540$$
$$x = 1868{,}762.$$

Da die Zahl 0,8178885 in der 7. Decimalstelle nahe um $\frac{1}{2}$ Einheit falsch sein kann, der Fehler aber noch mit 4 multipliciert wird, so kann $lg\, x$ in der 7. Decimalstelle um $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ Einheiten falsch sein, daher ist auch x in den letzten Stellen unsicher.

2. Beispiel. $y = (7\tfrac{49}{51})^3$.

Setze $y = \left(\frac{406}{51}\right)^3$; daher:

$$\left.\begin{aligned} lg\, 406 &= 2{,}6085260 \\ lg\, 51 &= 1{,}7075702 \end{aligned}\right\} \text{subtr.}$$
$$0{,}9009558 \cdot 3$$
$$lg\, y = 2{,}7028674.$$
$$y = 504{,}5072.$$

3. Beispiel. $z = \left(1 + \frac{5\frac{3}{4}}{100}\right)^7$.

Setze $\left(1 + \frac{5,75}{100}\right)^7 = (1 + 0,0575)^7 = 1,0575^7$; daher:

$$lg\ 1,0575 = 0,0242804\ (\cdot 7$$

$$lg\ z = 0,1699628.$$

$z = 1,47898$.

4. Beispiel. $u = \left(1 + \frac{3\frac{6}{7}}{100}\right)^{13}$.

Hier verwandelt man $\frac{6}{7}$ nicht in einen Decimalbruch, weil die Basis mehr als 5 Ziffern erhalten würde. Daher

$$\left(1 + \frac{27}{700}\right)^{13} = \left(\frac{727}{700}\right)^{13}.$$

$$lg\ 727 = 2,8615344$$
$$lg\ 700 = 2,8450980$$
$$0,0164364 \cdot 13$$
$$493092$$
$$lg\ u = 0,2136732.$$

$u = 1,635585$.

5. Beispiel. $v = 9438,57^{0,23}$.

$$lg\ 9438,57 = 3,9749062\ (\cdot 0,23$$
$$79498124$$
$$119247186$$
$$lg\ v = 0,914228426.$$

Da die Tafeln nur 7stellige Mantissen zulassen, die durch irgendwelche Rechnung erhaltene 8., 9. . . . Decimalstelle auch im allgemeinen falsch sein mufs (s. 26. Satz, II, 1. Beisp.), so ist hier zu setzen: $lg\ v = 0,9142284$.

$v = 8,20783$.

Anmerkung. Beispiele, bei denen der Exponent ein gemeiner Bruch ist, enthält der 32. Satz.

6. Beispiel. $w = 0,077887^3$.

A. Mit -10.

a. Vollständige Rechnung.

$$lg\ 0,077887 = (8,8914650 - 10)\ (\cdot 3$$

$$lg\ w = 26,6743950 - 30.$$

Da die Kennziffer stets -10 sein mufs, so sind hier beide Kennziffern um 20 zu vermindern. Daher:

$$lg\, w = 6{,}6743950 - 10.$$

$$w = 0{,}0004724926.$$

b. Abgekürzt.

Man schreibt den negativen Logarithmus ohne -10 und läfst die beim Multiplicieren entstehenden Zehner der positiven Kennziffer einfach weg. Dem so entstehenden Logarithmus der Potenz ist stets -10 hinzuzufügen, denn eine negative Zahl multipliciert mit einer positiven Zahl mufs stets eine negative Zahl geben. Daher:

$$lg\, 0{,}077887 = 8{,}8914650\ (\cdot 3$$
$$lg\, w = 6{,}6743950 - 10.$$

B. Mit verändel. negat. Kennziffer entweder:

$$lg\, 0{,}07\ldots = (0{,}8914650 - 2)\ (\cdot 3$$
$$lg\, w = 2{,}6743950 - 6.$$

Die positive Kennziffer durch Verminderung beider Kennziffern auf 0 gebracht:

$$lg\, w = 0{,}6743950 - 4.$$

w beginnt also mit der 4. Decimalstelle.

Oder: $$lg\, 0{,}07\ldots = \overline{2}{,}8914650\ (\cdot 3$$
$$\overline{4}{,}6743950.$$

Die Multiplication ergab hier 26 Zehntel. Von diesen sind 6 Zehntel zu behalten, die 2 aber zu dem folgenden Produkt $3 \cdot \overline{2}$, d. i. zu $3(-2) = -6$ zu addieren. Mithin ist

$$-6 + 2 = -4 = \overline{4}$$

die gesuchte Kennziffer.

7. Beispiel. $m = \left(\frac{0{,}09783}{0{,}13579}\right)^6$. (Siehe 18. Satz, 1. Zus., letztes Beisp.).

A. Mit -10, abgekürzt.

$$lg\, 0{,}09\ldots = 8{,}9904721$$
$$lg\, 0{,}13\ldots = 9{,}1328678$$
$$9{,}8576043 \cdot 6$$
$$lg\, m = 9{,}1456258.$$

$$m = 0{,}1398382.$$

B. Mit veränderl. negativer Kennziffer.

$$lg\, 0{,}09\ldots = 0{,}9904721 - 2$$
$$lg\, 0{,}13\ldots = 0{,}1328678 - 1$$
$$(0{,}8576043 - 1)\cdot 6$$
$$lg\, m = 5{,}1456258 - 6 \text{ oder}$$
$$lg\, m = 0{,}1456258 - 1.$$
$$m = 0{,}139\ldots$$

8. Beispiel. $n = \frac{1}{0{,}0088773}\left(\frac{8{,}3914\cdot 0{,}097139^4}{0{,}000025599\cdot 1{,}3815392^3}\right)^5.$

Es ist

$$lg\left(\frac{a}{b^n}\right)^r = r\, lg\,\frac{a}{b^n} = r\left[lg\, a - lg\, b^n\right] = r\left[lg\, a - n\, lg\, b\right]$$
$$= r\left[lg\, a + n\,(-\,lg\, b)\right] = r\left[lg\, a + n\, lg'\, b\right].$$

Folglich kann man die dekadische Ergänzung auch auf eingehüllte Zahlen, wie hier 0,000025509 und $1{,}38^3$, ausdehnen.

$$lg\, 0{,}097139 = 8{,}9873936\,(\cdot 4$$
$$5{,}9495744$$
$$lg\, 8{,}3914 = 0{,}9238344$$
$$lg'\, 0{,}000025599 = 4{,}5917770$$
$$lg'\, 1{,}3815392 = 9{,}8596368\,(\cdot 3 = 9{,}5789104$$
$$1{,}0440962\cdot 5\ldots a$$
$$lg\,(\ldots)^5 = 5{,}2204810 \quad \ldots b$$
$$lg\, 0{,}0088773 = 7{,}9482809 \text{ subtr.} \left[n = \frac{(\quad)^5}{0{,}0088..} \text{ gedacht!}\right]$$
$$lg\, n = 7{,}2722001.$$

Da die Logarithmen a und b positive sind und der zu b gehörige Numerus noch durch 0,0088 dividiert wird (s. die Aufgabe), so ist $lg\, n$ positiv. Folglich:

$$n = 18715440.$$

9. Beispiel. $p = \frac{1}{0{,}86937^7}$;

$$lg'\, 0{,}86937 = 0{,}0607954\,(\cdot 7$$
$$lg\, p = 0{,}4255678.$$
$$p = 2{,}664206.$$

10. Beispiel. $q = \frac{1}{2{,}9368^5}$;

$$lg' 2{,}9368 = 9{,}5321256 \; (\cdot 5$$
$$lg\, q = 7{,}6606280.$$
$$q = 0{,}0045775.$$

Hier rechnet man:

$$9{,}5321256 \cdot \frac{10}{2} = \frac{95{,}321256}{2} = 7{,}66 \ldots$$

11. Beispiel. $r = \left(\frac{8}{9}\right)^{11}$.

Man denke sich $r = \left(\frac{1}{1\frac{1}{8}}\right)^{11} = \frac{1}{1{,}125^{11}}$; daher;

$$lg' 1{,}125 = 9{,}9488475 \; (\cdot 11$$
$$lg\, r = 9{,}4373225.$$
$$r = 0{,}27373.$$

12. Beispiel. $s = 197{,}354^{-2}$.

Man setze dafür $\frac{1}{197{,}354^2}$.

$$lg' 197{,}354 = 7{,}7047541 \; (\cdot 2$$
$$lg\, s = 5{,}4095082$$
$$s = 0{,}00002567486.$$

13. Beispiel. $t = \frac{1}{167{,}29 \cdot 0{,}76899^5}$.

$$lg' 0{,}76899 = 0{,}1140793 \; (\cdot 5$$
$$\left.\begin{array}{r} 0{,}5703965 \\ lg' 167{,}29 = 7{,}7765300 \end{array}\right\} \text{add.}$$
$$lg\, t = 8{,}3469265.$$
$$t = 0{,}02222934.$$

14. Beispiel. $a = 1\frac{31}{63} \cdot \left(\frac{871}{873}\right)^{900}$.

Um den hier sehr unbequemen negativen Logarithmus zu vermeiden, setze man:

$$a = \frac{94}{63\left(\frac{873}{871}\right)^{900}}. \quad \text{(S. §. 57, 16, 2. Zus.)}$$

$$lg\, 873 = 2{,}9410142$$
$$lg\, 871 = 2{,}9400182$$
$$0{,}0009960 \; (\cdot 900$$
$$0{,}8964000 \ldots \alpha$$

$$\begin{aligned} & 0{,}8964000 \ldots \alpha \text{ (wiederholt)} \\ lg\,63 = {} & 1{,}7993405 \ldots \beta \\ lg\,94 = {} & 1{,}9731279 \\ & 2{,}6957405 \text{ (Summe von } \alpha \text{ u. } \beta) \text{ subtr.} \\ lg\,a = {} & 9{,}2773874. \\ a = {} & 0{,}1894032. \end{aligned}$$

Wie unsicher die letzten Stellen eines solchen Resultates infolge der Multiplication mit einer gröfsern Zahl (hier 900) werden können, mag durch die Berechnung derselben Aufgabe mit 10stelligen Mantissen gezeigt werden:

$$\begin{aligned} lg\,873 = {} & 2{,}9410142437 \\ lg\,871 = {} & 2{,}9400181550 \\ & 0{,}0009960887 \;(\cdot 900 \\ & 0{,}8964798300 \\ lg\,63 = {} & 1{,}7993405495 \\ lg\,94 = {} & 1{,}9731278535 \\ & 2{,}6958203795 \\ lg\,a = {} & 9{,}2773074740. \end{aligned}$$

Hier ist nun $lg\,a = 9{,}2773075$ in der letzten Decimalstelle vollkommen richtig und man findet:

$$a = 0{,}1893684.$$

Das zuerst berechnete a ist mithin schon in der 4. Decimalstelle falsch.

15. Beispiel. $b = \left(\frac{13}{17}\right)^{0,7} \cdot \left(\frac{7}{123}\right)^{0,09}$.

Entweder: $b = \dfrac{1}{\left(\frac{17}{13}\right)^{0,7} \cdot \left(\frac{123}{7}\right)^{0,09}}$.

$$\begin{aligned} lg\,17 = {} & 1{,}2304489 \\ lg\,13 = {} & 1{,}1139434 \\ & 0{,}1165055 \cdot 0{,}7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} lg\,123 = {} & 2{,}0899051 \\ lg\,7 = {} & 0{,}8450980 \\ & 1{,}2448071 \cdot 0{,}09 \end{aligned}$$

$$lg\left(\frac{17}{13}\right)^{0.7} = 0{,}0815539 \text{ (7 Stell.)} \qquad lg\left(\frac{123}{7}\right)^{0,09} = 0{,}1120326 \text{ (7 Stellen)}$$

$$+\,lg\left(\frac{123}{7}\right)^{0,09} = 0{,}1120326$$

$$lg \text{ Nenner} = 0{,}1935865.$$

Da $lg\,b = lg'$ Nenner, so ist $lg\,b = 9{,}8064135$

$$b = 0{,}6403443.$$

Oder (s. die Aufgabe in der ursprünglichen Form):

$$lg\,13 = 1{,}1139434$$
$$lg\,17 = 1{,}2304489$$
$$(9{,}8834945 - 10)\cdot 0{,}7$$
$$= (-0{,}1165055)\cdot 0{,}7$$
[s. 25. Satz, IV]
$$lg\left(\frac{13}{17}\right)^{0,7} = -0{,}0815539 \text{ (7 Stellen)}$$
$$= 10 - 0{,}0815539 - 10$$
[s. 24. Satz, V)

$$lg\,7 = 0{,}8450980$$
$$lg\,123 = 2{,}0899051$$
$$(8{,}7551929 - 10)\cdot 0{,}09$$
$$= (-1{,}2448071)\cdot 0{,}09$$
$$lg\left(\frac{7}{123}\right)^{0,09} = -0{,}1120326$$
$$= 10 - 0{,}1120326 - 10$$
$$= 9{,}8879674 - 10$$

$$lg\left(\frac{13}{17}\right)^{0,7} = 9{,}9184461 - 10$$
$$lg\left(\frac{7}{123}\right)^{0,09} = 9{,}8879674 - 10$$
add.

$$lg\,b = 9{,}8064135 - 10 \text{ (wie oben).}$$

16. Beispiel. $c = \dfrac{79{,}586\cdot 0{,}979^{113}}{0{,}618749\cdot 3{,}5943^{4}}$.

Zuerst bestimmt man

$$lg\left(0{,}979^{113}\right) = 113\,(0{,}9907827 - 1) = 111{,}9584451 - 113.$$

Beide Kennziffern um 103 vermindert erhält man:

$$lg\left(0{,}979^{113}\right) = 8{,}9584451\ (-10)$$
$$lg\,79{,}586 = 1{,}9008367$$
$$lg'\,0{,}618749 = 0{,}2084855$$
$$lg\,3{,}5943 = 9{,}4443857\ (\cdot 4 = 7{,}7775428$$
$$lg\,c = 8{,}8453101.$$
$$c = 0{,}0700342.$$

17. Beispiel. $d = 0{,}046985^{10}$.

$$lg\,0{,}046985 = (0{,}6719592 - 2)\ (\cdot 10$$
$$lg\,d = 6{,}719592 - 20$$
$$\text{oder } lg\,d = 0{,}7195920 - 14.$$
$$d = 0{,}00000000000000524315.$$

(S. die Bemerkung zum 13. Beisp. des 29. Satzes.)

18. Beispiel.

$$e = \frac{0{,}004396^{2,06}}{0{,}015839^{1,4}} = \frac{\left(\dfrac{1}{0{,}015839}\right)^{1,4}}{\left(\dfrac{1}{0{,}004396}\right)^{2,06}}.$$

$$lg\frac{1}{0{,}015839} = lg'\,0{,}015839 = 1{,}8002722\;(\cdot 1{,}4$$

$$\begin{array}{r} 72010888 \\ \hline 2{,}5203811 \end{array}$$

$$lg\frac{1}{0{,}004396} = lg'\,0{,}004396 = 2{,}3569423\;(\cdot 2{,}06$$

$$\begin{array}{r} 4\,7138846 \\ 141416538 \\ \hline 4{,}8553011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2{,}5203811 \\ 4{,}8553011 \\ \hline \end{array}$$

$$lg\, e = 7{,}6650800.$$

$$e = 0{,}004624662.$$

19. Beispiel. $f = \frac{0{,}07836^{311}}{0{,}009547^{170}}$.

Entweder, um mit positiven Logarithmen zu rechnen, wie im vorigen Beispiel,

oder: $lg\, f = 311 \cdot lg\, 0{,}07836 - 170\; lg\, 0{,}009547$
$= 311 \cdot (8{,}8940944 - 10) - 170\,(7{,}9798669 - 10)$
$= 311 \cdot (-1{,}1059056) - 170\,(-2{,}0201331)$
$= 170 \cdot 2{,}0201331 - 311 \cdot 1{,}1059056$
$= \begin{cases} 343{,}4226270 \\ -343{,}9366416 \end{cases}$

$lg\, f = 9{,}4859854.$

$f = 0{,}306186.$

20. Beispiel. $h = 0{,}6736617^{0{,}5534398}$.

$lg\, h = 0{,}5534398 \cdot lg\, 0{,}6736617$
$= 0{,}5534398 \cdot (9{,}8284419 - 10)$
$lg\, h = -\,0{,}5534398 \cdot 0{,}1715581.$

Dieses Produkt mag wieder mit Logarithmen berechnet werden (s. 28. Satz, 1. u. 3. Beispiel).

$lg\, 0{,}5534398 = 9{,}7430703$
$lg\, 0{,}1715581 = 9{,}2344112$

lg Prod. $= 8{,}9774815.$

Das Produkt daher $= 0{,}09494707$ und folglich:

$lg\, h = -\,0{,}0949471$ (7stellig!)
$= 10 - 0{,}0949471 - 10$ (s. 25. Satz, V).

$lg\, h = 9{,}9050529 - 10$

$h = 0{,}803624.$

32. Berechnung der Wurzel.

1. Beispiel. $x = \sqrt[3]{87654}$.

$$lg\,x = lg\,\sqrt[3]{87654}$$

$$lg\,x = \frac{lg\,87654}{3} \quad \text{(s. 20. Satz).}$$

$$lg\,87654 = 4{,}9427717 \;(:3$$
$$lg\,x = 1{,}6475906$$

$$x = 44{,}42123.$$

2. Beispiel. $y = \sqrt{\frac{0{,}69837}{4712{,}9 \cdot 0{,}0098613^3}}$.

$$lg'\,0{,}0098613 = 2{,}0060658 \;(\cdot 3$$
$$6{,}0181974$$
$$lg'\,4712{,}9 = 6{,}3267118$$
$$lg\,0{,}69837 = 9{,}8440856$$
$$2{,}1889948 : 2$$
$$lg\,y = 1{,}0944974$$
$$711$$
$$263{,}0.$$

$$y = 12{,}43075.$$

3. Beispiel. $z = \sqrt{12\tfrac{47}{113}} = \sqrt{\frac{1403}{113}}$.

$$lg\,1403 = 3{,}1470577$$
$$lg\,113 = 2{,}0530784$$
$$1{,}0939793 : 2$$
$$lg\,z = 0{,}5469897.$$

$$z = 3{,}523625.$$

Anmerkung. $\sqrt{12\tfrac{5}{8}}$ würde man in $\sqrt{12{,}625}$ verwandeln.

4. Beispiel. $u = \sqrt[7]{0{,}0359}$.

A. Mit -10.

a. Vollständige Rechnung.

$$lg\,0{,}0359 = 8{,}5550944 - 10.$$

Dieser Logarithmus durch 7 dividiert, würde

$$1{,}22\ldots \quad -1{,}428\ldots,$$

also eine unbrauchbare negative Kennziffer geben. Da diese stets -10 werden soll, so hat man die beiden Kennziffern des Loga-

rithmus der Wurzelbasis vor der Division um 60 zu erhöhen. Man erhält:

$$(\mathbf{68},5550944 - \mathbf{70}) : 7$$

$$lg\, u = 9,7935849 - 10.$$

$$u = 0,6217057.$$

Wäre $\sqrt[4]{0,0359}$ gegeben, so hätte jener

$$lg\, 0,0359 = 8,55 \ldots - 10$$

in den beiden Kennziffern um 30 erhöht werden müssen:

$$= \mathbf{38},55 \ldots - \mathbf{40}$$

Die Division durch 4 würde alsdann die gewünschte Kennziffer $\ldots\ldots - 10$ geben.

Wäre allgemein die $\sqrt[n]{}$ aus einem echten Bruche zu berechnen, wobei man sich der negativen Kennziffer 10 (also 1 Zehner) bediente, so sind beide Kennziffern um $n - 1$ Zehner zu erhöhen, damit sich die negative Kennziffer zunächst in n Zehner verwandelt. Wird der so veränderte Logarithmus durch den Wurzelexponent n dividiert, so erhält man als negative Kennziffer (des Logarithmus der gesuchten Wurzel) n Zehner : $n = 1$ Zehner $= 10$, wie sie es sein soll.

Hieraus folgt die allgemeine Regel:

> Ist ein Logarithmus mit der negativen Kennziffer 10 durch die ganze Zahl n zu dividieren, so hat man zuvor beide Kennziffern um $n - 1$ Zehner zu erhöhen.

b. Abgekürzt.

Man läfst die negative Kennziffer -10 (wie bei allen andern Operationen) stets weg. Ist ein solcher Logarithmus durch die ganze Zahl n zu dividieren, so setzt man vorher vor die positive Kennziffer $n - 1$ als Zehner. Bei dem durch die Division erhaltenen Logarithmus (den Logar. der gesuchten Wurzel) hat man sich alsdann stets die negative Kennziffer -10 hinzuzudenken, denn eine negative Zahl (hier der negative Logar.) durch eine positive Zahl (den Wurzelexponent) dividiert, mufs wieder eine negative Zahl als Quotient geben.

Diese Regel ist unverändert die in dem vorstehenden Satze a entwickelte.

Um also $\sqrt[7]{0,0359}$ zu berechnen, ist wegen des Wurzelexponent 7 vor die Kennziffer 8 des

$$lg\, 0,0359 = 8,5550944$$

$7 - 1 = 6$ als Zehner zu setzen. Mithin:

$$\mathbf{6}8,5550944 : \mathbf{7}$$

$$lg\, u = 9,7935849 \text{ (wie in a).}$$

B. Mit veränderlicher negativer Kennziffer.

$$lg\,0{,}0359 = 0{,}5550944 - 2.$$

Damit dieser Logarithmus nach der Division durch 7: 0 als positive, eine ganze Zahl als negative Kennziffer giebt, hat man die beiden Kennziffern um so viel zu erhöhen, dafs aus der negativen Kennziffer das nächsthöhere Vielfache des Divisor 7 wird.

Hier sind mithin beide Kennziffern um 5 zu erhöhen:

$$(5{,}5550944 - 7)\ (:7$$

$$lg\,u = 0{,}7935849 - 1.$$

$$u = 0{,}621\ldots$$

Anmerkung. Schreibt man statt $(0{,}5550944 - 2):7$ die abgekürzte Form: $\overline{2},5550944:7$ (s. 24. Satz, II, 1. Form),

so behält man zunächst $\overline{1}$, als Quotient.

Denn bei der Division einer dekadischen Zahl mittelst der Partialdivision hat man stets die nächstkleinere ganze Zahl als Quotient zu nehmen. In bezug auf $\overline{2}:7$, d. i. $-2:7 = -\frac{2}{7}$ ist aber -1 die nächstkleinere ganze Zahl. Ist die Stelle des Quotient (hier -1) bestimmt, so hat man bekanntlich das Produkt aus dieser Stelle und dem Divisor vom Dividend abzuziehen (hier $\overline{7}$ von $\overline{2}$, d. i. -7 von $-2 = +5$) und die Division in der bekannten Weise fortzusetzen. Daher:

$$lg\,u = \overline{2},5550944 : 7 = \overline{1},79\ldots$$

$$\begin{array}{l}\overline{7}\\ \hline 55\\ 49\\ \hline \;\;65\end{array}$$

d. i. $lg\,u = 0{,}79\ldots - 1.$

5. Beispiel. $v = \sqrt[3]{0{,}00000023519}.$

A. Mit -10, abgekürzt,

$$lg\,0{,}00000023519 = \overline{3},3714189\ (:3.$$

Da der Logarithmus negativ ist, mithin der um 1 verminderte Divisor als Zehner vorzusetzen ist, so hat man sich

$_2\overline{3},3714189$ (:3 zu denken.

$$lg\,v = \overline{7},7904730.$$

$$v = 0{,}00617267.$$

B. Mit veränderlicher negativer Kennziffer.

$$lg\, 0{,}00000023519 = 0{,}3714189 - 7.$$

Damit aus der negativen Kennziffer 7 das nächsthöhere Vielfache 9 des Divisor 3 wird, hat man beide Kennziffern um 2 zu erhöhen.

$$\underline{(2{,}3724189 - 9)\ (:3}$$

$$lg\, v = 0{,}7904730 - 3.$$

$$v = 0{,}00617 \ldots$$

Oder:

$$\bar{7}{,}3714189 : 3 = \bar{3}{,}79 \ldots$$

$$\underline{\bar{9}}$$

$$23 \qquad\qquad \text{d. i } 0{,}79 \ldots - 3,$$

$$\underline{21} \qquad\qquad \text{wie vorher.}$$

$$27.$$

6. Beispiel. $w = \dfrac{1}{\sqrt{1{,}23789^{13}}}.$

A. Mit -10.

$$lg'\, 1{,}23789 = 9{,}9073179 \cdot 13$$

$$\underline{2\,97219537}$$

$$\underline{8{,}7951327} : 2 \ \text{(gedacht: } 18{,}79 \ldots : 2)$$

$$lg\, w = 9{,}3975664.$$

$$w = 0{,}249785.$$

B. Mit veränderlicher negativer Kennziffer.

$$lg\, 1{,}23789 = 0{,}0926821 \cdot 13$$

$$\underline{2780463}$$

$$\underline{1,\ 2048673} : 2$$

$$\left.\begin{array}{l} lg\, 1 = 1,\ 0 \ldots \quad -1 \\ lg\, \sqrt{\ } = 0,\ 6024337 \end{array}\right\}\ \text{subtr.}$$

$$lg\, w = 0,\ 3975663 - 1.$$

$$w = 0{,}249785.$$

7. Beispiel. $m = \dfrac{1}{\sqrt[8]{0{,}00000047727}}.$

$$lg'\, 0{,}00000047727 = \underline{6{,}3212359\ (:8}$$

$$lg\, m = 0{,}7901545.$$

$$m = 6{,}168144.$$

Anmerkung. Hier ist nicht 7 6,321 ... : 8 zu dividieren, da 6,321 ... ein positiver Logarithmus ist.

8. Beispiel. $n = \sqrt[6]{\frac{941,87}{\sqrt[4]{3,8899}}}$.

$lg'\,3,8899 = 9,4100616$ (:4 (gedacht: 39,41 . . . :4)

$9,8525154$
$lg\,941,87 = 2,9739910$ } add.

$2,8265064$ (:6

$lg\,n = 0,4710844$.

$n = 2,958587$.

9. Beispiel. $p = \frac{1}{\sqrt[9]{71,63\sqrt[5]{0,0017185}}}$.

$lg'\,0,0017185 = 2,7648505 : 5$

$0,5529701$
$lg'\,71,63 = 8,1449050$ } add.

$8,6978751 : 9$ (gedacht: 88,69 . . . :9)

$lg\,p = 9,8553195$.

$p = 0,7166705$.

10. Beispiel. $q = \frac{1}{53,581}\sqrt[3]{\frac{0,00838876}{0,042855\sqrt{418,89}}}$.

$lg'\,418,89 = 7,3779000$ (:2 (d. i. 17,37 . . . :2)

$8,6889500$
$lg'\,0,042855 = 1,3679985$
$lg\,0,00838876 = 7,9236978$

$7,9806463 : 3$ (d. i. 27,98 . . . :3)

$9,3268821$
$lg\,53,581 = 1,7290108$ } subtr.

$lg\,q = 7,5978713$.

$q = 0,003961606$.

11. Beispiel. $r = \frac{0,74386^3}{\sqrt[13]{5,8993^4\sqrt[5]{0,090807^4}}}$.

$lg'\,0,090807 = 1,0418807$ (·4

$4,1675228 : 5$

$0,8335046$

$$\begin{array}{rl} & 0{,}8335046 \text{ (wiederholt)} \\ lg'\,5{,}8993 = 9{,}2291995\ (\cdot 4 = & \underline{6{,}9167980} \end{array} \Big\} \text{ add.}$$

$$7{,}7503026 : 13 \text{ (d. i. } {}_{12}7{,}75 \ldots : 13)$$

$$\begin{array}{rl} & 9{,}8269464 \\ lg\,0{,}74386 = 9{,}8714912\ (\cdot 3 = & \underline{9{,}6144736} \end{array} \Big\} \text{ add.}$$

$$lg\,r = 9{,}4414200.$$

$$r = 0{,}27632\dot{5}.$$

12. Beispiel. $s = \sqrt[0{,}78]{\dfrac{0{,}0069681}{1{,}9457^5}}$.

$$lg\,1{,}9457 = \underline{0{,}2890759 \cdot 5}$$

$$\begin{array}{rl} lg\,0{,}0069681 = & 7{,}8431144 \\ & \underline{1{,}4453795} \end{array} \Big\} \text{ subtr.}$$

$$6{,}3977349 : 0{,}78.$$

Vollständig ist dies $(6{,}3977349 - 10) : 0{,}78$. Um den unbrauchbaren negativen Teil $10 : 0{,}78$ zu vermeiden, hat man den Logarithmus in eine einzige negative Zahl zu verwandeln.

$$-3{,}6022651 : 0{,}78$$

$$\text{oder } \underline{-360{,}22651\ (:6}$$

$$\underline{-60{,}0377517\ (:13}$$

$$lg\,s = -4{,}6182886$$

$$= 10 - 4{,}6182886 - 10$$

$$lg\,s = 5{,}3817114 - 10.$$

$$s = 0{,}00002408304.$$

13. Beispiel. $t = \sqrt[0{,}4357998]{0{,}6}$.

$$lg\,t = \frac{lg\,0{,}6}{0{,}4357998} = \frac{9{,}7781513 - 10}{0{,}4357998}$$

$$= \frac{-0{,}2218487}{0{,}4357998} = -\frac{0{,}2218487}{0{,}4357998}.$$

Diesen Quotient berechnet man wie das 3. Beisp. im 29. Satze.

$$lg\,0{,}2218487 = 9{,}3460569$$

$$lg\,0{,}4357998 = \underline{9{,}6392870}$$

$$lg\,\text{Quot.} = 9{,}7067699.$$

Folglich ist der Quotient $= 0{,}5090611$.

Nun erst ist $lg\,t = -0{,}5090611$, weshalb auch der Quotient 7stellig berechnet worden ist.

$$lg\,t = 10 - 0{,}5090611 - 10$$
$$lg\,t = 9{,}4909389 - 10.$$
$$t = 0{,}3096984.$$

14. Beispiel. $A = \sqrt[7]{0{,}000081727^3}$.

Da hier die Differenz der beiden Kennziffern des Logarithmus der Potenz gröfser als 10 wird, so ist entweder der Logarithmus der Basis in eine einzige negative Zahl zu verwandeln oder die veränderliche negative Kennziffer zu benutzen.

Im ersten Falle:

$$lg\,0{,}000081727 = 5{,}9123656 - 10$$
$$= -4{,}0876344\ (\cdot 3$$
$$= -12{,}2629032\ (:7$$
$$lg\,A = -1{,}7518433$$
$$= 10 - 1{,}7518433 - 10$$
$$lg\,A = 8{,}2481567 - 10.$$
$$A = 0{,}01770748.$$

Im 2. Falle entweder:

$$lg\,0{,}00008\ldots = (0{,}9123656 - 5)\ (\cdot 3$$
$$2{,}7370968 - 15 \text{ oder}$$
$$0{,}7370968 - 13.$$

Um durch 7 dividieren zu können, ist aus der negativen Kennziffer ein Vielfaches von 7 zu bilden.

$$(1{,}7370968 - 14)\ (:7$$
$$lg\,A = 0{,}2481567 - 2$$
$$A = 0{,}0177\ldots$$

oder: $lg\,0{,}00008\ldots = \bar{5}{,}9123656\ (\cdot 3$

$$\overline{13}{,}7370968\ (:7 = \bar{2}{,}248\ldots$$
$$\overline{14}$$
$$17$$
$$14$$
$$33 \text{ u. s. w.}$$

$$lg\,A = \bar{2}{,}2481567 \text{ (wie oben).}$$

33. Einige Abkürzungen beim logarithmischen Rechnen.

1. Beispiel. $x = 5\sqrt[3]{4}$.

Nicht immer sind die Logarithmen aller Zahlen eines Ausdrucks zu benutzen, vielmehr wird man manche Rechnungen

kürzer ohne Logarithmen ausführen. Hier rechnet man nicht $\frac{lg\,4}{3} + lg\,5$, sondern berechnet den Ausdruck $\sqrt[3]{5^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{500}$.

2. Beispiel. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Entweder $lg\,y = \frac{lg'\,2}{4}$,

oder $y = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{0{,}5}$.

3. Beispiel. $z = \sqrt[6]{\frac{2}{\sqrt{19}}} = \sqrt[6]{\frac{2:2}{\sqrt{19:2}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{\sqrt{19:4}}}$

$= \sqrt[6]{\frac{1}{\sqrt{4{,}75}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{4{,}75}}$.

Daher $lg\,z = \frac{lg'\,4{,}75}{12}$.

4. Beispiel. $u = \sqrt[7]{\frac{11}{\sqrt{173}}} = \sqrt[7]{\sqrt{\frac{121}{173}}} = \sqrt[14]{\frac{121}{173}}$.

5. Beispiel. $v = \sqrt[4]{139\tfrac{3}{11}}$. Verwandelt man den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch, so erhält man 139,27 mit dem Reste 3 (Divisor $= 11$). Denkt man sich daher zur Bestimmung der Mantisse den Numerus $= 13927\tfrac{3}{11}$, so kann man das im 26. Satze (III, b, 2. u. 3. Beisp.) angegebene Verfahren benutzen.

$lg\,13927 = .,\,1438576$

$85 = \frac{936}{11}$ (siehe die Tafel zur Diff. 312, S. 13)

$lg\,139\tfrac{3}{11} = 2{,}1438661$ (:4

$lg\,v = 0{,}5359665$.

$v = 3{,}435314$.

6. Beispiel.

$$w = \sqrt[9]{\frac{15\sqrt{0{,}73}}{550 \cdot 111}} = \sqrt[9]{\frac{\sqrt{0{,}73}}{110 \cdot 37}} = \sqrt[9]{\frac{\sqrt{0{,}73}}{4070}}.$$

$$
\begin{array}{rl}
lg\,0{,}73 = & 9{,}8633229 \; (:2 \\
\hline
 & 9{,}9316615 \\
lg\,4070 = & 3{,}6095944 \\
\hline
 & 6{,}3220671 \; :9 \; (\text{gedacht: } 86{,}322 \ldots :9) \\
\hline
lg\,w = & 9{,}5913408.
\end{array}
$$

$w = 0{,}390248.$

7. Beispiel.

$$m = \sqrt[11]{\frac{57\frac{2}{7}}{126\frac{7}{11}\cdot 101 \cdot \left(\frac{13}{17}\right)^4}} = \sqrt[11]{\frac{401\cdot 11\left(\frac{17}{13}\right)^4}{7\cdot 1393\cdot 101}}$$

$$= \sqrt[11]{\frac{4411\left(\frac{17}{13}\right)^4}{707\cdot 1393}}.$$

Daher $4\,(lg\,17 - lg\,13) + lg\,4411 + lg'\,707 + lg'\,1393$. Diese Summe durch 11 dividiert giebt $lg\,m$.

8. Beispiel.

$$n = 0{,}078649^2 \sqrt[3]{0{,}078649^2 \sqrt[3]{0{,}078649^2 \sqrt[3]{0{,}078649^2}}}.$$

Setze $0{,}078649 = a$. Folglich:

$$n = a^2 \sqrt[3]{a^2 \sqrt[3]{a^2 \sqrt[3]{a^2}}} = a^2 \sqrt[3]{a^2 \sqrt[3]{a^2 \cdot a^{\frac{2}{3}}}} = a^2 \sqrt[3]{a^2 \sqrt[3]{a^{\frac{8}{3}}}}$$

$$= a^2 \sqrt[3]{a^2 \cdot a^{\frac{8}{9}}} = a^2 \sqrt[3]{a^{\frac{26}{9}}} = a^2 \cdot a^{\frac{26}{27}} = a^{3 - \frac{1}{27}}$$

$$= 0{,}078649^{3-\frac{1}{27}}.$$

$$lg\,n = \left(3 - \frac{1}{27}\right)\cdot lg\,0{,}078649 = \left(3 - \frac{1}{27}\right)\cdot 8{,}8956932$$

$$= 3\cdot 8{,}8956932 - \frac{_{26}8{,}8956932}{27}.$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \left.\begin{array}{r} 6{,}6870796 \\ 9{,}9590997 \end{array}\right\} \text{subtr.} \\
\hline
lg\,n = & 6{,}7279799.
\end{array}
$$

$n = 0{,}0005345396.$

34. Negative Numeri.

Da die Logarithmen negativer Zahlen unmöglich sind (siehe 6. Satz, 4. Zus., III), so hat man bei einem negative Zahlen enthaltenden Ausdrucke entweder nur den absoluten Wert zu berechnen und hierauf das Zeichen hinzuzufügen, wie im 13. Beisp. des 32. Satzes bei der Berechnung des Quotient $-\frac{0,221\ldots}{0,435\ldots}$, oder man fügt dem Logarithmus eines negativen Numerus rechts unten ein n hinzu

$$[\text{z. B. } lg(-7) = 0,8450980_n],$$

um alsdann mit diesem n den nachstehenden Regeln gemäfs zu rechnen.

Ist p eine positive Zahl und sind a, b, c, d negative Zahlen, so sind die Ausdrücke pab, $pabcd$, $\frac{pa}{b}$, $\frac{p}{ab}$, a^2, a^4 positiv. Ist nun z. B. $x = \frac{ab}{pcd}$ zu berechnen, so erhalten (weil a, b, c, d negativ sind) $lg\,a$, $lg\,b$, $lg\,c$, $lg\,d$ jenes n. Da aber

$$lg\,a + lg\,b - lg\,c - lg\,d = lg\,x \text{ und der Num. } x = \frac{ab}{pcd}$$

positiv ist, so fällt im $lg\,x$ das n weg.

> Werden mithin 2, 4, 6 .... mit n bezeichnete Logarithmen addiert oder subtrahiert, oder wird ein mit n bezeichneter Logarithmus mit 2, 4, 6 .... multipliciert, so verschwindet das n im Logar. des Resultats, weil dasselbe positiv sein mufs.

Dagegen sind pa, $\frac{p}{a}$, $pabc$, $\frac{ab}{pc}$, a^3, a^5, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$ negative Ausdrücke. Ist nun z. B. $x = \frac{p}{abc}$ zu berechnen, so erhalten (weil a, b, c negativ sind) $lg\,a$, $lg\,b$, $lg\,c$ jenes n. Da nun

$$lg\,p - lg\,a - lg\,b - lg\,c = lg\,x \text{ und der Num. } x = \frac{p}{abc}$$

negativ ist, so ist dem $lg\,x$ das n hinzuzufügen.

> Werden daher 1, 3, 5, 7 ... mit n bezeichnete Logarithmen addiert oder subtrahiert, oder wird ein mit n bezeichneter Logarithmus mit 3, 5, 7 ... multipliciert oder durch 3, 5, 7 ... dividiert, so behält der Logar. des Resultats das n, weil der zugehörige Numerus negativ sein mufs.

Beispiel. $x = \frac{a^3 b^2}{c\sqrt[3]{d}}$ sei mit $a = -1,03841$, $b = -0,57628$, $c = -398879,9$, $d = -0,0097692$ zu berechnen.

$$lg\,a = 0,0163689_n \;(\cdot 3$$

$$0,0491067_n$$

$$lg\,b = 9,7606335_n \cdot 2 = 9,5212670 - 10$$

$$lg'\,c = 4,3991578_n - 10$$

$$lg'\,d = 2,0101410_n \;(:3 = 0,6700470_n$$

$$lg\,x = 4,6395785_n - 10.$$

Die 4 zu addierenden Logarithmen enthielten drei n und folglich war $lg\,x$ mit n zu bezeichnen. Wegen dieses n aber ist x negativ.

$$x = -0,000004360924.$$

35. Logarithmen an Stelle der Numeri.

Um bei einem zu berechnenden Ausdrucke (einer Formel) nicht erst den Logarithmus einer unveränderlichen Zahl aufsuchen zu müssen, setzt man an die Stelle dieser Zahl ihren in Parenthese eingeschlossenen Logarithmus.

1. Beispiel. Ist der Radius der Kugel $= r$, so ist das Volumen derselben $= 4,1887902\,r^3$. Um nun für jedes gegebene r das Volumen zu berechnen, müfste man jedesmal

$$lg\;4,1887902 \;(= 0,6220886)$$

aus den Tafeln bestimmen. Um dies zu vermeiden, schreibt man:

$$\text{Volumen der Kugel} = (0,6220886)\,r^3 \;\;.\;.\;.\;.\;\; \text{(K)}$$

$$\left[\text{Manche schreiben auch } \overline{0,6220886}\,r^3\right].$$

Ist beispielsweise $r = 858,4779$ geogr. Meilen (der mittlere Radius der Erde), so ist die Rechnung folgende:

$$lg\;858,4779 = 2,9337291 \;(\cdot 3$$

$$8,8011873$$

$$lg \text{ jener Constanten} = 0,6220886 \text{ (siehe K)}$$

$$lg\,\text{Volumen} = 9,4232759.$$

Volumen der Erde $= 2650183000$ Kubikmeilen.

2. Beispiel. Ist die halbe grofse Achse der Ellipse $= a$, die halbe kleine Achse $= b$, so ist ihr

$$\text{Umfang} = (1,1272386)\cdot(a+b)\left[0,296875 - \frac{ab}{\frac{30}{8}\cdot(a+b)^2 + ab}\right].$$

Ist z. B. $a = 6$, $b = 5$ Meter, so ist der

$$\text{Umfang} = (1{,}1272386)\cdot(6+5)\left[0{,}296875 - \frac{6\cdot 5}{\frac{30}{8}\cdot(6+5)^2 + 6\cdot 5}\right]$$

$$= (1{,}1272386)\cdot 11\cdot\left[0{,}296875 - \frac{1}{\frac{121}{8}+1}\right]$$

$$= (1{,}1272386)\cdot 11\cdot\left(0{,}296875 - \frac{1}{16{,}125}\right).$$

$$lg'\,16{,}125 = 8{,}7925003,\ \text{daher:}$$

$$\frac{1}{16{,}125} = 0{,}0620155.$$

$$\text{Umfang} = (1{,}1272386)\cdot 11\cdot 0{,}2348595.$$

$$\begin{aligned} lg \text{ jener Constanten} &= 1{,}1272386 \\ lg\,11 &= 1{,}0413927 \\ lg\,0{,}2348595 &= 9{,}3708082 \\ \hline lg \text{ Umfang} &= 1{,}5394395. \end{aligned}$$

Der Umfang $= 34{,}62896$ Meter.

36. Unlogarithmische Ausdrücke.

1. Es ist $lg(ab) = lg\,a + lg\,b$, $lg\frac{a}{b} = lg\,a - lg\,b$, folglich kann nicht auch $lg(a \pm b) = lg\,a \pm lg\,b$ sein. Ist daher die Kenntnis des $lg(a \pm b)$ nötig und sind a und b erst mit Logarithmen zu berechnende Ausdrücke, so nennt man $a \pm b$ einen unlogarithmischen (oder nichtlogarithmischen) Ausdruck. In diesem Falle ist also Num. a aus $lg\,a$, Num. b aus $lg\,b$, hierauf $a \pm b$ zu berechnen, um alsdann $lg(a \pm b)$ bestimmen zu können.

1. Beispiel. $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{9876{,}5} + \sqrt[5]{0{,}004619}}}$.

Hier ist zunächst die Zahl $\sqrt[3]{9876{,}5}$ zu berechnen.

$$lg\,9876{,}5 = 3{,}9946031\ (:3$$

$$n.\,lg\,1{,}3315344 = 21{,}45529.$$

Diese Gleichung liest man:

„*numerus logarithmi* 1,3315344 = 21,45529“.

Sie bedeutet, dafs der Numerus des Logarithmus, welcher 1,3315344 ist, $= 21{,}45529$ ist. Hier steht hinter lg kein Numerus und rechts kein Logarithmus, wie es bisher der Fall war, sondern auf der

linken Seite nach *n. lg* (oder *num lg*) ein Logarithmus und rechts der zugehörige Numerus.*)

Es ist also $\sqrt[3]{9876,5} = 21,45529$.

Nun ist auch $\sqrt[5]{0,004619}$ zu berechnen und zwar nur auf 5 Decimalstellen, weil $\sqrt[3]{\ }$ nur auf 5 Decimalen bestimmt ist!

$$lg\,0,004619 = 7,6645480 \;(:5 \quad [\text{d. i. } {}_4 7,66 \ldots :5]$$
$$n\,lg\,9,5329096 = 0,34112.$$

Es ist also $\sqrt[5]{0,004619} = 0,34112$.

Jetzt geht die Aufgabe über in:

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{21,45529 + 0,34112}} = \frac{1}{\sqrt[4]{21,79641}}.$$
$$lg'\,21,79641 = 8,6616150 \;(:4 \quad [\text{d. i. } {}_3 8,66 \ldots :4]$$
$$lg\,x = 9,6654038.$$
$$x = 0,4628112.$$

2. Beispiel. $y = \sqrt[3]{\dfrac{0,0469\sqrt[6]{47,8} - 3\sqrt[6]{957,1}}{5\sqrt[6]{957,1} - 0,789\sqrt[6]{47,8}}}$

Den Bruch kürze man zuvor durch $\sqrt[6]{47,8}$:

$$y = \sqrt[3]{\frac{0,0469 - 3\sqrt[6]{\dfrac{957,1}{47,8}}}{5\sqrt[6]{\dfrac{957,1}{47,8}} - 0,789}}.$$

Zunächst ist nur $\sqrt[6]{\dfrac{957,1}{47,8}}$ zu berechnen.

$$lg\,957,1 = 2,9809573$$
$$lg\,47,8 = 1,6794279$$
$$1,3015294 \;(:6$$
$$n\,lg\,0,2169216 = 1,647865.$$

*) Diese Bezeichnung *n. lg* ist von den gebräuchlichen die einzig richtige, denn sie ist der goniometrischen Abkürzung *arc sin* analog.

$$\text{Nun ist } y = \sqrt[3]{\frac{0{,}0469 - 3 \cdot 1{,}647865}{5 \cdot 1{,}647865 - 0{,}789}} \text{ (die Mult. ohne Log.)}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{0{,}0469 - 4{,}943595}{8{,}239325 - 0{,}789}} = \sqrt[3]{\frac{-4{,}896695}{7{,}450325}}.$$

$$lg\,(-4{,}89\ldots) = 0{,}6899031_n$$
$$lg\,7{,}45\ldots = 0{,}8721753$$
$$9{,}8177278_n \;(:3\ [\text{d. i. } _2 9{,}81\ldots:3]$$
$$lg\,y = 9{,}9392426_n.$$
$$y = -0{,}8694460.$$

II. Oft lassen sich unlogarithmische Ausdrücke logarithmisch machen.

1. Beispiel. $x = \sqrt{7{,}9682^2 - 5{,}3927^2}$ (unlogar.!)

Dafür $x = \sqrt{(7{,}9682 + 5{,}3927)\,(7{,}9682 - 5{,}3927)}$

$x = \sqrt{13{,}3609 \cdot 2{,}5755}$.

Dieser Ausdruck ist logarithmisch, da der aus den benutzten Logarithmen gefundene Numerus direkt zu dem Resultate führt.

2. Beispiel. $y = \dfrac{\sqrt[3]{7{,}845} - \sqrt[3]{0{,}89}}{0{,}61963}$ (unlogar.!)

Dafür $y = \dfrac{\sqrt[3]{7{,}845}}{0{,}61963} - \dfrac{\sqrt[3]{0{,}89}}{0{,}61963}$.

Dieser Ausdruck ist logarithmisch, denn sind die beiden Glieder mit Logarithmen berechnet, so giebt ihre Differenz unmittelbar das gesuchte y.

3. Beispiel. $z = \sqrt{26\,sin\,67^\circ + 13}$ (unlogar.!)

Dafür $z = \sqrt{26\left(sin\,67^\circ + \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{26\,(sin\,67^\circ + sin\,30^\circ)}$

$$= \sqrt{26 \cdot 2 \cdot sin\,\frac{67^\circ + 30^\circ}{2}\,cos\,\frac{67^\circ - 30^\circ}{2}}$$

$= \sqrt{52\,sin\,48^\circ 30'\,cos\,18^\circ 30'}$ (logarithmisch!)

37. Summen- und Differenzlogarithmen.

I. Unlogarithmische Ausdrücke berechnet man bequemer mit den von Gaufs erfundenen Summen- und Differenzlogarithmen, die jedoch in ihrer ursprünglichen Gestalt ihrer complicierten Einrichtung wegen — sie enthielten 3 Columnen A, B. C — wenig Be-

achtung fanden. Zech gab denselben eine einfachere Form, indem er sie auf 2 verschiedene Tafeln reducierte, die eine zur Berechnung des Logarithmus einer Summe (Additionslogarithmen), die andere zur Berechnung des Logarithmus einer Differenz (Subtraktionslogarithmen). Im Jahre 1861 legte der Verfasser vorliegenden Werkes den Herren Professoren Hankel und Scheibner in Leipzig auf 7 Stellen berechnete Summen- und Differenzlogarithmen vor, die endlich mit einer Tafel ein ungemein einfaches und praktisches Rechnen zulassen. Dieselben gelangten jedoch nicht an die Öffentlichkeit, da Herr Prof. Scheibner in denselben keinen Fortschritt erkannte, sie vielmehr mit den Zech'schen Tafeln auf gleiche Stufe stellte. Sie waren mit den erst im Jahre 1866 von Theod. Wittstein herausgegebenen 7stelligen Summen- und Differenzlogarithmen vollkommen identisch.

Die Schurig-Wittstein'schen Logarithmen haben ganz die Form der Logarithmen der absoluten Zahlen in den Bruhns'schen Tafeln (1. Teil), wie aus nachstehenden Bruchstücken ersichtlich ist.

A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P. 137
9,200	0,063	8920	9057	9194	9331	9468	9605	9742	9879	*0016	*0153	1 13,7 2 27,4
9,201	0,064	0290	0427	0564	0701	0838	0976	1113	1250	1387	1525	3 41,1 4 54,8
9,202		1662	1799	1937	2074	2212	2349	2487	2624	2762	2899	5 68,5 6 82,2

u. s. w.

31 Seiten weiter unten:

A	B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P. 863
0,797	0,861	3037	3899	4762	5624	6487	7349	8212	9074	9937	*0799	1 86,3 2 172,6
0,798	0,862	1662	2525	3387	4250	5113	5976	6838	7701	8564	9427	3 258,9 4 345,2
0,799	0,863	0290	1153	2016	2879	3742	4605	5468	6331	7194	8057	5 431,5 6 517,8

u. s. w.

Um die Zahlen einer solchen Tafel berechnen zu können, mufs man wissen, dafs für $A = lg\,x$: $B = lg\,(1 + x)$ ist.

Aus $A = 9{,}2009$ (d. i. $9{,}2009 - 10$) z. B. könnte das zugehörige B gefunden werden, wenn man $A = 9{,}2009000 = lg\,x$ setzt. Man findet $x = 0{,}1588181$. Nun ist

$B = lg(1+x) = lg(1+0{,}1588181) = lg\,1{,}1588181 = 0{,}0640153$ (s. oben die 1. Tafel. 1. Zeile, letzte Zahl).

II. $lg\,a$ und $lg\,b$ gegeben ($lg\,a$ beliebig gröfser oder kleiner als $lg\,b$), $lg\,(a+b)$ gesucht.

Auflösung. Die Differenz $lg\,a - lg\,b$ suche in A auf und bestimme das zugehörige B. Alsdann ist $lg\,(a+b) = B$ vermehrt um den zuerst als Subtrahend benutzten Logarithmus, folglich

$$= B + lg\,b.$$

Der grofse Vorteil dieser Logarithmen besteht darin, dafs man $lg\,(a+b)$ unmittelbar berechnet, ohne erst die Numeri a und b aus $lg\,a$ und $lg\,b$ bestimmen zu müssen.

Von Vorteil ist es übrigens behufs der Bestimmung des B stets den kleineren Logarithmus um den gröfsern zu vermindern, weil man dann mit einer kleinern Differenz (in P. P.) rechnet.

Beweis. $lg\,a - lg\,b = A = lg\,x$, folglich ist $x = \frac{a}{b}$. Da nun $B = lg(1+x)$ ist, wenn $A = lg\,x$, so ist

$$B + lg\,b = lg(1+x) + lg\,b = lg\left(1+\frac{a}{b}\right) + lg\,b$$

$$= lg\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)\cdot b\right] = lg(b+a) = lg(a+b).$$

1. Beispiel. $lg\,x = 4{,}6880637$; $lg\,y = 3{,}8893073$. $lg\,(x+y)$ gesucht.

Da $lg\,x > lg\,y$, so benutze man $lg\,x$ als Subtrahend.

$$\left.\begin{array}{r} lg\,y = 3{,}8893073 \\ lg\,x = 4{,}6880637 \end{array}\right\}\ \text{subtr.} \quad \ldots . (Y)$$

$$A = 9{,}2012436.$$

Aus der 1. Tafel oben:

$$\left.\begin{array}{l} A = 9{,}2012 \text{ giebt } B = 0{,}0640564 \\ \quad 4 \ldots\ldots\ldots\ldots 54{,}8 \\ \quad 3 \ldots\ldots\ldots\ldots 41{,}1 \\ \quad 6 \ldots\ldots\ldots\ldots 82{,}2 \\ \quad lg\,x = 4{,}6880637 \text{ (jener Subthd. Y)} \end{array}\right| \text{addiert:}$$

$$lg\,(x+y) = 4{,}7521261.$$

Probe. Aus $lg\,x = 4{,}6880637$ findet man mittelst der Bruhnsschen Tafeln: $x = 48760$

aus $lg\,y = 3{,}8893073$: $y = 7750{,}1$

$$x + y = 56510{,}1.$$

Dieselben Tafeln geben $lg\,(x+y) = lg\,56510{,}1 = 4{,}7521261$ (wie oben).

2. Beispiel. $m = \sqrt[4]{0,72963^4 + \sqrt[3]{0,0096129^2}}$.

$$lg\, 0,72963 = 9,8631027 \; (\cdot 4$$
$$lg\, 0,72963^4 = 9,4524108$$
$$\text{Ferner } lg\, 0,0096129 = 7,9828544 \; (\cdot 2$$
$$_2 5,9657088 \; (:3$$
$$lg \sqrt[3]{0,0096^2} = 8,6552363.$$

Anstatt nun die Numeri der beiden Glieder und aus deren Summe die $\sqrt[4]{\ }$ zu suchen (s. Aufgabe), rechnet man:

$$\left.\begin{aligned} lg \sqrt[3]{0,0096^2} &= 8,6552363 \\ lg\, 0,72963^4 &= 9,4524108 \end{aligned}\right\} \text{subtr.} \quad \ldots . \; (Z)$$
$$A = 9,2028255.$$

$$\left.\begin{aligned} A = 9,2028 \text{ giebt } B &= 0,0642762 \\ 2 \ldots\ldots\ldots\ldots &\; 27,4 \\ 5 \ldots\ldots\ldots\ldots &\; 68,5 \\ 5 \ldots\ldots\ldots\ldots &\; 68,5 \\ lg\, 0,729^4 &= 9,4524108 \; .. \text{ s. Z.} \end{aligned}\right\} \text{add.}$$

$$lg\left(0,729^4 + \sqrt[3]{0,0096^2}\right) = 9,5166905 \; (:4$$
$$lg\, m = 9,8791726.$$
$$m = 0,7571337.$$

III. $lg\, a$ und $lg\, b$ gegeben ($lg\, a > lg\, b$), $lg\,(a - b)$ gesucht.

Auflösung. Die Differenz $lg\, a - lg\, b$ (der abzuziehende Logarithmus stets der kleinere!) suche in B auf und bestimme das zugehörige A. Alsdann ist $lg\,(a - b) = A$ vermehrt um den zuerst als Subtrahend benutzten Logarithmus, folglich $= A + lg\, b$. [Vergl. diese Regel mit der unter II!]

Beweis. $lg\, a - lg\, b = B = lg\,(1 + x)$, folglich ist $1 + x = \frac{a}{b}$ und $x = \frac{a}{b} - 1$. Nun ist

$$A + lg\, b = lg\, x + lg\, b = lg\left(\frac{a}{b} - 1\right) + lg\, b = lg\left[\left(\frac{a}{b} - 1\right) b\right]$$
$$= lg\,(a - b).$$

1. Beispiel. Aus $\left.\begin{aligned} lg\, x &= 0,0276350 \\ \text{und } lg\, y &= 9,1655411 \end{aligned}\right\}$ $lg\,(x - y)$ zu finden.

$$B = 0,8620939 \text{ (s. oben die 2. Tabelle)}$$

$$
\begin{array}{l}
B = 0{,}8620939 \text{ (wiederholt)} \\
\underline{8620799} \text{ giebt } A = 0{,}7979 \\
\quad 140{,}0 \\
\quad \underline{86{,}3} \ldots\ .\ 1 \\
\quad 537{,}0 \\
\quad \underline{517{,}8} \ldots .\ 6 \\
\quad 192{,}0 \ldots .\ 2
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{r}
A = 0{,}7979162 \\
lg\, y = \underline{9{,}1655411} \text{ (der oben benutzte Sbthd.!)}
\end{array}\right\} \text{ add.}
$$

$$lg\,(x - y) = 9{,}9634573.$$

Probe. Aus $lg\, x = 0{,}0276350$ findet man mittelst der Bruhnsschen Tafeln $x = 1{,}0657$, aus $lg y = 9{,}1655411$:

$$\underline{y = 0{,}1464}$$

$$x - y = 0{,}9193;\ lg\, 0{,}9193 = 9{,}9634573 \text{ (wie oben).}$$

2\. Beispiel. $n = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt[4]{0{,}35789^3} - 0{,}87707^7}}.$

$$
\begin{array}{l}
lg\, 0{,}35789 = \underline{9{,}5537496} \ (\cdot 3 \\
\qquad\qquad\quad {}_3 8{,}6612488 : 4 \\
lg \sqrt[4]{0{,}35^3} = 9{,}6653122.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{Ferner } lg\, 0{,}87707 = \underline{9{,}9430343} \ (\cdot 7 \\
lg\, 0{,}87707^7 = 9{,}6012401.
\end{array}
$$

Mit Benutzung der Summen- und Differenzlogarithmen:

$$
\left.\begin{array}{r}
lg \sqrt[4]{0{,}35^3} = 9{,}6653122 \\
lg\, 0{,}87707^7 = 9{,}6012401
\end{array}\right\} \text{ subtr.}
$$

$$
\begin{array}{l}
B = 0{,}0640721 \text{ (s. oben die 1. Tabelle)} \\
\underline{0701} \text{ giebt } A = 9{,}2013 \\
\quad 20{,}0 \\
\quad \underline{13{,}7} \ldots .\ 1 \\
\quad 63{,}0 \\
\quad \underline{51{,}8} \ldots .\ 4 \\
\quad 82{,}0 \ldots .\ 6
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{r}
A = 9{,}2013146. \\
lg\, 0{,}87707^7 = 9{,}6012401 \text{ (s. ob. der Subthd.)}
\end{array}\right\} \text{ add.}
$$

$$lg \text{ Wurzelbasis } = \underline{8{,}8025547} \ (: 2$$

$$lg \text{ Nenner } = 9{,}4012774$$

lg Nenner $= 9,4012774$ (wiederholt)
lg' Nenner $= 0,5987226 = lg\, n.$
$n = 3,969379.$

1. Zusatz. Ist $lg\, a$ gegeben und wird $lg(1 + a)$ gesucht, so gehe man unmittelbar mit $lg\, a = \mathrm{A}$ in die Tafel. Das zugehörige B ist der gesuchte $lg(1 + a)$.

Beweis. $\mathrm{A} = lg\, x$, $\mathrm{B} = lg(1 + x)$.

2. Zusatz. Ist $lg\, a$ gegeben und wird $lg(a - 1)$ gesucht, so gehe man unmittelbar mit $lg\, a = \mathrm{B}$ in die Tafel. Das zugehörige A ist der gesuchte $lg(a - 1)$.

Beweis. Ist $\mathrm{B} = lg(1 + x)$, so ist $\mathrm{A} = lg\, x$ (s. oben). Setzt man $x = a - 1$, so ist $\mathrm{B} = lg(1 + a - 1) = lg\, a$ und $\mathrm{A} = lg(a - 1)$.

3. Zusatz. $lg\, a$ gegeben, $lg(1 - a)$ gesucht.

Mit $\mathrm{B} = lg'\, a$ bestimme man das zugehörige A, alsdann ist $lg(1 - a) = \mathrm{A} + lg\, a$.

Beweis. Ist $\mathrm{B} = lg(1 + x)$, so ist $\mathrm{A} = lg\, x$. Setzt man nun $\mathrm{B} = lg'\, a$, so ist $lg(1 + x) = lg'\, a = lg\frac{1}{a}$, folglich $1 + x = \frac{1}{a}$ oder $x = 1 - \frac{1}{a}$. Damit geht $\mathrm{A} + lg\, a = lg\, x + lg\, a$ über in

$$lg\left(1 - \frac{1}{a}\right) + lg\, a = lg\left[\left(1 - \frac{1}{a}\right) a\right] = lg(a - 1).$$

4. Zusatz. $lg(a + b + c)$ aus $lg\, a$, $lg\, b$, $lg\, c$ zu finden.

Aus $lg\, a$ und $lg\, b$ suche zuerst $lg(a + b) = lg\, s$, alsdann aus $lg\, s$ und $lg\, c$: $\quad lg(s + c) = lg(a + b + c)$.

Anmerkung. Die Summen- und Differenzlogarithmen sind den bisher bei unlogarithmischen Ausdrücken benutzten Hilfswinkeln in der Regel vorzuziehen.

Berichtigungen.

Im 1. Teil (§. 1—51).

Seite 33 Zeile 4 v. u. oder statt und.
„ 34 „ 7 v. u. gemischten Zahlen statt Brüche.
„ 64 „ 12 v. o. $a \,.\, b + b = a$ statt $\ldots = b$.
„ 71 „ 16—20 v. o. sechsten, fünften und sechsten Stelle statt fünften, vierten und fünften Stelle.
„ 135 2. Zeile vor dem 2. Beisp. 7 . 7 statt 7 . 1.
„ 178 2. „ „ „ „ „ 17,33 statt 1733.
„ 210 Zeile 3 v. u. 13,59 statt 1,359.
„ 211 in der Mitte 13,595 : 0,081665 und 13,585 : 0,081675 statt 1,3595 : 0,81665 und 1,3585 : 0,81675.
„ 222 Zeile 5 v. o. 4. Zusatz statt 3. Zusatz.
„ 286 „ 5 v. o. $4\frac{1}{4}$ statt $4\frac{1}{2}$.

Im 2. Teil (§. 52—73).

Seite 1 Zeile 3 v. o. den Begriffen statt dem Begriffe.
„ 1 „ 3 v. u. $3 + 4$ statt 3 und 4.
„ 10 „ 9 v. u. kann vollständiger gesetzt werden: „Diese Glieder haben für $a = 1$, $c = 2$, $e = 3$ die Werte:“
„ 89 ist das 6. Beisp. nach S. 87 als 2. Beisp. zum 1. Zusatz zu versetzen.
„ 111 Zeile 3 v. o. 8 Einer statt 2 Einer.
„ 366 „ 22 v. u. $lg\, 0{,}0625$ statt $lg\, 0{,}625$.

Druck von C. Grumbach in Leipzig.









